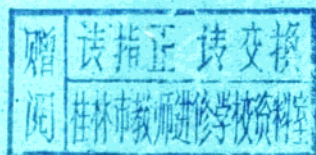


13. B-16/35

中学数学复习题选



桂林市教育局教研室编

前 言

为了贯彻一九七九年全国高考复习大纲数学科的要求，我们聘请秦宗汉、赵师观、欧香岩、周麟、庄明月、唐奕雄、覃尚铨、徐文亮、汤学初、王逸民、古幼麟和风介生等同志，编写了这册“中学数学复习题选”供高中毕业班的老师组织学生复习时作教学参考用。限于时间和篇幅，每题一般只作出一种解法（证法或提示），过程也较简略。教学时应以教材和复习大纲为准，本题解不能代替中学数学的全面复习，这是使用者应注意的。

在选编过程中，同志们参考了市内部分学校的习题和外地有关资料，但由于收集的资料不全，编写的时间仓促，选题不够全面，解法也不一定是简的。错漏之处，在所难免，希读者给予批评指正。

本书的印刷工作得到荔浦县教育局和荔浦县印刷厂的大力支持，在此表示谢意。

一九七九年二月十日

目 录

代数部分	(1)
平面几何部分	(53)
立体几何部分	(101)
三角部分	(144)
解析几何部分	(200)

代 数 部 分

1. 求方程 $x^2 + y^2 + 6y + 13 = 4x$ 的实数解。

解：原方程可写成 $(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 0$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 0$$

因 x, y 为实数, 则 $(x - 2)^2 = 0$ $x - 2 = 0$ $x = 2$

$$(y + 3)^2 = 0$$
 $y + 3 = 0$ $y = -3$

2. 求 $|x - 3| - \sqrt{4x^2 - 12x + 9} + |x + 5|$ 的值

解：原式 $= |x - 3| - \sqrt{(2x - 3)^2} + |x + 5|$

$$= |x - 3| - |2x - 3| + |x + 5|$$

当 $x < -5$ 时 原式 $= -(x - 3) - [-(2x - 3)] + [-(x + 5)]$

$$= -x + 3 + 2x - 3 - x - 5 = -5$$

当 $-5 \leq x < \frac{3}{2}$ 时 原式 $= -(x - 3) - [-(2x - 3)] + (x + 5)$

$$= -x + 3 + 2x - 3 + x + 5 = 2x + 5$$

当 $\frac{3}{2} \leq x < 3$ 时 原式 $= -(x - 3) - (2x - 3) + (x + 5)$

$$= -x + 3 - 2x + 3 + x + 5 = 11 - 2x$$

当 $x \geq 3$ 时 原式 $= x - 3 - (2x - 3) + (x + 5)$

$$= x - 3 - 2x + 3 + x + 5 = 5$$

3. (1) 如果最简根式 $\sqrt[n^2+3n]{2a+b}$ 和 $\sqrt[n+15]{3a-b}$ 是

同次根式, 求 n 的值。

(2) 如果最简根式 $\sqrt[3a+2]{2a+b}$ 和 $\sqrt[7+3b-a]{3a-b}$ 是

同类根式, 求 a, b 的值。

解：(1) 由同次根式的定义, 知 $n^2 + 3n = n + 15$

解得 $n_1 = 3 \quad n_2 = -5$

(2) 由同类根式的定义, 知
$$\begin{cases} 3a+2=7+3b-a \\ 2a+b=3a-b \end{cases}$$

解方程组得: $a = 2 \quad b = 1$

4. x 是什么实数时, 下列各式成立

$$(1) |(x-3)+(x-8)| = |x-3| + |x-8|$$

$$(2) |(5x+4)(3x-7)| = (5x+4)(3x-7)$$

$$(3) \left| \frac{x-3}{2-x} \right| = \frac{3-x}{x-2}$$

解: (1) 若此等式成立 必须 $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-8 \geq 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-3 \leq 0 \\ x-8 \leq 0 \end{cases}$

解之 得 $x \geq 8$ 或 $x \leq 3$

(2) 若此等式成立 必须 $\begin{cases} 5x+4 \geq 0 \\ 3x-7 \geq 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 5x+4 \leq 0 \\ 3x-7 \leq 0 \end{cases}$

解之 得 $x \geq \frac{7}{3}$ 或 $x \leq -\frac{4}{5}$

(3) 若此等式成立 必须 $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 3-x \leq 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}$

