大專・高中新數學叢書⑨

新課程

方程式與不等式

東京教育大教授・理博 茂木 勇 原著
嚴 水 謨 編譯

晨光出版社

方程式・不等式的

◇方程式 $ax+b=0$的解◇

$a \neq 0$ 時 $x=-\dfrac{b}{a}$，$a=0$，$b=0$ 時不定

$a=0$，$b \neq 0$ 時　無意義

◇二次方程式$ax^2+bx+c=0$（$a \neq 0$）◇

解的公式　$x=\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

根與係數的關係　$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

判別式　$D=b^2-4ac$

兩根都是正 $\rightleftarrows$ $D \geq 0$，$\alpha+\beta>0$，$\alpha\beta>0$

兩根都是負 $\rightleftarrows$ $D \geq 0$，$\alpha+\beta<0$，$\alpha\beta>0$

一根正，另一根負 $\rightleftarrows$ $\alpha\beta<0$

◇ $ax^2+bx+c=0$（$a \neq 0$）的解的判別（$D=b^2-4ac$）◇

$D>0$ $\rightleftarrows$ 實數根，$D=0$ $\rightleftarrows$ 重根，$D<0$ $\rightleftarrows$ 虛根

◇必要，充分，充要◇

A $\rightarrow$ B是眞 $\Rightarrow$ B是A的必要條件，A是B的充分條件

A $\rightleftarrows$ B是眞 $\Rightarrow$ A(B)是B(A)的充要條件

◇恒等式◇

$ax+b=0 \rightleftarrows a=0$，$b=0$

$ax+b=a'x+b' \rightleftarrows a=a'$，$b=b'$

$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n$

$\rightleftarrows a_0=b_0$，$a_1=b_1$，……，$a_n=b_n$

重要事項一覽表 I

◇剩餘定理◇

整式 $f(x)$ 除以 $x-\alpha$ 時，餘式爲 $f(\alpha)$

整式 $f(x)$ 除以 $ax+b$（$a\neq 0$）時，餘式爲 $f(-\dfrac{b}{a})$

◇因式定理◇

整式 $f(x)$ 有 $x-\alpha$ 的因式 $\rightleftarrows f(\alpha)=0$

◇相反方程式 $ax^n+bx^{n-1}+\cdots+bx+a=0$（$a\neq 0$）◇

n 是奇數（奇數次）時， $x=-1$ 是一根

n 是偶數（偶數次）時， 令 $x+\dfrac{1}{x}=y$

◇三次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$（$a\neq 0$）的根 α,β,γ ◇

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

◇ $AB=0$，$C=0$ 的解 ◇

$AB=0$，$C=0 \rightleftarrows A=0$，$C=0$ 或 $B=0$，$C=0$

◇方程式的同値◇

$\{x \mid f(x)=0\}=\{x \mid g(x)=0\}$ 時

$f(x)=0$ 和 $g(x)=0$ 同値

$A+B\neq 0$，$C\neq 0$ 時 $A^2=B^2$ 和 $AC=BC$ 是同値

◇無理方程式◇

$\sqrt{P}=Q$ 的解 $\rightleftarrows P=Q^2$ 的解中，可滿足

$\sqrt{P}=Q$ 者，是解。

方程式・不等式的重

◇不等式 $ax+b>0$ 的解◇

$a>0$ 時 $x>-\dfrac{b}{a}$，$a<0$ 時 $x<-\dfrac{b}{a}$

$a=0$，$b>0$ 時 x 是所有實數

$a=0$，$b<0$ 時 無解

◇二次不等式的解◇

$(x-\alpha)(x-\beta)>0$ $(\alpha<\beta)$的解爲 $x<\alpha$，$x>\beta$

$(x-\alpha)(x-\beta)<0$ $(\alpha<\beta)$的解爲 $\alpha<x<\beta$

◇高次不等式◇

分解 $f(x)$ 以研討符號

$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$，$(\alpha<\beta<\gamma)$的符號爲；

$\alpha<x<\beta$，$\gamma<x$ 時 正(+)

$x<\alpha$，$\beta<x<\gamma$ 時 負(−)

◇分式不等式◇

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}>0 \rightleftarrows P(x)Q(x)>0$

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}\geq 0 \rightleftarrows P(x)Q(x)\geq 0$，$Q(x)\neq 0$

