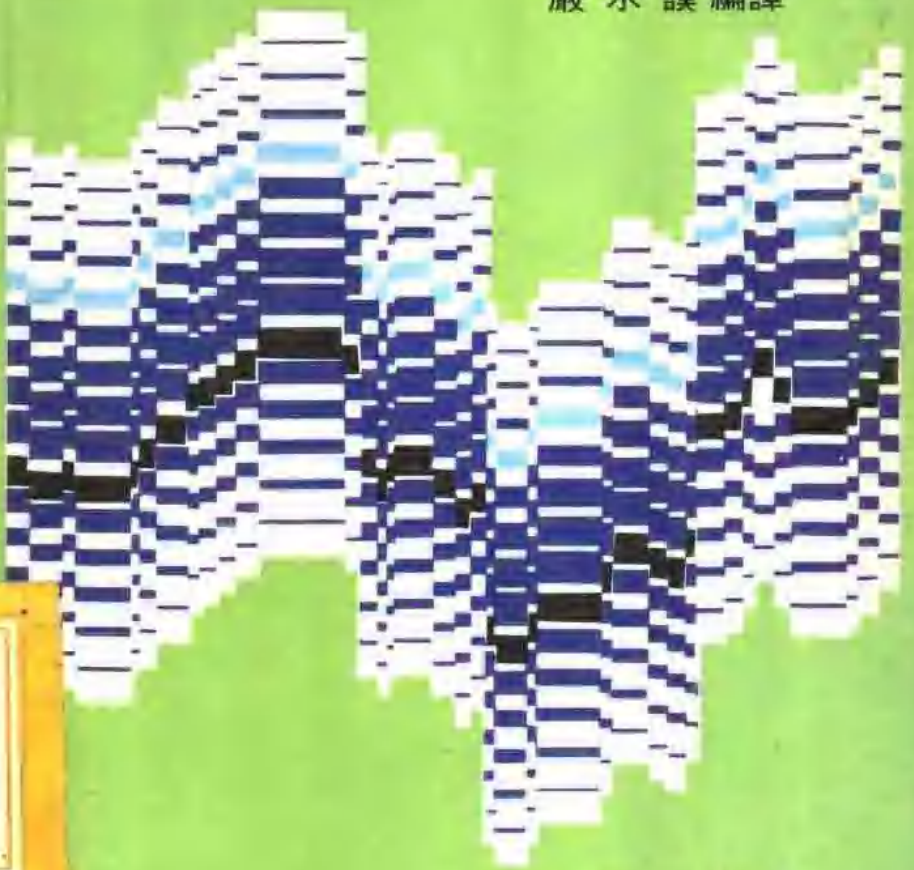


大專・高中新數學叢書⑨

新課程

方程式與不等式

東京教育大教授・理博 茂木 勇 原著
嚴 水 謨 編譯



晨光出版社

方程式・不等式的

◇方程式 $ax+b=0$ 的解◇

$a \neq 0$ 時 $x = -\frac{b}{a}$, $a=0, b=0$ 時不定

$a=0, b \neq 0$ 時 無意義

◇二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) ◇

解的公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

根與係數的關係 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

判別式 $D = b^2 - 4ac$

兩根都是正 $\Leftrightarrow D \geq 0, \alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0$

兩根都是負 $\Leftrightarrow D \geq 0, \alpha + \beta < 0, \alpha\beta > 0$

一根正, 另一根負 $\Leftrightarrow \alpha\beta < 0$

◇ $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的解的判別 ($D = b^2 - 4ac$) ◇

$D \geq 0 \Leftrightarrow$ 實數根, $D = 0 \Leftrightarrow$ 重根, $D < 0 \Leftrightarrow$ 虛根

