

第五章 线性系统理论引论

§ 5-0 引言	5-0-1
§ 5-1 线性系统的数学描述	5-1-1
5-1-1 线性系统的经典描述方法	5-1-1
一、常系数、线性、连续系统的经典描述方法.....	5-1-1
1. 用微分方程来描述	5-1-1
2. 用传递函数来描述	5-1-2
3. 用频率特性来描述	5-1-4
4. 用脉冲过渡函数来描述	5-1-4
5. 借助图形来描述(符号流程图)	5-1-7
二、常系数、线性、离散系统的经典描述方法.....	5-1-16
1. 用差分方程来描述	5-1-16
2. 用Z传递函数来描述	5-1-17
三、变系数、线性、连续系统的经典描述方法.....	5-1-18
四、变系数、线性、离散系统的经典描述方法.....	5-1-19
5-1-2 线性系统的现代描述方法	5-1-19
一、线性系统的状态空间描述	5-1-19
1. 线性、连续系统的状态空间描述	5-1-19
2. 线性、离散系统的状态空间描述	5-1-25
二、线性系统的结构图表示	5-1-27
三、常系数、线性、连续系统的传递矩阵	5-1-28
四、常系数、线性、离散系统的传递矩阵	5-1-29

五、随机线性系统的数学描述	5-1-30
§ 5-2 线性系统的最佳设计	5-2-1
5-2-1 最佳设计问题的提出	5-2-1
5-2-2 最佳设计的性能指标	5-2-4
5-2-3 最佳滤波原理	5-2-7
一、维纳最佳滤波原理	5-2-7
二、卡尔曼滤波原理	5-2-14
5-2-4 最佳控制原理	5-2-19
一、确定性系统最佳控制原理	5-2-19
二、随机性系统最佳控制原理	5-2-21
三、随机性系统最佳控制问题的分解原理	5-2-23
§ 5-3 线性系统的基本特性	5-3-1
5-3-1 引言	5-3-1
5-3-2 线性系统的可观性	5-3-2
一、系统可观性概念	5-3-2
二、系统完全状态可观性准则	5-3-2
三、系统一致可观性概念	5-3-14
5-3-3 线性系统的可控性	5-3-29
一、系统可控性概念	5-3-29
二、系统完全状态可控性准则	5-3-30
三、系统完全轨出可控性准则	5-3-39
四、系统一致可控性概念	5-3-40

5-3-4	线性系统的稳定性	5-3-57
一、	系统稳定性概念	5-3-57
1.	系统的描述	5-3-57
2.	平衡状态	5-3-58
3.	稳定性概念	5-3-58
二、	李雅普诺夫直接法	5-3-61
三、	线性系统的稳定性准则	5-3-68
四、	线性系统稳定性的一般形式	5-3-80
五、	利用李雅普诺夫函数	
	估计系统时间常数的上界	5-3-83
§ 5-4	线性系统的不变量及其规范形式	5-4-1
5-4-1	状态变量的线性变换及	
	系统的不变量	5-4-1
5-4-2	线性系统的若唐规范形式	5-4-3
5-4-3	线性系统的可控规范形式	5-4-25
5-4-4	线性系统的可观文规范形式	5-4-31
§ 5-5	常系数、线性系统的实现问题	5-5-1
5-5-1	常系数、线性系统的可控实现	5-5-1
5-5-2	常系数、线性系统的可观文实现	5-5-7
5-5-3	常系数、线性系统的并联形实现	5-5-9
一、	并联可控实现	5-5-9
二、	并联可观文实现	5-5-13

5-5-4	常系数、线性系统的串联形实现	5-5-15
5-5-5	常系数、线性系统的最小实现	5-5-21
§ 5-6	状态反馈问题	5-6-1
5-6-1	反馈问题	5-6-1
5-6-2	极点配置问题	5-6-8
一、	单轨入单轨出系统的极点配置问题	5-6-9
二、	特殊情况下多轨入多轨出系统的 极点配置问题	5-6-18
5-6-3	稳定性问题	5-6-26
一、	能稳定性	5-6-26
二、	衰减速度	5-6-28
三、	减少反馈量	5-6-29
四、	轨出反馈的稳定性	5-6-33
5-6-4	分离性控制问题	5-6-35
§ 5-7	观文口原理	5-7-1
5-7-1	引言	5-7-1
5-7-2	观文口和“可检测系统”	5-7-1
一、	观文口构成的基本思想	5-7-1
二、	观文口和“可检测系统”	5-7-5
5-7-3	观文口的基本关系	5-7-13
5-7-4	基本观文口	5-7-26
5-7-5	降维观文口	5-7-29

