代数

第一编

代数基础

(上册)

浙江省衢州师范学校·理科讲义

浙江省衢州师范学校理科讲义

代　　数

第一编

代数基础

（上册）

一九七八年二月

导　引

§1 逻辑

1° 概念

概念用词来表达——例如，实数a的绝对值。

概念用符号来表示——例如，$|a|$。

概念的含义用定义给出——例如，

$$|a|=\begin{cases} a\ (若\ a>0) \\ 0\ (若\ a=0) \\ -a\ (若\ a<0) \end{cases}$$

又如，非负数的非负方根，叫做算术根。

2° 判断（命题）

判断用句子来表达——例如，$\sqrt{2}$是无理数。

判断有真有假——例如，$\sqrt{2}$是无理数，是真判断；$\frac{22}{7}$是无理数，则是假判断。

判断的主要种类——直言判断，假言判断，选言判断。

直言判断：公式是"S是（不是）P"。例如，

单称的：$\frac{2}{3}$不是无理数；$\frac{22}{7}$不是无理数。

特称的：有些自然数是素数。

全称的：所有分数不是无理数。

假言判断：公式是"若A，则B"；"如果A，那么B"。例如，

如果$a=0$，那么$ab=0$。

如果$a>b$，那么$a-b>0$。

假言判断中，A所表示的判断叫做理由（条件，前件），B所表示的判断叫做推断（结果，后件）。

假言判断反映着对象间的条件关系。对象间的条件有三种：

(1) 充分条件。在有A必有B、无A未必无B（有之必然，无之未必不然）的情况下，A就是B的充分条件。

例如，$a=0$（A）是$ab=0$（B）的充分条件。

(2) 必要条件。在有A未必有B，无A必无B（有之未必然，无之必不然）的情况下，A就是B的必要条件。

例如，$ab=0$（A）是$a=0$（B）的必要条件。

(3)充分而且必要条件（充要条件）。在有A必有B，无A必无B（有之必然，无之必不然）的情况下，A是B的充分而且必要条件。

例如，$a>b$（A）是$a-b>0$（B）的充分而且必要条件。

若A是B的充分条件，记为 $A \Longrightarrow B$；

若A是B的必要条件，记为 $A \Longleftarrow B$；

若A是B的充要条件，记为 $A \Longleftrightarrow B$。

例如，可以写着：

$$a=0 \Longrightarrow ab=0;$$
$$ab=0 \Longleftarrow a=0$$
$$a>b \Longleftrightarrow a-b>0。$$

假言判断的重要特征是从理由到推断。因为作为推断的理由必须是充分的；必要条件不能作出推断；所以，假言判断的前件必须是后件的充分条件，或充分且必要条件。因此，假言判断只可能有两种，即充分条件的假言判断和充分而且必要条件的判断。

假言判断的真假并不取决于前件后件本身的真假，而取决于前件与后件之间是否存在着依赖关系，即它们之间有没有理由和推断的关系。有时前件和后件都是假的，但两者之间确实存在着依赖关系，因而整个假言判断则是真的。

例如，“如果$\sqrt{2}$是有理数，那么$\sqrt{2}=\frac{q}{p}$（p q是整数 $p\neq0$）。”这个假言判断的前后件都假，但整个判断真。这种判断是以某个不存在的条件作为理由，从而作出荒谬的推断，借以确定理由的虚假性。这种判断常用在反证，反驳中。