◇必要, 充分, 充要◇

$A \rightarrow B$ 是真 $\Leftrightarrow B$ 是 A 的必要條件, A 是 B 的充分條件

$A \Leftrightarrow B$ 是真 $\Leftrightarrow A(B)$ 是 $B(A)$ 的充要條件

◇恒等式◇

$ax+b \equiv 0 \Leftrightarrow a=0, b=0$

$ax+b = a'x+b' \Leftrightarrow a=a', b=b'$

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n$

$\Leftrightarrow a_0=b_0, a_1=b_1, \dots, a_n=b_n$

重要事項一覽表 I

◇剩餘定理◇

整式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 時，餘式為 $f(a)$

整式 $f(x)$ 除以 $ax+b$ ($a \neq 0$) 時，餘式為 $f(-\frac{b}{a})$

◇因式定理◇

整式 $f(x)$ 有 $x-a$ 的因式 $\Leftrightarrow f(a)=0$

◇相反方程式 $ax^n + bx^{n-1} + \cdots + bx + a = 0$ ($a \neq 0$) ◇

n 是奇數 (奇數次) 時， $x=-1$ 是一根

n 是偶數 (偶數次) 時，令 $x+\frac{1}{x}=y$

◇三次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$) 的根 α, β, γ ◇

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \quad \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = \frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

◇ $AB=0, C=0$ 的解 ◇

$$AB=0, C=0 \Leftrightarrow A=0, C=0 \text{ 或 } B=0, C=0$$

◇方程式的同值◇

$$\{x \mid f(x)=0\} = \{x \mid g(x)=0\} \text{ 時}$$

$f(x)=0$ 和 $g(x)=0$ 同值

$A+B \neq 0, C \neq 0$ 時 $A^2=B^2$ 和 $AC=BC$ 是同值

◇無理方程式◇

$\sqrt{P}=Q$ 的解 $\Leftrightarrow P=Q^2$ 的解中，可滿足

$\sqrt{P}=Q$ 者，是解。

方程式・不等式的重

◇不等式 $ax + b > 0$ 的解◇

$$a > 0 \text{ 時 } x > -\frac{b}{a}, a < 0 \text{ 時 } x < -\frac{b}{a}$$

$a = 0, b > 0$ 時 x 是所有實數

$a = 0, b < 0$ 時 無解

◇二次不等式的解◇

$$(x - \alpha)(x - \beta) > 0 \quad (\alpha < \beta) \text{ 的解爲 } x < \alpha, x > \beta$$

$$(x - \alpha)(x - \beta) < 0 \quad (\alpha < \beta) \text{ 的解爲 } \alpha < x < \beta$$

◇高次不等式◇

分解 $f(x)$ 以研討符號

$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma), (\alpha < \beta < \gamma)$ 的符號爲：

$\alpha < x < \beta, \gamma < x$ 時 正 (+)

$x < \alpha, \beta < x < \gamma$ 時 負 (-)

◇分式不等式◇

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x)Q(x) > 0$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x)Q(x) > 0, Q(x) \neq 0$$

◇無理不等式◇

$P(x) < \sqrt{Q(x)} \Leftrightarrow P(x) \geq 0, Q(x) \geq 0, \{P(x)\}^2 < Q(x)$
的解與 $P(x) < 0, Q(x) > 0$ 的解合併。

$$P(x) > \sqrt{Q(x)} \Leftrightarrow P(x) > 0, \{P(x)\}^2 > Q(x) \geq 0$$

要事項一覽表 II

◇不等式的證明法◇

$$A > B \Leftrightarrow A - B > 0$$

◇假設的用法◇

$$a > b \Leftrightarrow a = b + d, d > 0$$

◇相加・相乘 平均（算術・幾何平均）的關係◇

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

但文字都是正，等號是均相等時成立。

◇三角不等式◇

$$|a| - |b| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$$

◇定符號的二次函數◇

$$a \neq 0 \text{ 時 } ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow a > 0, b^2 - 4ac < 0$$

◇柯西不等式◇

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$$

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \\ > (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2$$

◇Chebicu 不等式◇

$$a \geq b \geq c, x \geq y \geq z \text{ 時 } \frac{ax+by+cz}{3} \geq \frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{x+y+z}{3}$$



專業中文圖書

- 批發出口 •
- 門市零售 •
- 外埠郵購 •



馬健記圖書發行公司

香港九龍旺角通菜街 103 號 電話：K 956689(批發) K 956685(門市)