解之 得 $2 < x \leq 3$

5. 分解 $x^3 + 3x^2 + 3x - 7$ 的因式

解法一: 原式 $= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 8$

$$= (x+1)^3 - 2^3$$

$$= [(x+1)-2] [(x+1)^2 + 2(x+1) + 2^2]$$

$$= (x-1)(x^2 + 4x + 7)$$

解法二: 把 -7 分裂为 $(-1) + (-3) + (-3)$

$$\text{则 原式} = (x^3 - 1) + (3x^2 - 3) + (3x - 3)$$

$$= (x-1)(x^2 + x + 1)$$

$$+ 3(x-1)(x+1) + 3(x-1) \\ = (x-1)(x^2 + 4x + 7)$$

解法三：原式 $= x^3 - x^2 + 4x^2 - 4x + 7x - 7$

$$= x^2(x-1) + 4x(x-1) + 7(x-1) \\ = (x-1)(x^2 + 4x + 7)$$

6. 分解 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 35$ 的因式

解：原式 $= [(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)] - 35$
 $= [(x^2 + 5x) + 4][(x^2 + 5x) + 6] - 35$
 $= (x^2 + 5x)^2 + 10(x^2 + 5x) - 11$
 $= (x^2 + 5x + 11)(x^2 + 5x - 1)$

7. 分解 $4x^2 - 4xy - 3y^2 - 4x + 10y - 3$ 的因式

解：视 y 为参数

$$\text{原式} = 4x^2 - 4(y+1)x - (3y^2 - 10y + 3)$$

此二次三项式的根为：(也可用十字相乘分解因式法解)

$$x = \frac{4(y+1) \pm \sqrt{16(y+1)^2 + 4 \times 4(3y^2 - 10y + 3)}}{8} \\ = \frac{4(y+1) \pm 8(y-1)}{8} \\ = \frac{y+1 \pm 2(y-1)}{2}$$

$$\therefore x = \frac{3y-1}{2} \quad \text{或} \quad x = \frac{-y+3}{2}$$

从而 原式 $= 4 \left(x - \frac{3y-1}{2} \right) \left(x - \frac{-y+3}{2} \right)$
 $= (2x - 3y + 1)(2x + y - 3)$

8. 分解因式 $x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2$

解：原式 $= (x^4 - 2x^2y^2 + y^4) - 2z^2(x^2 - y^2) + z^4$
 $= (x^2 - y^2)^2 - 2z^2(x^2 - y^2) + z^4$

$$\begin{aligned}
&= (x^2 - y^2 - Z^2)^2 - (2YZ)^2 \\
&= (x^2 - y^2 - Z^2 + 2YZ)(x^2 - y^2 - Z^2 - 2YZ) \\
&= (x + y - Z)(x - y + Z)(x + y + Z)(x - y - Z)
\end{aligned}$$

9. 化简下面的乘积:

$$\begin{aligned}
P &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \\
&\quad \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \\
&\quad \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}
\end{aligned}$$

解: 从后向前乘, 得

$$\begin{aligned}
P &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \\
&\quad \cdot \sqrt{4 - (2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}})} \\
&= \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \\
&\quad \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \\
&= \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{4 - (2 + \sqrt{3})} \\
&= \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} \\
&= \sqrt{4 - 3} = 1
\end{aligned}$$

10. 化简 $\left[(a^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}})^{-1} (a - x) - \frac{a + x}{a^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}} \right] \cdot 2(ax)^{-\frac{1}{3}}$

解: 原式 $= \left[\frac{a - x}{a^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}} - \frac{a + x}{a^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}} \right] \cdot 2(ax)^{-\frac{1}{3}}$

$$\begin{aligned}
&= \left[\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}} \right) \right] \cdot 2(ax)^{-\frac{1}{3}} \\
&= 2(ax)^{\frac{1}{3}} \cdot 2(ax)^{-\frac{1}{3}} \\
&= 4(ax)^0 = 4 \times 1 = 4
\end{aligned}$$

11. 设 a, b, c 都是实数, 并且 $(x+a)(x+b) + (x+b)(x+c) + (x+c)(x+a)$ 能表为 x 的一次式的完全平方. 求证: $a=b=c$

证明: 令 $f(x)$ 表所给式, 则有

$$f(x) = 3x^2 + 2(a+b+c)x + (ab+bc+ca)$$

由题意 $f(x)$ 能表为一次式的完全平方, 则它的判别式必为零,

$$\text{即 } 4(a+b+c)^2 - 4 \times 3(ab+bc+ca) = 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$$

$$\frac{1}{2} [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] = 0$$

但 a, b, c 都是实数,

$$\text{故必 } (a-b)^2 = (b-c)^2 = (c-a)^2 = 0$$

$$\text{从而得 } a-b=b-c=c-a=0 \quad \therefore a=b=c$$

12. 计算 $\sqrt{1-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3+2\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned}
\text{解: } &\sqrt{1-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3+2\sqrt{2}} \\
&= -\sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt{3+2\sqrt{2}} \\
&= -\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} \cdot \sqrt{3+2\sqrt{2}} \\
&= -\sqrt{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} \\
&= -\sqrt{9-8} = -\sqrt{1} = -1
\end{aligned}$$