选言判断（不相容的选言判断）：公式是“或者A或者B…”“要么A要么B……”。例如，

这个数要么大于零，要么小于零，要么等于零。

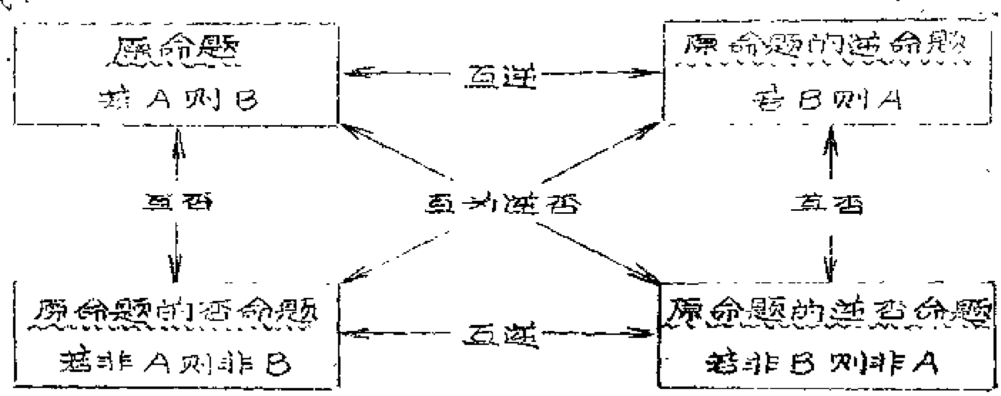
两个数a，b，或者$a>b$，或者$a<b$，或者$a=b$。

注意：这种判断反映几种不相容的属性，其中只有一种属性为某对象所具有。换言之，在这种判断中，各个选言肢（就是A、B、C…）是互相排斥的，不能同时为主词所表示的对象所具有。

一个真的判断（命题）可以称为公理、定理、推论。例如，

定理 若$ab=0$，则$a=0$或$b=0$。

假言判断（命题）"若A则B"可有四种互相联系着的变化形式：



原命题与其逆否命题同真或同假。

若原命题是充分而必要条件的判断，那么其四种形式同真。

3° 推理

推理是由一个或几个判断推出另一个判断的思维形式。

推理是由前提与结论组成的。前提是已知的作为推理出发点的判断；结论是由前提推出的判断。

推理必须合乎逻辑。

推理主要分为三类，即演绎推理，归纳推理，类比推理。

下面简述演绎推理的几种结构：

1. 三段论

三段论是由两个前提与一个结论构成的演绎推理。例如

无穷循环小数是有理数，	（大前提）	$M — P$
$2.3\dot{7}\dot{4}$ 是无穷循环小数，	（小前提）	$S — M$
所以，$2.3\dot{7}\dot{4}$ 是有理数。	（结　论）	$S — P$

在数学中，一般写成：

∵ $2.3\dot{7}\dot{4}$ 是无穷循环小数

∴ $2.3\dot{7}\dot{4}$ 是有理数（无穷循环小数是有理数）
（有时可省略）

再如，常用以下的形式：

$$(a+b)+(c+d)$$
$$=(a+b+c)+d$$ （加法结合律）

三段论的理论根据是：对一类事物有所肯定，则对该类事物中每一对象也有所肯定；对一类事物有所否定，则对该类事物中

每一对象也有所否定。这是三段论的公理。

2. 假言直言推理

一个前提是假言判断，而另一个前提与结论都是直言判断的推理，叫假言直言推理。例如，

如果 $a=0$，则 $ab=0$；	若 A，则 B
$a=x+(-x)=0$；	A；
所以，$[x+(-x)]b=0$。	所以，B。
	（肯定式）
一般简写成：	
$\because\ x+(-x)=0$，	若 A，则 B；
$\therefore\ [x+(-x)]b=0$。	非 B；
甚至就写成：	所以，非 A。
$[x+(-x)]b=0$。	（否定式）

3. 纯粹假言推理

两个前提与一个结论都是假言判断的推理，叫纯粹假言推理。例如，

若 $a=b$，则 $a^5=b^5$；	若 A，则 B；
若 $a^5=b^5$，则 $a^5-b^5=0$；	若 B，则 C；
所以，若 $a=b$，则 $a^5-b^5=0$。	所以，若 A，则 C。

4. 选言直言推理

第一个前提是选言判断，而第二个前提与结论是直言判断的推理，叫做选言直言推理。例如

一个数，或者是有理数，或者是无理数；

某数是无理数；（某数不是无理数）

所以，某数不是有理数。（所以，某数是有理数）

A 或是 B，或是 C，或是 D；	A 或是 B，或是 C，或是 D；
A 是 B	A 不是 C，也不是 D；
所以，A 不是 C，也不是 D。	所以，A 是 B。
（肯定否定式）	（否定肯定式）