THE GRAND CULTURAL SERVICE CO. 103, TUNG CHOI ST., KOWLOON, HONG KONG

英語進修教材

我們提供一系列，幫助您鍛鍊讀、寫、聽、講等能力的優良工具，
新法英語視聽教材之一（適合初學者）：

- 學習英語·基礎課程……………附錄音帶三卷……………H.K.\$ 70.00

新法英語視聽教材之二（適合初中程度）：

- 日用英語進階……………附錄音帶三卷……………H.K.\$ 70.00

新法英語視聽教材之三（適合高中以上程度）：

- 萬用英語 900句（修訂本全書五冊）……………附錄音帶六卷……………H.K.\$ 150.00

- 英語拼音練習……………附錄音帶二卷……………H.K.\$ 40.00

- 國際音標……………附錄音帶二卷……………H.K.\$ 40.00

- K K 音標入門……………附錄音帶一卷……………H.K.\$ 30.00

- 實用英語 300 句……………附錄音帶二卷……………H.K.\$ 40.00

- 貿易英語·會話句型……………附錄音帶二卷……………H.K.\$ 40.00

- 國際貿易·英語專集……………附錄音帶二卷……………H.K.\$ 40.00

- 托福聽力測驗……………附錄音帶四卷……………H.K.\$ 80.00

- 旅遊英語……………附錄音帶二卷……………H.K.\$ 40.00

- 英語會話教材……………附錄音帶一卷……………H.K.\$ 40.00

- 初初學·英語會話……………附錄音帶二卷……………H.K.\$ 40.00

- 成年人·學英語會話（初初學英語會話續篇）……………附錄音帶二卷……………H.K.\$ 40.00

- 商業英語·聽講專集……………附錄音帶二卷……………H.K.\$ 40.00

- 聽新聞·練聽力——英語聽力訓練……………附錄音帶二卷……………H.K.\$ 40.00

- 初級英語讀本……………附錄音帶一卷……………H.K.\$ 30.00

- 如何提進英文字彙能力（活用的字典）……………平裝·厚冊地球版……………H.K.\$ 25.00

- 如何提進英文字彙能力（有聲的英漢字典）……………附錄音帶八卷……………H.K.\$ 100.00

- 英語讀音教材……………附錄音帶五卷……………H.K.\$ 80.00

- 英漢求解·作文·例句·文法·釋義·五用辭典……………25開本精裝·鉅冊……………H.K.\$ 50.00

- 漢英·求解·名詞·釋義·成語·四用辭典……………32開本精裝·鉅冊……………H.K.\$ 45.00

（定價如有出入，當以各該書所訂為準）

MAS

天健出版公司榮譽發行

編輯大意

此次，高級中學學習指導要領的改訂，使得高中數學的內容也隨之改變。方程式與不等式篇以前的內容編入數學Ⅰ內，但其處理方法多少與前相異。在國中已學過的數的集合之構造與性質，有關這方面的指導已有了。方程式與不等式從數的集合取出其部份集合來作為條件式，已統一方法指導之。在高中，繼以前的內容，方程式與不等式的基本概念以及解法的原理均已加深，其目的在於培養活用的能力。但，舊的指導要領中，分數方程式，無理方程式，分數不等式，無理不等式均省略，再者，其處理問題之程序也稍嫌低了一點。此次，在數學Ⅲ的內容而言，在討論利用微分法及積分法的分數函數及無理函數時，恐怕會感到困難。

本書中，對上列所提之各項目均作※的記號，又問題也比教科書深，關於方程式及不等式。

以解法與原理容易了解，愈來愈深，愈來愈廣，以及養成論證的能力為宗旨。使不精於數學者能克服其困難，精於數學者更加精通。關於數學Ⅰ的方程式與不等式，擴展問題及應用問題範圍較廣，由容易到困難的問題均收編於內，故做為入學考試的參考書最適當不過的。