一、单轨入单轨出系统的降维观文口	5-7-31
二、多轨入多轨出系统的降维观文口	5-7-39
5-7-6 用观文口构成状态反馈	5-7-46
§ 5-8 灵敏度分析	5-8-1
5-8-1 经典灵敏度和闭环极偏移与增益偏移 以及开环零点, 极点偏移间的关系	5-8-1
5-8-2 比较灵敏度	5-8-8
5-8-3 轨道灵敏度函数	5-8-19
§ 5-9 线性系统的对偶原理	5-9-1
5-9-1 线性系统的可观文性与 可控性之间的对偶特性	5-9-1
5-9-2 随机最佳估计和确定性 最佳控制之间的对偶特性	5-9-2
5-9-3 对偶系统和对偶原理	5-9-5
5-9-4 线性系统的对偶关系式	5-9-7

第六章 最佳滤波原理

§ 6-0 引言	6-0-1
§ 6-1 估计问题	6-1-1
6-1-1 统计估计问题	6-1-1
一、最小方差估计	6-1-1
二、极大验后估计	6-1-5
三、极大似然估计	6-1-6
四、举例	6-1-7
6-1-2 线性估计	6-1-18
一、线性最小方差估计	6-1-18
二、最小二乘估计	6-1-24
6-1-3 估计问题小结	6-1-28
一、几种估计方法的比较	6-1-28
二、几种估计方法间的关系	6-1-30
§ 6-2 线性最佳滤波原理	6-3-1
6-2-1 离散、线性系统的最佳滤波原理	6-2-1
一、概述	6-2-1
二、卡尔曼滤波公式	6-2-3
三、卡尔曼滤波的性质	6-2-21
四、白噪声情况下一般线性系统的滤波公式	6-2-21
五、有色噪声情况下线性系统的滤波	6-2-28

六、举例	6-2-44
6-2-2 连续、线性系统的最佳滤波原理	6-2-67
一、连续、线性系统的最佳滤波问题	6-2-67
二、等效的离散、线性系统	6-2-68
1. 将白噪声过程视为白噪声序列的 极限情况	6-2-68
2. 等效的离散、线性系统	6-2-72
三、连续、线性系统滤波的基本公式	6-2-74
四、举例	6-2-81
§ 6-3 最佳滤波的稳定性和误差分析	6-3-1
6-3-1 最佳滤波的稳定性	6-3-1
一、最佳滤波的稳定性概念	6-3-1
二、稳定性准则	6-3-2
6-3-2 最佳滤波的误差分析	6-2-8
一、误差协方差矩阵微分方程和 差分方程的解析解	6-3-8
1. 误差协方差矩阵微分方程的解析解	6-3-8
2. 误差协方差矩阵差分方程的解析解	6-3-18
二、误差协方差矩阵的上、下界	6-3-22
三、误差协方差矩阵的渐近特性	6-3-33
§ 6-4 模型误差分析，最佳滤波的 发散现象和克服发散的方法	6-4-1

6-4-1	模型误差分析	6-4-1
	一、模型误差分析的一般方法	6-4-1
	二、特殊情况的讨论	6-4-6
6-4-2	泸波的发散现象	6-4-15
6-4-3	克服发散的方法	6-4-16
	一、限定下界法	6-4-16
	二、状态扩充法	6-4-20
	三、渐消记(衰减记忆泸波)	6-4-22
	四、限定记忆泸波	6-4-31
	五、自适应泸波	6-4-35

§ 5-9 线性系统的对偶原理

通过上面的各节的讨论，使我们会发现线性系统的一个重要特性，即所谓对偶特性，下面具体讨论。

5-9-1 线性系统的可观察性与可控性之间的对偶特性

由第三节的讨论，使我们知道，如果有系统数学模型为

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)u(t) \\ Y(t) = C(t)X(t) \end{cases} \quad (5-9-1)$$

则其是完全状态可观察的充要条件是：可观察性矩阵

$$M(t_0, t_N) = \int_{t_0}^{t_N} \Phi^T(t, t_0) C^T(t) C(t) \Phi(t, t_0) dt \quad (5-9-2)$$