又如，

两个实数 a, b，或者 $a>b$，或者 $a<b$，或者 $a=b$。

而 $a\neq b$，$a\not> b$；

所以 $a<b$。

4° 证明

证明是根据已知的真实判断来确定所要证明的判断的真实性的思维形式。

证明是由论题、论据、论证三部分构成的。

论题就是有待于证明其真实性的命题，它告诉我们要证明的是什么。

论据就是用来支持与证明论题的真实性的命题，也叫证明的理由与根据。

论证就是证明的方式。论证体现论据与论题之间的逻辑联系。论证是通过各种推理来实现的，推理的形式不同，证明的方式也就不同。推理有演绎的、归纳的、类比的，因而证明的方式也就有演绎的、归纳的与类比的。演绎的论证，就是运用一般原理论证某一特殊的判断的真实性。归纳的论证，是运用特殊的事实的判断来论证某一个一般原理的真实性。类比的论证就是用某一特殊事实的判断来论证另一特殊事实的判断的真实性。

证明可分为直接证明与间接证明两种。

1. 直接证明

直接证明就是从论据可以直接推出论题的真实性的证明。直接证明的结构是：

论题：A

证明：

因为 $a, b, c\cdots\cdots$（论据）是真实的，

并且从 $a, b, c\cdots\cdots$ 必然得出 A，

所以论题 A 是真实的。

例如，证明下述定理

定理　对于任意的整数 a、b、c，若 a 能被 b 整除；b 能被 c 整除，则 a 也能被 c 整除。

证明

∵ 若整数 a 能被整数 b 整除，则有整数 q，使 $a=bq$；

a 能被 b 整除；

∴ $a=bq$，（q 是整数）。

同理 $b=cq_2$（q_2 是整数）。

（以上是两个假言直言推理，第一个前提是论据之一）

$\left\{\begin{array}{l}\because \text{一个算式中的某一项可用其等项来替换；} \\ a=bq_1, \ b=cq_2; \\ \therefore a=(cq_2)q_1\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l}\because \text{乘法满足结合律；} \\ \therefore a=(cq_2)q_1=c(q_2q_1).\end{array}\right.$ （省略了一个前提）

$\left\{\begin{array}{l}\because \text{两整数之积仍是整数；} \\ \therefore q_2q_1 \text{是整数}\end{array}\right.$ （省略了一个前提）

$\left\{\begin{array}{l}\because \text{若对整数} a, b (b\neq 0)\text{，有整数} q \text{使} a=bq\text{，则称} a \text{能被} b \text{整除；} \\ a=c(q_2q_1), \ q_2q_1 \text{是整数；} \\ \therefore a \text{能被} c \text{整除。}\end{array}\right.$ 证完。

证明（略写式）

已知 $a \vdots b$，一定存在整数 q_1，使 $a=bq_1$，已知 $b \vdots c$，一定也存在整数 q_2，使 $b=cq_2$，所以 $a=bq_1=(cq_2)q_1=c(q_1q_2)$，而 q_1q_2 是整数，所以 $a \vdots c$。 证完。

2. 间接证明

间接证明是通过证明与原论题相排斥的论题虚假，来确定原论题真实的证明。这种证明有选言证法与反证法两种。

(1) 选言证法 —— 把被证明的论题看作是关于该问题可能成立的几个假定中的一个，然后根据论据驳倒其他各种假定，而只留下的那个被证明的论题没有被驳倒并且是驳不倒的，所以肯定它是真实的。结构是：