本書各項目均由

解說→例題→擴展問題→習題四者反覆演練，能一步一步地培養出實力，是為本書之特點。深信讀者諸君若能活用本書，實力必能倍增無疑。

原著者

前 言

在編輯大意裡已提到過，本書對於不擅長於數學者亦能充分了解，精於數學者更能漸漸培養出深厚的興趣來。本書為具有此種特色之參考書，因此本書有下列各項之特點。

圖 小項目主義

各分門別類儘可能採用小項目。使該學習之處一目瞭然，本書之說明一面符合教科書，同時

愈來愈廣，愈來愈深，也愈來愈容易了解。

說明終了，附有「精粹」一欄，為重要公式之總彙集，學習重點均列記於此，使讀者更能倍增學習之效率。

圖 例題→擴展問題→習題

說明若能了解，再由例題，擴展問題，習題三者

反覆學習，不知不覺地實力就會增強。

此精巧微妙之處，實為本書最大之特長。由例題→擴展問題的順序，內容逐漸加深，但在「解法」「要點」欄裏對於問題的思考方法及解答要領均有指示，希望讀者對此兩種問題，能反覆演練，務其達於近乎記憶之程度。總之，數學的學習是

一步一步地累積上去的。

因此，特別推薦此種反覆學習的方法。若例題，擴展問題兩者已充分了解，則對於「習題」將能駕輕就熟。反之，若對「習題」感到困難，則表示前面的學習並未全盤了解。

圖 練習問題

分為A、B兩階段。A部分相當於例題，擴展問題的程度，B部分包含有較深的問題。大學聯考對於此種程度的問題出題率最高，故此為有志於投考大學諸君不可或缺的問題集。

雖有人常說，學習數學不能靠記憶，但這是沒有將問題的思考方法同時記憶所致。本書不是僅僅介紹記憶的方法，而是針對「數學原來是這樣去思考的」給予讀者適當的指導，然後推薦應用廣泛的記憶方法。深信擁有本書之讀者諸君，必能真正地理解數學，同時增強數學的應用實力。

目次

編輯大意	1
前言	2
重要名詞一覽表	5
1. 複數	6
虛數的引導，根號的規則，複數，實部，虛部，複數的相等	
2. 複數的其他定義	12
複數，相等的定義，四則的定義，擴張原理，虛數單位	
3. 簡單二次方程式	16
恒等式，方程式與解，二次方程式的解，集合記號的使用，二項方程式，能因式分解的二次方程式	
4. 二次方程式的解的公式	20
5. 二次方程式的判別式	24
實數解，虛數解，重複解，判別式，係數是複數時	
6. 二次方程式的根與係數的關係	28
實係數時，依解的公式的根的和、積，根與係數的關係，複係數時，解的條件	
7. 二次方程式的根與係數關係的應用	34
二次三項式的因式分解，兩根為分數時，二變數的二次函數，二次方程式的作法， m ， n 是解的二次方程式	
8. 必要條件及充分條件	40
命題的真偽，命題之逆，必要條件，充分條件，充要條件，同值	
9. 恒等式	44
▶ 練習問題 (1 ~ 22)	48
10. 聯立二次方程式 (一次和二次的組合)	51
二元二次的解法，三元二次的解法	
11. 聯立二次方程式 (二次和二次的組合)	55
12. 因式定理	59
函數記號，除法性質，剩餘定理，剩餘定理另證，因式定理	
13. 高次方程式	64
整方程式，能因式分解者，利用因式定理，重複解	

