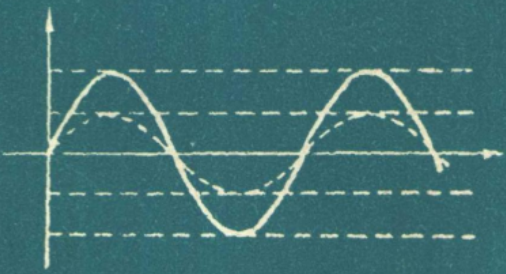
数学教学参考资料之三

平面三角题解集



扬州师范学院数学系
教学参考资料编写组

前　　言

生产的发展，推动了数学的发展。数学来源于实践，反过来又作用于实践。当前为了实现我国工业、农业、国防和科学技术的现代化，提高全民族的科学文化水平，学好数学基础知识和掌握好基本技能技巧，已成为大家迫切的愿望和自觉的要求了，广大数学教学工作者也正在积极地为搞好教学工作作出贡献。

我系部分教师正是应各方面的需要，在讲授相应课程的基础上，将积累的资料汇编成数学教学参考资料，互相交流学习，如能给使用者有所帮助，则不胜幸甚。

数学教学参考资料以中学数学解题为主，适当辅以基础知识，适用于中学数学教师和中学高年级学生参考。全书暂分《初等代数题解

集》，《初等几何证题集》，《平面三角题解集》，《解析几何题解集》，《中学数学综合题解》五册，分别印出，供内部参考。

《平面三角题解集》由高古风、高玉华等同志编写，内容分三角函数与加法定理、三角形、反三角函数与三角方程三个部分，所选题目，既注意到三角基础知识的应用，也注意解题技能的锻炼。

在编写过程中，由于时间匆促，仅就现有资料汇集而成，内容和类型自然不够全面，方法也不尽完美，请同志们批评指正。

数学教学参考资料编写组

1979.7.20

目　　录

平面三角内容提要

一、三角函数

1.同角的三角函数间的基本关系

（1）倒数关系： $\sin\alpha\operatorname{cosec}\alpha=1$，$\cos\alpha\sec\alpha=1$，$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=1$。

（2）商数关系： $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$。

（3）平方关系： $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha$，$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha$

2.特别角的三角函数

角 \ 函数	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	—

$\sin18^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$。

$\cos36^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$。

3.诱导公式

设α是任意角，n是整数：

（1）凡$2n\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha$的三角函数值等于$\alpha$的同名函数的

值，前面放上把α看作是锐角时，原来函数在相应象限内的符号。

凡$(2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha$的三角函数值等于α的相应余函数的值，前面放上把α看作锐角时，原来函数在相应象限内的符号。

4．三角函数的定义域和基本性质

函　数	定义域	奇偶性	最小正周期	递增区间	递减区间	有界性
$y=\sin x$	一切实数	奇	2π	$[-\frac{\pi}{2}+2n\pi, \frac{\pi}{2}+2n\pi]$	$[\frac{\pi}{2}+2n\pi, \frac{3\pi}{2}+2n\pi]$	有界
$y=\cos x$	一切实数	偶	2π	$[\pi+2n\pi, 2\pi+2n\pi]$	$[2n\pi, \pi+2n\pi]$	有界
$y=\mathrm{tg}\,x$	$x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$	奇	π	$(-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi)$	——	无界
$y=\mathrm{ctg}\,x$	$x\neq n\pi$	奇	π	——	$(n\pi, \pi+n\pi)$	无界

二、加法定理及其推论

1．加法定理

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$;

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$;

$$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta}{1\mp\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$$

2．倍角公式

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1; \\ \operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha; \\ \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha; \\ \operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha} \end{cases}$$

3．半角公式

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

4．和差化积与积化和差

$$\begin{cases} \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}; \\ \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}; \\ \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}; \\ \cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta); \\ 2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta); \\ 2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta); \\ 2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta). \end{cases}$$

5．经常用到的其他公式

（1）$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$;

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta.$$

（2） $\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

（3） 若令 $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=t$，则

$$\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{2t}{1-t^2}$$

这几个公式叫做“万能代换”公式

（4）若 $A+B+C=\pi$，则

$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C$；

$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C$；

$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$.