论题：A

证明：可能成立的假定有而且只有 A、B、C，

B 不能成立（因为……）

C 不能成立（因为……）

由于 B、C 不能成立，所以 A 成立。

例如，要证明 $x>0$，可驳倒 $x<0$、$x=0$。（具体参见第一章§7 中定理7的证明）

(2) 反证法 —— 先提出与原论题相矛盾的论题，接着证明这反论题是假的，然后根据排中律（两个互相矛盾的命题不能同时都假），从而推出原论题是真的。结构是：

论题：A

证明：设非A真。

若非A真，则推出a、b、c；

已知a、b、c不能成立，所以非A假；

既然非A假，所以A必然真。

例如，

论题：$\sqrt{2}$是无理数。

证明：

假设$\sqrt{2}$是有理数。

$\because$ $\sqrt{2}$是有理数

$\therefore$ $\sqrt{2}=\frac{q}{p}$（p、q是整数，$p\neq0$，$\frac{q}{p}$是既约分数）

$\therefore$ $2=\frac{q^2}{p^2}$，$2p^2=q^2$。

$\therefore$ q是偶数，令$q=2k$，则$2p^2=4k$，$p^2=2k$

$\therefore$ p也是偶数。

$\therefore$ p、q同时是偶数。

这是不可能成立的（因为$\frac{q}{p}$是既约分数）。

所以“$\sqrt{2}$是有理数”这个假设是错的（假的）。

因此，$\sqrt{2}$是无理数。证完。

实际上，直接证明与间接证明常常是结合运用的。例如，

定理　对于任意的整数a，b（$b\neq0$），一定存在也只存在一对整数q、r，使

$$a=bq+r\quad(0\leq r<|b|)$$

证明

1. 先证明当$b>0$时，定理成立。

(1) 先证明存在性：

对于整数a，b，且$b>0$，一定可以找到一个整数q，使

$$bq\leq a<b(q+1)。$$

（论据是阿基米德公理）

设　$a-bq=r$

则　$a=bq+r$

$\because$ $bq\leq a$

$\therefore$ $r\geq0$

假设 $r \geq b$。
设 $r-b=r' \geq 0$，则 $r=b+r'$，
于是 $a=bq+r=bq+b+r'=b(q+1)+r'$，
也就是 $a \geq b(q+1)$。这与 $a<b(q+1)$ 矛盾，故不可能。
因此，$r<b$。

(2) 再证明唯一性：

假设另外还有一对整数 q_1 和 r_1，使 $a=bq_1+r_1$ $(0 \leq r_1<|b|)$。
那么，$bq+r=bq_1+r_1$，即 $b(q-q_1)=r_1-r$。
因为 q 与 r，q_1 与 r_1 是不同的两对，
所以，或者 $q \neq q_1$，或者 $r \neq r_1$，至少要有一个成立。
若 $q \neq q_1$，则 $|q-q_1|>0$，于是 $|b(q-q_1)|=b|q-q_1|>b$。
而 $|r_1-r|<r<b$，这与 $b(q-q_1)=r_1-r$ 矛盾。故不可能。
若 $q=q_1$，则由 $b(q-q_1)=r_1-r$ 得 $r_1-r=0$，即 $r=r_1$，这与 $q \neq q_1$ 与 $r \neq r_1$ 至少要有一个成立相矛盾。故也不可能。
因此，假设错误，满足条件的 q 与 r 是唯一的。

（这个反证法又叫同一法，即所假设的"另外的 q_1 与 r_1"实际上就是原来的那对 q 与 r，是同一的。）

2. 再证明当 $b<0$ 时，定理也成立。

因为对于 a、$|b|$，由上所证，一定存在唯一的一对整数 q' 与 r，使

$$a=|b|q'+r \quad (0 \leq r<|b|).$$

此式即

$$a=b(-q')+r$$

设 $-q'=q$，就有

$$a=bq+r \quad (0 \leq r<|b|)$$

因为 q 是 q' 的相反数，是唯一的，所以这里的 q 与 r 也是唯一的。证完。

3. 因此，对任意整数 a，b $(b \neq 0)$，一定存在也只有存在一对整数 q、r，使

$$a=bq+r \quad (0 \leq r<|b|).$$

证完。

这是一个较复杂的证明的例子。总的来说，是一个完全归纳的推理，局部来看，有直接证明，有间接证明。

3 数学归纳法

证明一个与自然数有关的命题，常常要用数学归纳法。数学归纳法有两个互相联系缺一不可的步骤：

1° 先证明当命题中 n 取第一个自然数值 a（例如 $n=1$，或 $n=2$，等等）时，这个命题真。

2° 假定命题中 n 取自然数值 k 时这个命题真；在这个基础上证明命题中 n 取后一个自然数 $k+1$ 时，这个命题亦真。

在证明了这两步之后，就可以作出结论：命题对于从 a 开始的所有自然数 n 都真。

例如，

求证：若整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都能被 b 整除，则

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n) \vdots b$$

证明：

1° 先证 $n=2$ 时命题真。

$\because a_1 \vdots b$，$a_2 \vdots b$，

$\therefore a_1=bq_1$，$a_2=bq_2$ （q_1、q_2 是整数）

$\because a_1+a_2=bq_1+bq_2=b(q_1+q_2)$，$q_1+q_2$ 是整数，

$\therefore (a_1+a_2) \vdots b$．

2° 假设 $n=k$ 时命题真。即若 $a_1 \vdots b$，$a_2 \vdots b$，$\cdots$ $a_k \vdots b$，则

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k) \vdots b．$$

那末，有整数 q，使

$$a_1+a_2+\cdots+a_k=bq。$$

$\because a_{k+1} \vdots b$

$\therefore a_{k+1}=bq'$ （q' 是整数）

于是，

$$\begin{aligned} a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1} &= (a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1} \\ &= bq+bq' \\ &= b(q+q') \end{aligned}$$