4 目 次

14. 利用代換法解高次方程式	68
15. 三次方程式的根與係數的關係	72
16. 方程式的同值	76
方程式的同值, 同值的證明, 同值變形, 聯立方程式的同值	
17. 分式方程式, 無理方程式	80
▶ 練習問題 (23 ~ 40)	84
18. 不等式的基本性質	86
19. 一次不等式	90
不等式的解, 解與集合, 一次不等式, 和方程式的差異	
20. 二次不等式	94
二次不等式, 相異的解時, 符號表, 等根, 虛數根	
21. 高次不等式	98
高次不等式, 相異三根, 等根, 虛數根	
22. 分式不等式	102
23. 無理不等式	106
24. 圖形應用於不等式	110
25. 不等式應用於方程式	114
實數根虛數根的條件, 兩根為正, 兩根為負, 正根和負根的條件, 係數含有一次式的方程式	
▶ 練習問題 (41 ~ 53)	118
26. 不等式的證明	120
絕對不等式, 有條件的不等式, 假設的用法	
27. 利用函數的不等式證明	124
28. 相加平均, 相乘平均的大小關係	130
29. 各種絕對不等式	136
三角不等式, Chebichev 的不等式, 定符號的二次函數, Cauchy 的不等式	
30. 不等式應用於最大・最小值	142
相加, 相乘平均關係的應用, 判別式的應用, 最大值的記號	
▶ 練習問題 (54 ~ 69)	146
習題解答	148
練習問題解答	158
數 表	174

重要名詞一覽表

餘式定理	59	純虛數	7
一次不等式	90	有條件不等式	120
因式定理	60	剩餘定理	59
因式分解	36	真	40
n 乘根	122	整方程式	64
解(根)	16, 90	附絕對值的不等式	107, 111
根與係數的關係(2次)	28	絕對不等式	120, 136
根與係數的關係(3次)	72	遞增函數	124
解的公式	20	相加平均(算術平均)	130
解的符號	114	相乘平均(幾何平均)	130
假設	40	相等	7, 12
偽	40	相反方程式	68
逆	40	大小關係	86
逆命題	40	Chebichev 的不等式	136
共軛複數	7	調和平均	133
虛根	24	同值	41, 56, 76
虛數	6	同值變形	76
虛數解	24	二項方程式	17, 21
虛數單位	6, 13	二次不等式	94
虛部	7	二重根	65
結合法則	11	判別式	25
結論	40	反例	42
遞減函數	124	充要條件	41
交換法則	11	必要條件	41
高次不等式	98	複數	7, 12
高次方程式	64	符號法則	86
恒等式	16, 44	不等式	86
柯西不等式	138	不等式的解	90
根	16	不等式的基本性質	87
根號規則	6	分式不等式	102
三角不等式	136	分式方程式	80
三次方程式	72	分配律	11
三乘根	122	方程式	16
四則	12	未知數	16
實根	24	無理不等式	106, 111
實數解	24	無理方程式	81
實數解的符號	114	命題	40
實部	7	優函數	125
重根	18, 24	立方根	122
等根	18, 24, 65	聯立 n 元二次方程式	51
充分條件	41	聯立二次方程式	51, 55