◇無理不等式◇

$P(x)<\sqrt{Q(x)} \rightleftarrows P(x)\geq 0$，$Q(x)>0$，$\{P(x)\}^2<Q(x)$

的解與 $P(x)<0$，$Q(x)>0$ 的解合併。

$P(x)>\sqrt{Q(x)} \rightleftarrows P(x)>0$，$\{P(x)\}^2>Q(x)\geq 0$

要事項一覽表 II

◇不等式的證明法◇

$A > B \rightleftarrows A - B > 0$

◇假設的用法◇

$a > b \rightleftarrows a = b + d, d > 0$

◇相加・相乘平均（算術・幾何平均）的關係◇

$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

$\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots\cdots a_n}$

但文字都是正，等號是均相等時成立。

◇三角不等式◇

$|a| - |b| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$

◇定符號的二次函數◇

$a \neq 0$ 時　$ax^2 + bx + c > 0 \rightleftarrows a > 0, b^2 - 4ac < 0$

◇柯西不等式◇

$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$

$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$

$\quad > (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots\cdots + a_n b_n)^2$

◇Chebicu 不等式◇

$a \geq b \geq c$, $x \geq y > z$ 時 $\dfrac{ax + by + cz}{3} \geq \dfrac{a+b+c}{3} \cdot \dfrac{x+y+z}{3}$

編輯大意

此次，高級中學學習指導要領的改訂，使得高中數學的內容也隨之改變。方程式與不等式繼以前的內容編入數學 I 內，但其處理方法多少與前相異。在國中已學過的數的集合之構造與性質，有關這方面的指導已有了。方程式與不等式從數的集合取出其部份集合來作爲條件式，已統一方法指導之。在高中，繼以前的內容，方程式與不等式的基本概念以及解法的原理均已加深，其目的在於培養活用的能力。但，舊的指導要領中，分數方程式，無理方程式，分數不等式，無理不等式均省略，再者，其處理問題之程序也稍降低了一點。此次，在數學III的內容而言，在討論利用微分法及積分法的分數函數及無理函數時，恐怕會感到困難。

本書中，對上列所提之各項目均作※的記號，又問題也比教科書深，關於方程式及不等式。

以解法與原理容易了解，愈來愈深，愈來愈廣，以及養成論證的能力爲宗旨。使不精於數學者能克服其困難，精於數學者更加精通。關於數學 I 的方程式與不等式，擴展問題及應用問題範圍較廣，由容易到困難的問題均收編於內，故做爲入學考試的參考書最適當不過的。

本書各項目均由

解說→例題→擴展問題→習題四者反覆演練，能一步一步地培養出實力，是爲本書之特點。深信讀者諸君若能活用本書，實力必能倍增無疑。

原著者

前　言

在編輯大意裡已提到過，本書對於不擅長於數學者亦能充分了解，精於數學者更能漸漸培養出深厚的興趣來。本書爲具有此種特色之參考書，因此本書有下列各項之特點。

■　小項目主義

各分門別類儘可能採用小項目。使該學習之處一目瞭然，本書之說明一面符合教科書，同時

愈來愈廣，愈來愈深，也愈來愈容易了解。

說明終了，附有「精粹」一欄，爲重要公式之總彙集，學習重點均列記於此，使讀者更能倍增學習之効率。

■　例題→擴展問題→習題

說明若能了解，再由例題，擴展問題，習題三者

反覆學習，不知不覺地實力就會增強。

此精巧微妙之處，實爲本書最大之特長。由例題→擴展問題的順序，內容逐漸加深，但在「解法」「要點」欄裏對於問題的思考方法及解答要領均有指示，希望讀者對此兩種問題，能反覆演練，務其達於近乎記憶之程度。總之，數學的學習是

一步一步地累積上去的。

因此，特別推薦此種反覆學習的方法。若例題，擴展問題兩者已充分了解，則對於「習題」將能駕輕就熟。反之，若對「習題」感到困難，則表示前面的學習並未全盤了解。

■　練習問題

分爲A、B兩階段。A部分相當於例題，擴展問題的程度，B部分包含有較深的問題。大學聯考對於此種程度的問題出題率最高，故此爲有志於投考大學諸君不可或缺的問題集。

雖有人常說，學習數學不能靠記憶，但這是沒有將問題的思考方法同時記憶所致。本書不是僅僅介紹記憶的方法，而是針對「數學原來是這樣去思考的」給予讀者適當的指導，然後推薦應用廣泛的記憶方法。深信擁有本書之讀者諸君，必能眞正地理解數學，同時增強數學的應用實力。