三、三角形的各元素间的关系

1．正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\text{（R是外接圆半径）}$$

2．余弦定理

$$\begin{cases}a^2=b^2+c^2-2bc\cos A;\\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B;\\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.\end{cases}$$

3．射影定理

$$\begin{cases}a=b\cos C+c\cos B;\\ b=c\cos A+a\cos C;\\ c=a\cos B+b\cos A.\end{cases}$$

4．正切定理

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)};$$

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B+C)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)};$$

$$\frac{c+a}{c-a}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(C+A)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(C-A)}.$$

5．半角公式

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\quad \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}},$$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}};$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},\quad \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}},$$

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a},\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{r}{s-b},\quad \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{s-c}.$$

(其中$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

是内切园半径)

6．面积公式

$$\triangle=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B;$$

$$\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=rs.$$

四、反三角函数与三角方程

1．反三角函数的概念

函　　数	定　　义	定义域	函数值域
$y=\arcsin x$	$\sin(\arcsin x)=x$	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$
$y=\arccos x$	$\cos(\arccos x)=x$	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$0\leqslant y\leqslant\pi$
$y=\mathrm{arctg}x$	$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}x)=x$	一切实数	$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$
$y=\mathrm{arcctg}x$	$\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}x)=x$	一切实数	$0<y<\pi$

2．最简三角方程的解

方　　程	有解的条件	方程的通解
$\sin x=c$	$\lvert c\rvert\leqslant 1$	$x=n\pi+(-1)^n\arcsin c$
$\cos x=c$	$\lvert c\rvert\leqslant 1$	$x=2n\pi\pm\arccos c$
$\mathrm{tg}\ x=c$	———	$x=n\pi+\mathrm{arctg}c$
$\mathrm{ctg}x=c$	———	$x=n\pi+\mathrm{arcctg}c$

五、平面三角解题的一般方法

1．关于证明三角恒等式

(1)由恒等式中较繁的一端化到较简单的一端，如果两端都较繁，可把两端都化成第三式。

(2)充分利用已知的恒等式。

(3)充分利用代数知识和代数方法，例如因式分解，合分比定理、配方法等等。

(4)把式中所有函数都化成正弦和余弦，然后再做，特

别注意$1=\sin^2x+\cos^2x$的运用。

（5）在证明三角形的边角之间的恒等式时，特别注意 $A+B+C=2\pi$，并充分利用几何知识。

（6）在证明反三角函数的恒等式时，首先应考虑等式两端的角是同在哪一个三角函数的某个单调区间，然后再考虑对两端施行这种三角运算的结果是否相同。

2．关于解三角方程

（1）把所给的方程归结为最简三角方程。

（2）充分利用解代数方程的知识。

（3）利用有理代换

1°利用“万能代换”公式

2°利用引入辅助角 $\phi=\mathrm{arctg}\dfrac{b}{a}$把$a\sin x+b\cos x$化成$\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\phi)$。

3°利用除以$\cos x$，把关于$\sin x$和$\cos x$的齐次方程化为$\mathrm{tg}\,x$的方程。

习 题 解 答

（一）三角函数与加法定理

1.证明： $$\frac{1+2\sin x\cos x}{\cos^2x-\sin^2x}=\frac{1+\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}x}$$

证： 由于 $1=\sin^2x+\cos^2x$，

$$\therefore\quad \frac{1+2\sin x\cos x}{\cos^2x-\sin^2x}=\frac{(\cos x+\sin x)^2}{\cos^2x-\sin^2x}$$

$$=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$$

$$=\frac{1+\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}x}$$

2.已知 $5\mathrm{tg}x+\sec x=5$，求$\cos x$

解： $$5\mathrm{tg}x=5-\sec x$$

$$\therefore\quad 25\mathrm{tg}^2x=(5-\sec x)^2$$

即 $$25(\sec^2x-1)=25-10\sec x+\sec^2x$$

$$\therefore\quad 24\sec^2x+10\sec x-50=0$$

即 $$12\sec^2x+5\sec x-25=0$$

$$\therefore\quad (3\sec x+5)(4\sec x-5)=0$$

$$\therefore\quad \sec x=-\frac{5}{3}\text{或}\frac{5}{4}$$

$$\therefore\quad \cos x=-\frac{3}{5}\text{或}\frac{4}{5}$$

3. 若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)>5$

证：

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)=1+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=1+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{2}{\sin2\alpha}$$