1. 複 數

係數為實數的 x 的二次方程式，例如

$$x^2 = 4, \quad x^2 = 3$$

中，其解分別為 ± 2 ， $\pm \sqrt{3}$ ，可是，

若 $x^2 = -1$ ， $x^2 = -3$

的情形，不論 x 為何種實數 $x^2 \geq 0$ ，故可滿足該等式的實數 x 始終不存在，換言之，此等方程式沒有實數範圍的解。

一般而言， $k > 0$ 時 $-k < 0$ ，故二次方程式

$$x^2 = -k \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}$$

在實數範圍內無解。

數的擴張

但是，我們將所有有理數的集合 Q 的範圍內無解的方程式，例如 $x^2 = 3$ 等，可將其範圍擴張至所有實數的集合 R 以求解（本問題已於國中三年級學過）

要解方程式①，有①式無解及有解的兩種情形，數學將基於後者引導新數，使①式的方程式亦有解的新過程。

虛數的引

(1) 平方等於 -1 的新數，將此新數表示，

導

即 $i^2 = -1$

(2) 含有 i 的式的計算，將 i 當做普通文字處置，若 i^2 出現則用 -1 代替。

注意 $k > 0$ 時， $x^2 = k$ 的兩根，用 $\pm \sqrt{k}$ 表示，引導複數即

方程式①亦有兩根，而記作 $\pm \sqrt{-k}$ ，此問題將於第

17 頁詳述之。

根號規則

(3) $k > 0$ 時 $\sqrt{-k} = \sqrt{k} i$

虛數單位

此 i 叫做虛數單位。

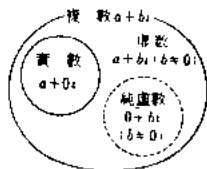
複數

集合 $C = \{ \alpha \mid \alpha = a + bi, a, b \text{ 是實數} \}$
 所屬的數，叫做複數。

於複數 $a + bi$ 中，若 $b = 0$ 則 $a + 0i = a$ ，而是實數，
 故若設所有實數的集合為 R 時，

$$R \subset C$$

可成立。又複數 $a + bi$ 中若 $b \neq 0$ ，
 則叫做虛數。又 $0 + bi = bi$ ($b \neq 0$)
) 叫做純虛數，例如 $1 + 2i$ 是虛數，
 $-2i$ 叫做純虛數。



實部・虛部

複數 $a + bi$ 中， a 叫做實部， b
 叫做虛部。

又複數 $a - bi$ 叫做 $a + bi$ 的共軛複數，記做 $\overline{a + bi}$
 虛數單位 i 和其計算的性質，由(1)，(2)任意兩個複數的和，
 差，積，商（但商時，除數 $\neq 0$ ）亦是複數，即

所有複數的集合對於四則運算有封閉性

複數的相等

兩個複數 $\alpha = a + bi$ ， $\beta = c + di$ 中，限於

$$a = c \quad \text{且} \quad b = d$$

時相等，即

$$a + bi = c + di \iff a = c \quad \text{且} \quad b = d$$

● 精 粹 ●

- (1) 虛數單位 i ； $i^2 = -1$
- (2) i 式的計算：將 i 當作普通文字計算， i^2 用 -1 替代。
- (3) $\sqrt{-k} = \sqrt{k}i$ ($k > 0$)
- (4) 數的體系

$$\text{複數 } a + bi \begin{cases} \text{實數} & a + 0i (= a) \\ \text{虛數} & a + bi \quad (b \neq 0) \end{cases} \begin{cases} \text{有理數} \\ \text{無理數} \end{cases}$$

例題 1. 計算下列各式

(1) $(3-i)+(-4+5i)$ (2) $(5-6i)-(-2+3i)$

(3) $(3+5i)(-3+4i)$ (4) $\frac{1+i}{1-i}$

(5) $(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})^3$ (6) $(a+bi)(a-bi)$

解法 (3) 去括弧，將 i^2 寫成 -1

(4) 分母，分子乘以 $1+i$ 。

(5) 用 $(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})^3 = (\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})^2 \cdot (\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})$ 計算。

解答 (1) $(3-i)+(-4+5i) = -1+4i$

(2) $(5-6i)-(-2+3i) = 5-(-2)+(-6-3)i = 7-9i$

(3) $(3+5i)(-3+4i) = -9+20i^2+12i-15i = -29-3i$

(4) $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i^2+2i}{1-i^2} = \frac{1+(-1)+2i}{1-(-1)} = \frac{2i}{2} = i$

(5) $(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})^3 = (\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})^2 \cdot (\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})$
 $= \frac{1+3i^2+2\sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = \frac{-2+2\sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$
 $= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = \frac{1-3i^2}{4} = 1$

(6) $(a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$

例題 2. 計算下列各式

(1) $\sqrt{-1} + \sqrt{-4}$ (2) $(\sqrt{-2})^2$

(3) $(-\sqrt{-2})^2$ (4) $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$

解法 依根號規則將 $\sqrt{-k}$ 化為 $\sqrt{k}i$ 計算之。

解答 (1) $\sqrt{-1} + \sqrt{-4} = i + 2i = 3i$

(2) $(\sqrt{-2})^2 = (\sqrt{2}i)^2 = (\sqrt{2})^2 i^2 = -2$

(3) $(-\sqrt{-2})^2 = (-\sqrt{2}i)^2 = (-\sqrt{2})^2 i^2 = -2$

(4) $\sqrt{-3}\sqrt{-12} = \sqrt{3}i \cdot \sqrt{12}i = \sqrt{3 \times 12} i^2 = -6$