所以，$(a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}) \vdots b$．

这就是说，当 $n=k+1$ 时命题亦真。

3° 由 1°，2° 所述，可知对任意自然数 n，命题都真。证完。

§2 集合

所谓事物 a（不是字母 a）就是指用 a 来表示的对象。$a=b$ 意味着：关于 a 成立的性质，对于 b 也成立，而关于 b 成立的性质，对于 a 亦成立。

所谓集合 A，是可以互相区别的事物的汇集。

构成集合 A 的事物 a，称为 A 的元素（元）。当事物属于集合 A 时，记为

$$a \in A,$$

否则，就用 $a \bar{\in} A$ 表示。

在集合论中，所有其他概念都可以由元素、集合和关系 $\in$ 引导出来。

如果集合 A 含有元素 $a, b, c, \cdots\cdots$，就记为

$$A=\{a, b, c, \cdots\cdots\}.$$

例如，

全体不大于20的自然数组成的集 A，可记为

$$A=\{1, 2, 3, \cdots\cdots, 20\};$$

全体自然数组成的集合 B，可记为

$$B=\{1, 2, 3, \cdots\cdots\};$$

全体实数组成的集合 C，可记为

$$C=\{全体实数\}.$$

当 $x \in A$ 时，称 x 为变元，A 称为 x 的变域。设 $P(x)$ 是一个关于 x 的命题，那么

$$M=\{x;\ x \in A;\ P(x)\}$$

就表示使命题 $P(x)$ 成立的所有属于 A 的 x 的全体。

例如，设 C 为实数集，则

$$D=\{x;\ x \in C,\ x \geq 5\}$$

就表示一切不小于5的实数所组成的集合。

$$E=\{x;\ x \in C,\ x^2-5x+6=0\}$$

就表示方程 $x^2-5x+6=0$ 的全体实数解的集合。显然 $E=\{2, 3\}$。

一个元素也没有的集合（应当认为是集合的一种），称为空集。空集用 $\varnothing$ 表示，在不至与数0混淆时，也用0表示空集。

例如，

$$F=\{x;\ x \in C,\ x^2+x+1=0\}=0.$$

设有两个集合A、B，如果A中的元与B中的元完全一致，也就是说：

$$a\in A \Longleftrightarrow a\in B$$

的时候，称A与B是相等的集合，记为

$$A=B.$$

设有两个集合A、B，如果A的所有元都是B的元，但至少有一个B的元不属于A，称A是B的真子集，或称B是A的真扩集。记为

$$A\subset B \quad 或 \quad B\supset A.$$

设有两个集合A、B，如果A的所有元都是B的元，也就是说

$$a\in A \Longrightarrow a\in B$$

的时候，称A是B的子集，或称B是A的扩集。记为

$$A\subseteq B \quad 或 \quad B\supseteq A.$$

显然，

$1°$ $A\subseteq B,\ B\subseteq A \Longleftrightarrow A=B$；

$2°$ $A=B,\ B=C \Longrightarrow A=C$；

$3°$ $A\subset B,\ B\subset C \Longrightarrow A\subset C$；

$4°$ $A\subset B,\ B=C \Longrightarrow A\subset C$。

注意，

$\{1,2,3\}\neq\{1,2,4\}$；

$\{1,2\}\not\subset\{1,3,4\}$；

$\{1,3,5,7,9,\cdots\}\subset\{1,2,3,4,5,\cdots\}$。

至少属于集合A与B之一的一切元素组成的集合S，称为A与B的并集。记为

$$S=A\cup B.$$

集合A与B的一切公共元素所组成的集合D，称为A与B的交集。记为

$$D=A\cap B.$$

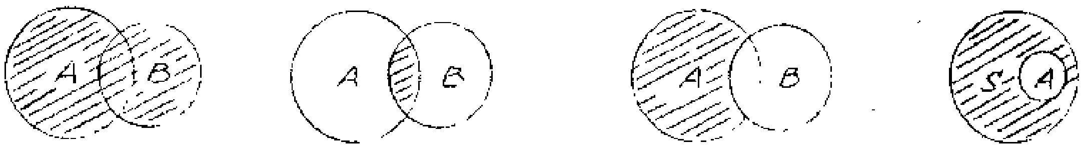
属于集A(但不属于集B)的一切元素组成的集合C，称为A与B的差集。记为

$$C=A-B.$$

若$S \supseteq A$，称S与A的差集$S-A$为A的（关于S的）补集。记为

$$\bar{A} = S - A$$

集合的运算可用下图说明：



$A \cup B$ $A \cap B$ $A-B$ $\bar{A}$

例如，$A=\{$全体有理数$\}$，$B=\{$全体无理数$\}$，那末