是正定的。它是完全状态可控的充要条件是：可控性矩阵

$$W(t_0, t_N) = \int_{t_0}^{t_N} \Phi(t_0, t) B(t) B^T(t) \Phi^T(t_0, t) dt \quad (5-9-3)$$

是正定的。

在式(5-9-3)中，如果作下面的代换

$$\begin{cases} \Phi(t_0, t) \Rightarrow \Phi^T(t, t_0) \\ B(t) \Rightarrow C^T(t) \end{cases} \quad (5-9-4)$$

则由式(5-3-2)得

$$\begin{aligned}
 W(t_0, t_N) &= \int_{t_0}^{t_N} \Phi^T(t, t_0) C^T(t) C(t) \Phi(t, t_0) dt \\
 &= M(t_0, t_N)
 \end{aligned}
 \tag{5-9-5}$$

由此可知，在具有代换关系(5-9-4)时，系统的可控性矩阵与其可观察性矩阵相同，这就是系统的可控性与其可观察性之间的对偶特性。

5-9-2 随机最佳估计和确定性最佳控制之间的对偶特性

由第二节的讨论知道，如果有线性系统数学模型

$$\begin{cases}
 \dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)u(t) \\
 Y(t) = C(t)X(t)
 \end{cases}
 \tag{5-9-6}$$

则使二次型性能指标

$$J = X^T(T)S(T)X(T) + \int_{t_0}^T \{X^T(t)Q(t)X(t) + u^T(t)R(t)u(t)\} dt
 \tag{5-9-7}$$

达到极小的最佳控制矢量 $u^*(t)$ 为

$$u^*(t) = -A(t)X(t)
 \tag{5-9-8}$$

式中

$$\begin{cases}
 A(t) = R^{-1}(t)B(t)P(t) \\
 -\dot{P}(t) = P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) + Q(t)
 \end{cases}$$

而如果有线性系统数学模型

$$\dot{\hat{X}}(t) = A(t)X(t) \quad (5-9-10)$$

$$Y(t) = C(t)X(t) + V(t)$$

并且

$$\begin{aligned} E\{\omega(t)\} &= 0, \quad \text{COV}\{\omega(t), \omega(\tau)\} = E\{\omega(t)\omega^T(\tau)\} \\ &= Q(t)\delta(t-\tau); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\{V(t)\} &= 0, \quad \text{COV}\{V(t), V(\tau)\} = E\{V(t)V^T(\tau)\} \\ &= R(t)\delta(t-\tau); \end{aligned}$$

$$\text{COV}\{\omega(t), V(\tau)\} = 0, \quad \text{COV}\{X(0), \omega(t)\} = 0,$$

$$\text{COV}\{X(0), V(t)\} = 0;$$

$$\begin{aligned} E\{X(0)\} &= \bar{X}(0) = \mu_0, \quad \text{COV}\{X(0), X(0)\} \\ &= \text{Var}\{X(0)\} = P(0). \end{aligned}$$

时, 则使二次型性能指标

$$\begin{aligned} J &= E\{\tilde{X}^T(t)X(t)\} = E\{[X(t) - \hat{X}(t|t)]^T[X(t) - \hat{X}(t|t)]\} \\ & \quad (5-9-11) \end{aligned}$$

达到极小的状态矢量 $X(t)$ 的最佳估计 $\hat{X}(t|t)$ 为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}(t|t) &= A(t)\hat{X}(t|t) + K(t)\{Y(t) - C(t)\hat{X}(t|t)\} \\ & \quad (5-9-12) \end{aligned}$$

式中

$$K(t) = P(t, t)C^T(t)R^{-1}(t) \quad (5-9-13)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}(t, t) &= A(t)P(t, t) + P(t, t)A^T(t) \\ & \quad - P(t, t)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)P(t, t) + Q(t) \end{aligned}$$

在式(5-9-13)中,如果作如下面的代换

$$\begin{aligned} A(t) &\Rightarrow A^T(t) \\ C(t) &\Rightarrow B^T(t) \end{aligned} \quad (5-9-14)$$

则得

$$\begin{aligned} K^T(t) &= (R^{-1}(t))^T B^T(t) P^T(t, t) \\ \dot{P}^T(t) &= P^T(t, t) A(t) + A^T(t) P^T(t, t) \\ &\quad - P^T(t, t) B(t) (R^{-1}(t))^T B^T(t) P^T(t, t) \\ &\quad + Q^T(t) \end{aligned} \quad (5-9-15)$$