由于 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，故$0<2\alpha<\pi$

$\therefore$ $0<\sin\alpha<1$，$0<\cos\alpha<1$，$0<\sin2\alpha<1$

因而 $\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)>1+1+1+2=5$

4. 证明：

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\phi}+\frac{\sin\phi}{\cos\phi-\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta-\sin\phi}+\frac{\sin\phi}{\cos\phi+\sin\theta}$$

证：只须证明

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\phi}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta-\sin\phi}$$

$$=\frac{\sin\phi}{\cos\phi+\sin\theta}-\frac{\sin\phi}{\cos\phi-\sin\theta} \quad (1)$$

(1)式左边 $=\frac{-\sin\theta\cdot2\sin\phi}{\cos^2\theta-\sin^2\phi}$，

(1)式右边 $=\frac{-\sin\phi\cdot2\sin\theta}{\cos^2\phi-\sin^2\theta}$

上二式的分子相同而分母相等，故(1)式以立，从而所欲证的等式成立。

5.设： $$\frac{\cos^3\theta}{\cos\alpha}+\frac{\sin^3\theta}{\sin\alpha}=1,$$ 证明

$$\frac{\cos^2\theta+\cos\theta\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\theta}=\frac{\sin^2\theta+\sin\theta\sin\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}$$

证： 令 $1=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$，则

$$\frac{\cos^3\theta}{\cos\alpha}+\frac{\sin^3\theta}{\sin\alpha}=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$$

由此得：

$$\sin\alpha(\cos^3\theta-\cos^3\alpha)=\cos\alpha(\sin^3\alpha-\sin^3\theta) \qquad (1)$$

再令 $1=\cos^2\theta+\sin^2\theta$，得

$$\sin\alpha\cos^2\theta(\cos\theta-\cos\alpha)=\cos\alpha\sin^2\theta(\sin\alpha-\sin\theta) \quad (2)$$

$(1)\div(2)$，得：

$$\frac{\cos^2\theta+\cos\theta\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\theta}=\frac{\sin^2\theta+\sin\theta\sin\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}$$

6.已知 $\frac{\cos^4A}{\cos^2B}+\frac{\sin^4A}{\sin^2B}=1$ 证明，$\frac{\cos^4B}{\cos^2A}+\frac{\sin^4B}{\sin^2A}=1$

证：把已知条件变形得 $\cos^4A\sin^2B+\sin^4A\cos^2B$

$$=\sin^2B\cos^2B,$$

$$(1-\sin^2A)^2\sin^2B+\sin^4A(1-\sin^2B)$$
$$-\sin^2B(1-\sin^2B)=0$$

$$\sin^2B-2\sin^2A\sin^2B+\sin^4A\sin^2B+\sin^4A$$
$$-\sin^4A\sin^2B-\sin^2B+\sin^4B=0$$

整理得 $$(\sin^2A-\sin^2B)^2=0$$

$\therefore$ $\sin^2A=\sin^2B$ 　　由此得$\cos^2A=\cos^2B$

$$\therefore \frac{\cos^4B}{\cos^2A}+\frac{\sin^4B}{\sin^2A}=\frac{\cos^4A}{\cos^2B}+\frac{\sin^4A}{\sin^2B}=1$$

7.设： $\sin\alpha=a\sin\beta$，$\operatorname{tg}\alpha=b\operatorname{tg}\beta$，求$\cos\alpha$及$\sin\beta$的值，

解： $\operatorname{tg}\alpha = b\operatorname{tg}\beta$， 即 $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{b\sin\beta}{\cos\beta}$，

将 $\sin\alpha = a\sin\beta$代入，并从等式两边消去$\sin\beta$，

得：$\dfrac{a}{\cos\alpha} = \dfrac{b}{\cos\beta}$ $\therefore$ $\dfrac{\cos^2\alpha}{a^2} = \dfrac{\cos^2\beta}{b^2}$，

由于 $\sin\beta = \dfrac{\sin\alpha}{a}$，$\therefore \dfrac{\cos^2\alpha}{a^2} = \dfrac{1-\left(\dfrac{\sin\alpha}{a}\right)^2}{b^2}$

$$\therefore \quad \frac{\cos^2\alpha}{a^2} = \frac{a^2-\sin^2\alpha}{a^2b^2} = \frac{\cos^2\alpha-(a^2-\sin^2\alpha)}{a^2-a^2b^2}$$

$$= \frac{1-a^2}{a^2(1-b^2)}$$

由此，得 $\cos\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1-a^2}{1-b^2}}$

$\because$ $\sin\alpha = a\sin\beta$

$$\therefore \quad \sin^2\beta = \frac{\sin^2\alpha}{a^2} = \frac{1-\cos^2\alpha}{a^2}$$

$$= \frac{1-\dfrac{1-a^2}{1-b^2}}{a^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2(1-b^2)}$$

$$\therefore \quad \sin\beta = \pm\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{1-b^2}}$$