目 次

重要名詞一覽表

1.複　數

係數爲實數的x的二次方程式，例如

$$x^2 = 4\ ,\quad x^2 = 3$$

中，其解分別爲± 2，$\pm\sqrt{3}$，可是，

若　　　$x^2 = -1\ ,\quad x^2 = -3$

的情形，不論x爲何種實數$x^2 \geq 0$，故可滿足該等式的實數x始終不存在，換言之，此等方程式沒有實數範圍的解。

一般而言，$k > 0$時$-k < 0$，故二次方程式

$$x^2 = -k \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

在實數範圍內無解。

數的擴張　但是，我們將所有有理數的集合Q的範圍內無解的方程式，例如$x^2 = 3$等，可將其範圍擴張至所有實數的集合R以求解（本問題已於國中三年級學過）

要解方程式①，有①式無解及有解的兩種情形，數學將基於後者引導新數，使①式的方程式亦有解的新過程。

虛數的引導

(1)　平方等於-1的新數，將此新數表示，

即　　　$i^2 = -1$

(2)　含有i的式的計算，將i當做普通文字處置，若i^2出現則用-1代替。

$\boxed{\text{注 意}}$　$k > 0$時，$x^2 = k$的兩根，用$\pm\sqrt{k}$表示，引導複數即方程式①亦有兩根，而記作$\pm\sqrt{-k}$，此問題將於第17頁詳述之。

根號規則　(3)　$k > 0$時　$\sqrt{-k} = \sqrt{k}\, i$

虛數單位　此i叫做虛數單位。

集合　$C=\{\alpha \mid \alpha=a+bi,\ a,\ b\text{ 是實數}\}$

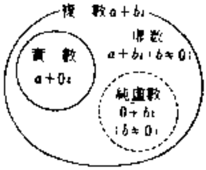
複數

所屬的數，叫做複數。

於複數 $a+bi$ 中，若 $b=0$ 則 $a+0i=a$，而是實數，故若設所有實數的集合為 R 時，

$$R\subset C$$

可成立。又複數 $a+bi$ 中若 $b\neq 0$，則叫做虛數。又 $0+bi=bi$（$b\neq 0$）叫做純虛數，例如 $1+2i$ 是虛數，$-2i$ 叫做純虛數。



實部・虛部

複數 $a+bi$ 中，a 叫做實部，b 叫做虛部。

又複數 $a-bi$ 叫做 $a+bi$ 的共軛複數，記做 $\overline{a+bi}$

虛數單位 i 和其計算的性質，由(1)，(2)任意兩個複數的和，差，積，商（但商時，除數 $\neq 0$）亦是複數，即

所有複數的集合對於四則運算有封閉性

複數的相等

兩個複數 $\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$ 中，限於

$$a=c \quad \text{且} \quad b=d$$

時相等，即

$$a+bi=c+di \Longleftrightarrow a=c \quad \text{且} \quad b=d$$

● 精　粹 ●

(1)　虛數單位 i；$i^2=-1$

(2)　i 式的計算：將 i 當作普通文字計算，i^2 用 -1 替代。

(3)　$\sqrt{-k}=\sqrt{k}\,i$（$k>0$）

(4)　數的體系

$$\text{複數 } a+bi\begin{cases}\text{實數}\quad a+0i\ (=a)\begin{cases}\text{有理數}\\ \text{無理數}\end{cases}\\ \text{虛數}\quad a+bi\ (b\neq 0)\end{cases}$$

例題 1. 計算下列各式

(1) $(3-i)+(-4+5i)$ (2) $(5-6i)-(-2+3i)$

(3) $(3+5i)(-3+4i)$ (4) $\dfrac{1+i}{1-i}$

(5) $\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3$ (6) $(a+bi)(a-bi)$

解法 (3) 去括弧，將 i^2 寫成 -1

(4) 分母，分子乘以 $1+i$。

(5) 用 $\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3=\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2\cdot\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)$ 計算。

解答 (1) $(3-i)+(-4+5i)=3+(-4)+(-1+5)i=-1+4i$

(2) $(5-6i)-(-2+3i)=5-(-2)+(-6-3)i=7-9i$

(3) $(3+5i)(-3+4i)=-9+20i^2+12i-15i=-29-3i$

(4) $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1+i^2+2i}{1-i^2}=\dfrac{1+(-1)+2i}{1-(-1)}=\dfrac{2i}{2}=i$

(5) $\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3=\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2\cdot\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)$

$=\dfrac{1+3i^2+2\sqrt{3}\,i}{2}\cdot\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}=\dfrac{-2+2\sqrt{3}\,i}{2}\cdot\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$