考虑到 $P(t, t)$ 是对称矩阵, $R^{-1}(t)$ 和 $Q(t)$ 也是对称矩阵, 则式(5-9-14)可改写成:

$$\begin{aligned} K^T(t) &= R^{-1}(t) B^T(t) P(t, t) ; \\ \dot{P}(t, t) &= P(t, t) A(t) + A^T(t) P(t, t) \\ &\quad - P(t, t) B(t) R^{-1}(t) B^T(t) P(t, t) + Q(t) \end{aligned} \quad (5-9-16)$$

比较式(5-9-9)和式(5-9-15)得:

$$\begin{aligned} K^T(t) &= \Lambda(t) ; \\ \dot{P}(t, t) &= -\dot{P}(t) \end{aligned} \quad (5-9-17)$$

由此可知,当具有代换关系(5-9-14)时,我们可由随机最佳估计问题的解,求得确定性最佳控制问题的解。这就是随机最佳估计和确定性最佳控制之间的对偶特性。

5-9-3 对偶系统和对偶原理

上述代换关系 (5-9-4) 和 (5-9-14)、以及

$\dot{P}(t, t) = -\dot{P}(t)$ 实际上是用系统

$$\dot{Z}(t) = -A^T(t)Z(t) - C^T(t)\xi(t) - \eta(t)$$

$$\eta(t) = B^T(t)Z(t) + m(t) + D^T(t)\xi(t)$$

(5-9-18)

代替了系统

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)u(t) + w(t)$$

$$Y(t) = C(t)X(t) + V(t) + D(t)u(t) \quad (5-9-19)$$

因为系统 (5-9-18) 是由系统 (5-9-19) 经过下面二个变化得到的：

(1) 用伴随自由系统代替原自由系统，即用

$$\dot{Z}(t) = -A^T(t)Z(t)$$

代换

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t)$$

(2) 互换轨入轨出约束，即用 $-C^T(t)$ 代替 $B(t)$ ，用 $B^T(t)$ 代换 $C(t)$ 。

系统 (5-9-18) 和 (5-9-19) 分别画在图 5-9-1 上。

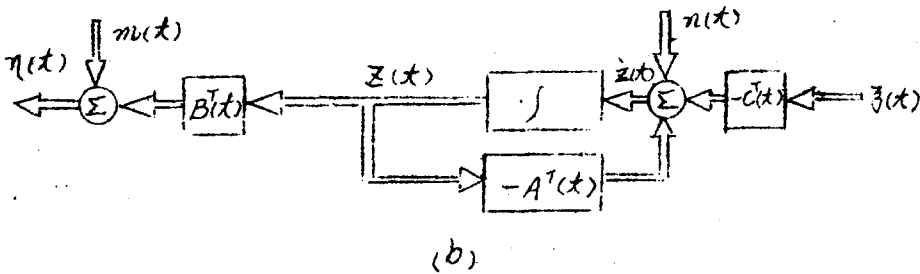
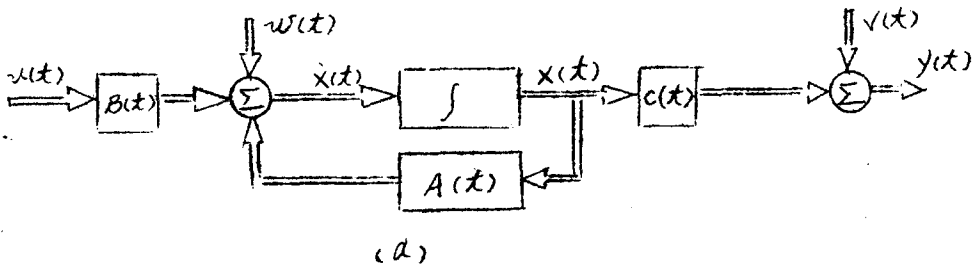


图 5-9-1: (a) 系统 (5-9-19),
(b) 系统 (5-9-18)

由图 5-9-1 可见, 系统 (5-9-18) 的结构图可由系统 (5-9-19) 的结构图互换所有轨入轨出, 倒转时间方向

($\dot{z}(t)$ 是负, 而 $\dot{x}(t)$ 是正) 而得到。系统 (5-9-18) 称为系统 (5-9-19) 的对偶系统。由对偶系统方程 (5-9-18) 可得到其转移矩阵为:

$$\Psi(t, t_0) = \Phi^T(t_0, t) \quad (5-9-20)$$

式中

$\Psi(t, t_0)$ 系统 (5-9-18) 转移矩阵;