8. 已知 $\operatorname{tg}x = \dfrac{2b}{a-c}$，计算

$$y = a\cos^2x + 2b\sin x\cos x + c\sin^2x;$$

$$z = a\sin^2x - 2b\sin x\cos x + c\cos^2x.$$

解： 将 $2b = (a-c)\operatorname{tg}x$ 代入得

$$y = a\cos^2x + (a-c)\frac{\sin x}{\cos x}\sin x\cos x + c\sin^2x$$

$=a\cos^2x+(a-c)\sin^2x+c\sin^2x=a$

$\because\quad y+z=a+c,$

$\therefore\quad z=a+c-y=c$

9.(1)**证明：** $\dfrac{\sin^8x}{8}-\dfrac{\cos^8x}{8}-\dfrac{\sin^6x}{3}+\dfrac{\cos^6x}{6}+\dfrac{\sin^4x}{4}$的值与x无关。

证： 原式$=\dfrac{1}{8}(\sin^8x-\cos^8x)+\dfrac{1}{6}(\cos^6x-\sin^6x)$

$-\dfrac{1}{6}\sin^6x+\dfrac{1}{4}\sin^4x$

$\because\quad \sin^8x-\cos^8x=(\sin^4x-\cos^4x)(\sin^4x+\cos^4x)$

$=(1-2\sin^2x\cos^2x)(2\sin^2x-1)$

$=(2\sin^4x-2\sin^2x+1)(2\sin^2x-1)$

$\cos^6x-\sin^6x$

$=(\cos^2x-\sin^2x)$

$(\cos^4x+\cos^2x\sin^2x+\sin^4x)$

$=(1-2\sin^2x)(1-\sin^2x+\sin^4x)$

$\therefore$ 原式$=\dfrac{1}{24}\{(2\sin^2x-1)(6\sin^4x-6\sin^2x+3-4$

$+4\sin^2x-4\sin^4x)-4\sin^6x+6\sin^4x\}$

$=\dfrac{1}{24}\{(2\sin^2x-1)(2\sin^4x-2\sin^2x-1)$

$-4\sin^6x+6\sin^4x\}$

$=\dfrac{1}{24}$

$\therefore$ 原式的值与x无关，

(2)设：$x+y+z=\frac{\pi}{2}k$试问k为何值时，函数

$U=tg\,y\cdot tg\,z+tg\,z\cdot tgx+tgx\cdot tgy$ 与x、y、z无关？

解： ∵ $\cos(x+y+z)=\cos x\cos y\cos z-\sin x\sin y\cos z$

$-\sin x\cos y\sin z-\cos x\sin y\sin z$

$=\cos x\cos y\cos z[1-tgxtgy-tgxtgz-tgytgz]$

∴ $tgy\cdot tgz+tgztgx+tgxtgy$

$$=1-\frac{\cos(x+y+z)}{\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z}=1-\frac{\cos\frac{k\pi}{2}}{\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z}$$

当K为奇数时，不论x、y、z是怎样的数，函数U的值总为1，所以与x、y、z无关。

10.(1)已知 $0<\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\cdots<\alpha_n<\frac{\pi}{2}$

求证： $tg\alpha_1<\frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\mathrm{si}\alpha_n}{\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cdots+\cos\alpha_n}<tg\alpha_n$

证： ∵ $0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n<\frac{\pi}{2}$

∴ $0<n\sin\alpha_1<\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_n<n\sin\alpha_n$

而 $n\cos\alpha_1>\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cdots+\cos\alpha_n>n\cos\alpha_n>0$

相除得

$$\frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1}<\frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_n}{\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cdots+\cos\alpha_n}<\frac{\sin\alpha_n}{\cos\alpha_n}$$

即 $tg\alpha_1<\frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_n}{\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cdots+\cos\alpha_n}<tg\,\alpha_n$.

(2)设A为锐角

求证： $\sec A+\sec\frac{A}{2}+\sec\frac{A}{3}+\cdots+\sec\frac{A}{n}+\csc A+\csc\frac{A}{2}+$