擴展問題

設 i 為虛數單位, a, b, c, d 為實數, 試證下列各式:

$$(1) (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

$$(2) (a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$$

$$(3) (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

$$(4) \frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \quad (\text{但 } c^2+d^2 \neq 0)$$

要 點

(1), (2) 當作 i 的一次式, 加以整理

(3) 展開後 i^2 則 -1 , 然後依 i 整理。

(4) 分母, 分子分別乘以 $c-di$

解 答

$$(1) (a+bi) + (c+di)$$

$$= a+c + (bi+di) = (a+c) + (b+d)i$$

$$(2) (a+bi) - (c+di) = a-c + (bi-di)$$

$$= (a-c) + (b-d)i$$

$$(3) (a+bi)(c+di) = ac+adi+bc i+bdi^2$$

$$= (ac-bd) + (ad+bc)i$$

$$(4) \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$

$$= \frac{ac-bdi^2+bc i-adi}{c^2-d^2 i^2}$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

研 究 係數為實數的 x 的整式 $f(x), g(x)$ 及 $f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x)g(x)$ 用 x^2+1 除之, 若其餘式分別為 $a+bx, c+dx, A+Bx, C+Dx, E+Fx$ 時,

$$(a+bi) + (c+di) = A + Bi \cdots \cdots \cdots (1)$$

$$(a+bi) - (c+di) = C + Di \cdots \cdots \cdots (2)$$

$$(a+bi)(c+di) = E + Fi \cdots \cdots \cdots (3)$$

可成立。其中, i 是虛數單位, 則複數的和, 差, 積的計算與上式的餘式完全是同形。此可同剩餘定理的證明法。

習 題 (解答在第148頁)

1. 將 $(5-2i)^2, \frac{2i}{3-i}, \frac{1}{i}$ 用 $a+bi$ 的形式表示之。

2. 設所有虛數及所有純虛數的集合為 I, I_0 , 試證 $I_0 \subset I$ 。

3. 試證上[研究]①, ②, ③。

例題 3. 設 a, b, c, d 是實數, i 是虛數單位

- (1) 試證 $a + bi = 0$ 能成立時,
必限於 $a = 0$ 且 $b = 0$
- (2) 試證兩個複數 $\alpha = a + bi, \beta = c + di$ 中
可成立 $\alpha = \beta$,
必限於 $a = c$ 且 $b = d$

解法 (1) 欲證, 若 $a + bi = 0$ 則 $a = 0$ 且 $b = 0$, 應先證 $b = 0$ 。這時只要證明 $b \neq 0$ 為不合理即可, 之後則得求出 $a = 0$ 。又 $a = 0$ 且 $b = 0$ 時, 不可忘記 $a + bi = 0$ 。

(2) 由 $\alpha = \beta$ 引導 $\alpha - \beta = 0$ 而後利用(1)的結果。

解法 (1) 設 $a + bi = 0$, 若 $b \neq 0$

$$\text{則 } bi = -a$$

$$\text{用 } b (\neq 0) \text{ 除之 } i = -\frac{a}{b}$$

$$\text{兩邊平方 } \left(-\frac{a}{b}\right)^2 = i^2 = -1$$

因 a, b 都是實數故 $\left(-\frac{a}{b}\right)^2 \geq 0$, 但 $-1 < 0$, 故不合理。

$$\text{故 } b = 0$$

$$\text{又 } a + bi = 0 \quad \text{故 } a = 0 + 0i = 0$$

$$\therefore a = 0 \quad \text{且} \quad b = 0$$

反之, 若 $a = 0$ 且 $b = 0$

$$\text{則 } a + bi = 0 + 0i = 0$$

$$(2) \text{ 由 } \alpha = \beta \text{ 得 } \alpha - \beta = (a - c) + (b - d)i = 0$$

$$\text{由(1)的結果 } a - c = 0 \quad \text{且} \quad b - d = 0$$

$$\therefore a = c \quad \text{且} \quad b = d \quad (\text{其反計算亦可成立})$$

故如題意。