$\Phi(t, t_0)$ 系统 (5-9-9) 转移矩阵。

由对偶系统的特点和式 (5-9-5) 和 (5-9-17) 可以

得到对偶原理：系统 (5-9-19) 为完全状态可观察 (可控) 的充要条件是其对偶系统 (5-9-18) 完全状态可控 (可观察) 的充要条件。也就是说，系统 (5-9-19) 为完全状态可观察 (可控) 的充要条件是：其对偶系统 (5-9-18) 为完全状态可控 (可观察) 的；确定性系统 (当系统 (5-9-19) 中 $w(t)$ 和 $v(t)$ 等于零时) 的最佳控制问题等价于它的对偶系统 (5-9-18) 的随机最佳估计问题。综上所述，线性系统的可观察性与可控性，估计与控制互为对偶。

上述对偶原理在设计系统时，与分解原理一起是很有用的。

5-9-4 线性系统的对偶关系式

线性系统的可观察性与可控性，估计与控制之间的对偶特性，可以由严格的数学关系式来描述的。当系统 (5-9-19) 和其对偶系统 (5-9-18) 的输入随机干扰 $w(t)$ 、 $n(t)$ 和观察误差 $v(t)$ 和 $m(t)$ 为零时，求它们状态矢量 $Z(t)$ 和 $X(t)$ 的内积对时间的导数得：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (Z(t), X(t)) &= \frac{d}{dt} \{Z^T(t)X(t)\} \\ &= \dot{Z}^T(t)X(t) + Z^T(t)\dot{X}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [-A^T(t)Z(t)]^T X(t) + Z^T(t)A(t)X(t) - \{C^T(t)\xi(t)\}^T X(t) \\
&\quad + Z^T(t)B(t)u(t) \\
&= -\xi^T(t)C(t)X(t) - \xi^T(t)D(t)u(t) + \xi^T(t)D(t)u(t) \\
&\quad + Z^T(t)B(t)u(t) \\
&= -\xi^T(t)\{C(t)X(t) + D(t)u(t)\} + \{D^T(t)\xi(t) \\
&\quad + B^T(t)Z(t)\}^T u(t) \\
&= -\xi^T(t) \cdot Y(t) + \eta^T(t)u(t) \qquad (5-9-21)
\end{aligned}$$

由此得：

$$Z^T(t_1)X(t_1) - Z^T(t_0)X(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \{\eta^T(t)u(t) - \xi^T(t)Y(t)\} dt \qquad (5-9-22)$$

关系式 (5-9-22) 是系统 (5-9-19) 和其对偶系统

(5-9-18) 之间存在的一个恒等关系，并称为系统

(5-9-19) 和其对偶系统 (5-9-18) 之间的对偶关系式。

上述线性系统的对偶特性，可用对偶关系式 (5-9-22) 直接推出，下面以可控性和可观察性之间的对偶特性为例说明。

设系统 (5-9-18) 是完全状态可控的，并设 $u(t) \equiv 0$ 则这时对偶关系式 (5-9-22) 就变为

$$Z^T(t_1)X(t_1) - Z^T(t_0)X(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} -\xi^T(t)Y(t)dt \quad (5-9-23)$$

由于假设系统(5-9-18)是完全状态可控的,因此总可选择合理的 $\xi^T(t)$,把给定的 $Z^T(t_0)$ 在时刻 t_1 引到原点,即使得 $Z(t_1) = 0$,设 n 个控制为 $\xi_1^T(t), \xi_2^T(t), \dots, \xi_n^T(t)$ 。并且 $\xi_i^T(t)$ 能把状态

$$\begin{cases} Z_{ij}^T(t_0) = \{Z_{i1}(t_0), Z_{i2}(t_0), \dots, Z_{in}(t_0)\} ; \\ Z_{ij}(t_0) = \delta_{ij} \end{cases} \quad (5-9-24)$$

引到零状态,即有

$$-Z_{ij}(t_0)X(t_0) = -\int_{t_0}^{t_1} \xi_i^T(t)Y(t)dt \quad (5-9-25)$$

再令

$$H(t) = \begin{bmatrix} \xi_1^T(t) \\ \xi_2^T(t) \\ \vdots \\ \xi_n^T(t) \end{bmatrix} \quad (5-9-26)$$

则得