$A \cup B = \{$全体实数$\}$；

$A \cap B = 0$；

$A - B = \{$全体有理数$\}$；

再如，$A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{3, 4, 5, 6\}$，那末

$A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$；

$A \cap B=\{3, 4\}$，

$A-B=\{1, 2\}$。

再如，$S=\{$全体实数$\}$，$B=\{$全体无理数$\}$，那末

$\bar{B}=\{$全体有理数$\}$。

显然

1° 集合的并与交满足交换律、结合律、分配律、吸收律：

交换律：$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$；

结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$；

分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$；

吸收律 $(A \cup B) \cap A = A$，$(A \cap B) \cup A = A$。

2° 若$A \subseteq B$，则$A \cup B = B$，$A \cap B = A$。

特别，$0 \cup B = B$，$0 \cap B = 0$。

3° 若$S \supseteq A$，$S \supseteq B$，

则$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$，$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$，$\bar{\bar{A}} = A$；

$A \cup \bar{A} = S$，$A \cap \bar{A} = 0$。

证明两集相等，一般都用下述充分而必要的命题为主要论据。

若$A \subseteq B$且$B \subseteq A$，则$A = B$。

具体证法请参阅我校编辑出版的《中学数学参考》第六期《集合、对应集合上函数》一文。

§3 对应（函数．映象）

设A、B为两个集合，如果有一个方法（法则）f，对于集合A的任意一个元素a，能够按这个方法（法则）f，确定集合B中的唯一的一个元素b（与a对应），那么我们就把这个方法（法则）f叫做一个从A到B的对应（函数，映象）。记为

$$f:\quad a \longrightarrow b = f(a),$$

或记为
$$f:\quad A \longrightarrow B,$$

或记为
$$A \xrightarrow{f} B.$$

这里，f代表我们的方法（法则），也就是我们所说的对应。"$a \to b$"表示f对a这个元素所规定的值（是指广义的值，不是单指数值）是b。至于$f(a)$只是一个符号，我们用$f(a)$表示b，可以暗示，b是把f应用到a上所得的结果。

b称为a在对应f下的象；a称为b的原象。集A称为对应f的定义域；象的集合可记为

$$f(A) = \{f(a);\ a \in A\},$$

称为f的值域。一般来说，

$$f(A) \subseteq B.$$

例1．$A=\{$李红，王强，赵卫，朱庆，姚军$\}$，$B=\{$党员，团员，群众$\}$，那么，

f：李红→团员，王强→团，赵卫→党，朱庆→团，姚军→团

是一个从A到B的对应。

从这个例子中应当看出：

1° 不同的原象可以有相同的象；

2° B的某些元素可以不是象，或说集B的元素不一定要用光。

例2　$A=\{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$，$B=\{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$，那么

g：$a \longrightarrow a+1 = g(a)$　（即$1\to2$，$2\to3$，$3\to4$，$4\to5$，……）

是一个从A到B的对应。

从这个例子中应当看出：

1° 集A可以等于集B．

2° 在对应g下，不同的原象有不同的象。这样的对应叫做单调对应。

例3 $A=\{$一切实数$\}$，$B=\{0,1\}$，那末

φ： 有理数 $\longrightarrow 1$，无理数 $\longrightarrow 0$.