$=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\cdot\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}=\dfrac{1-3i^2}{4}=1$

(6) $(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$

例題 2. 計算下列各式

(1) $\sqrt{-1}+\sqrt{-4}$ (2) $(\sqrt{-2})^2$

(3) $(-\sqrt{-2})^2$ (4) $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$

解法 依根號規則將 $\sqrt{-k}$ 化爲 $\sqrt{k}\,i$ 計算之。

解答 (1) $\sqrt{-1}+\sqrt{-4}=i+2i=3i$

(2) $(\sqrt{-2})^2=(\sqrt{2}\,i)^2=(\sqrt{2})^2\,i^2=-2$

(3) $(-\sqrt{-2})^2=(-\sqrt{2}\,i)^2=(-\sqrt{2})^2\,i^2=-2$

(4) $\sqrt{-3}\sqrt{-12}=\sqrt{3}\,i\cdot\sqrt{12}\,i=\sqrt{3\times12}\,i^2=-6$

擴展問題

設 i 爲虛數單位，a，b，c，d 爲實數，試證下列各式：

(1) $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

(2) $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

(3) $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

(4) $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$（但 $c^2+d^2\neq 0$）

要點

(1)，(2) 當作 i 的一次式，加以整理

(3) 展開後 i^2 則 -1，然後依 i 整理。

(4) 分母，分子分別乘以 $c-di$

解答 (1) $(a+bi)+(c+di)$

$=a+c+(bi+di)=(a+c)+(b+d)i$

(2) $(a+bi)-(c+di)=a-c+(bi-di)$

$=(a-c)+(b-d)i$

(3) $(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2$

$=(ac-bd)+(ad+bc)i$

(4) $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$

$=\dfrac{ac-bdi^2+bci-adi}{c^2-d^2i^2}$

$=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

研　究 係數爲實數的 x 的整式 $f(x)$，$g(x)$ 及 $f(x)+g(x)$，$f(x)-g(x)$，$f(x)g(x)$ 用 x^2+1 除之，若其餘式分別爲 $a+bx$，$c+dx$，$A+Bx$，$C+Dx$，$E+Fx$ 時，

$(a+bi)+(c+di)=A+Bi$ ……………………①

$(a+bi)-(c+di)=C+Di$ ……………………②

$(a+bi)(c+di)=E+Fi$ ……………………③

可成立。其中，i 是虛數單位，則複數的和，差，積的計算與上式的餘式完全是同形。此可同剩餘定理的證明法。

習題　（解答在第 148 頁）

1. 將 $(5-2i)^2$，$\dfrac{2i}{3-i}$，$\dfrac{1}{i}$ 用 $a+bi$ 的形式表示之。

2. 設所有虛數及所有純虛數的集合爲 I，I_0，試證 $I_0\subset I$。

3. 試證上述〔研究〕①，②，③

例題 3. 設 a，b，c，d 是實數，i 是虛數單位

(1) 試證 $a+bi=0$ 能成立時，必限於 $a=0$ 且 $b=0$

(2) 試證兩個複數 $\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$ 中可成立 $\alpha=\beta$，必限於 $a=c$ 且 $b=d$

解法　(1) 欲證，若 $a+bi=0$ 則 $a=0$ 且 $b=0$，應先證 $b=0$。這時只要證明 $b\neq0$ 為不合理即可，之後則得求出 $a=0$。又 $a=0$ 且 $b=0$ 時，不可忘記 $a+bi=0$。

(2) 由 $\alpha=\beta$ 引導 $\alpha-\beta=0$ 而後利用(1)的結果。

解答　(1) 設 $a+bi=0$，若 $b\neq0$

則　$bi=-a$

用　$b(\neq0)$ 除之　$i=-\dfrac{a}{b}$

兩邊平方　$(-\dfrac{a}{b})^2=i^2=-1$

因 a，b 都是實數故 $(-\dfrac{a}{b})^2\geq0$，但 $-1<0$，故不合理。

故　$b=0$

又　$a+bi=0$　故　$a=0+0i=0$

$\therefore\ a=0$　且　$b=0$

反之，若　$a=0$　且　$b=0$

則　$a+bi=0+0i=0$

(2) 由 $\alpha=\beta$ 得 $\alpha-\beta=(a-c)+(b-d)i=0$

由(1)的結果　$a-c=0$　且　$b-d=0$

$\therefore\ a=c$　且　$b=d$　（其反計算亦可成立）

故如題意。