是一个从 A 到 B 的对应（称为 Dirichlet 函数）。

从这个例中应当看出：

1° 在对应的概念中，最本质的东西是对应法则（用 f, g, φ 表示），即揭示我们如何由原象来确定象的那个方法。至于这个方法是用解析式（公式）给出还是以其他什么方法给出，倒不是主要的；甚至，只要法则明确，即使不能为每个 a 具体指出其对应的象，也无关紧要。在本例中，因为我们还不知道 π^{π} 是不是无理数，所以也就不知道 $\varphi(\pi^{\pi})$ 到底是 1 还是 0。

2° 在这个对应 φ 下，集合 B 的元素被用得精光。换言之，B 的每个元都是象，或者说，φ 的值域等于 B。这样的对应，称为完全对应。

例4 $A=B=\{1,2,3,\cdots\cdots\}$，那么

f_1： $a \longrightarrow a-1$

不是一个从 A 到 B 的对应。因为法则 f_1 没有为 A 中的元素“1”确定 B 中的象。或说，A 中的 1 在 f_1 下没有象。这是不允许的。

例5 $A=B=\{$全体实数$\}$，那么

f_2： $a \longrightarrow a$ 的平方根

不是一个从 A 到 B 的对应。因为在 f_2 下，A 的元有的没有象，有的则有两个象。这也是不允许的。

例6 $A=B=\{$全体实数$\}$，那么

e： $a \longrightarrow a$

是一个从 A 到 B 的对应。在此，$A=B$，且对于所有 $a\in A$，都有 $e(a)=a$。我们把这种对应叫做集合上的恒等对应。

例7 $A=B=\{$全体实数$\}$，那么

t： $a \longrightarrow 5$

是一个从 A 到 B 的对应。在这个对应中，对于所有 $a\in A$，都有 $t(a)=5$（常值）。这种对应，叫做常值对应。

一般来说，在两个集合之间，可以建立各种各样的对应。有时，两个从 A 到 B 的对应，法则虽然不同，但它们对每一个元素所规定的值（象）却完全相同。例如：

$$A=B=\{1,2,3,\cdots\cdots\}$$
$$\varphi_1:\quad a\longrightarrow 1$$
$$\varphi_2\quad a\longrightarrow a^0$$

这里，φ_1与φ_2这两个法则本身并不相同，但它们的效果是相同的。我们关心的是效果，因此，一般来说，如果f_1与f_2是两个从A到B的对应，且对任意$a\in A$，有$f_1(a)=f_2(a)$，那么我们就说这两个对应是相等的，记为$f_1=f_2$。

例7　$A=\{$亮，不亮$\}$，$B=\{0,1\}$，那么

f：　亮$\longrightarrow 1$，不亮$\longrightarrow 0$.

是一个从A到B的对应。

这个例子中的对应f有下列两个特点：

1° f是单调对应——不同的原象有不同的象；

2° f是完全对应——B中的每一个元都是象。

同时具备这两个特点的从A到B的一个对应，我们称为一个A与B间的一一对应。

一一对应有以下的重要性质：

一个A与B间的一一对应，一定带来一个B与A间的一一对应。

事实上，若 $f: a\longrightarrow b$ 是一个A与B间的一一对应，那末，每个b都有唯一的原象a，于是我们就可以这样来规定一个B与A间的一一对应 $f^{-1}: b=f(a)\longrightarrow a$.

例如，对于例7中的f，只要规定：

f^{-1}：　$1\longrightarrow$亮，$0\longrightarrow$不亮.

就可以了。这样规定的f^{-1}，称为f的逆对应。

注意：对于例7，也可以规定一个B与A间的一一对应：

f_1^{-1}：　$1\longrightarrow$不亮，$0\longrightarrow$亮

但是，它不能叫做是f的逆对应，而是

f_1：　不亮$\longrightarrow 1$，亮$\longrightarrow 0$

的逆对应。由此可见，一个一一对应的逆对应，一定要"原路对回去"。

这样，一一对应f与f^{-1}正象作用力与反作用力一样，永远同时存在。因此，一个A与B间的一一对应f，也常记为

$$f:\ a\longleftrightarrow b\quad (A\xleftrightarrow{f}B).$$