13. 设 $\frac{a-b}{x} = \frac{b-c}{y} = \frac{c-a}{z}$ 且 a, b, c 互不相等

求证 $x+y+z=0$

证明: 令 $\frac{a-b}{x} = \frac{b-c}{y} = \frac{c-a}{z} = k \quad (k \neq 0)$

$$\text{则 } x = \frac{a-b}{k} \quad y = \frac{b-c}{k} \quad z = \frac{c-a}{k}$$

$$\begin{aligned} \therefore x+y+z &= \frac{a-b}{k} + \frac{b-c}{k} + \frac{c-a}{k} \\ &= \frac{0}{k} = 0 \end{aligned}$$

14. 设 $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$ 且 x, y, z 互不相等

求证 $x^2 y^2 z^2 = 1$

证明: $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z}$

两边同乘 xyz , 得 $x^2 yz + xz = xy^2 z + xy$

$$x^2 yz - xy^2 z = xy - xz$$

$$xyz(x-y) = x(y-z) \dots\dots (1)$$

$$\text{又 } y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$$

$$y - z = \frac{1}{x} - \frac{1}{z}$$

两边同乘 xyz , 得 $xyz(y-z) = y(z-x) \dots\dots (2)$

$$\text{又 } z + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{y}$$

$$z - x = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$$

两边同乘 xyz , 得 $xyz(z-x) = z(x-y) \dots\dots (3)$

$$\begin{aligned}
 (1) \times (2) \times (3) & x^3 y^3 z^3 (x-y)(y-z)(z-x) \\
 & = xyz(x-y)(y-z)(z-x) \\
 \therefore x^2 y^2 z^2 & = 1
 \end{aligned}$$

15. 设 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ 求证

(1) a、b、c 三数中必有两数为相反的数

(2) 对任何奇数 n 均有 $\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n}$

$$= \frac{1}{a^n + b^n + c^n}$$

证明: (1) $\because 0 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a+b+c}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(bc+ca+ab)(a+b+c) - abc}{abc(a+b+c)} \\
 &= \frac{[c(a+b)+ab][(a+b)+c] - abc}{abc(a+b+c)} \\
 &= \frac{c(a+b)^2 + (ab+c^2)(a+b)}{abc(a+b+c)} \\
 &= \frac{(a+b)[c(a+b)+ab+c^2]}{abc(a+b+c)} \\
 &= \frac{(a+b)(ac+bc+ab+c^2)}{abc(a+b+c)} \\
 &= \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc(a+b+c)} = 0
 \end{aligned}$$

$\therefore a+b, b+c$ 或 $c+a$ 中必有一为零,

故 a、b、c 中必有两个是相反的数。

(2) 若 n 为奇数由(1)知 a、b、c 中必有两个是相反的数。设 $b = -a$

则 $\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n} + \frac{1}{(-a)^n} + \frac{1}{c^n}$

$$= \frac{1}{a^n} - \frac{1}{a^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{c^n}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \frac{1}{a^n + b^n + c^n} &= \frac{1}{a^n + (-a)^n + c^n} \\ &= \frac{1}{a^n - a^n + c^n} = \frac{1}{c^n} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}$$

16. 如果 $x > 0$ $y > 0$

$$\begin{aligned} \text{且 } \sqrt{x} (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \\ = 3\sqrt{y} (\sqrt{x} + 5\sqrt{y}) \end{aligned}$$

求 $\frac{2x + \sqrt{xy} + 3y}{x + \sqrt{xy} - y}$ 的值

$$\text{解: } \sqrt{x} (\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 3\sqrt{y} (\sqrt{x} + 5\sqrt{y})$$

$$x + \sqrt{xy} = 3\sqrt{xy} + 15y$$

$$x - 2\sqrt{xy} - 15y = 0$$

$$(\sqrt{x} + 3\sqrt{y})(\sqrt{x} - 5\sqrt{y}) = 0$$

$$\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 0 \quad (\text{不合})$$

$$\text{或 } \sqrt{x} - 5\sqrt{y} = 0$$

$$\sqrt{x} = 5\sqrt{y} \quad x = 25y$$

$$\text{代入 } \frac{2x + \sqrt{xy} + 3y}{x + \sqrt{xy} - y} = \frac{50y + 5y + 3y}{25y + 5y - y}$$

$$= \frac{58y}{29y} = 2$$

17. 设方程 $x^2 - 6x + 7 = 0$ 的两根为 α 和 β , 不解此方程, 试作一新方程使它的两根分别为

$$\frac{\beta}{\alpha} + 2, \quad \frac{\alpha}{\beta} + 2$$

解：方程 $x^2 - 6x + 7 = 0$ 的两根是 α 和 β ,

$$\text{得 } \alpha + \beta = -(-6) = 6$$

$$\alpha \beta = 7$$

设作的新方程 $y^2 + py + q = 0$ 的两根为

$$y_1 = \frac{\beta}{\alpha} + 2, \quad y_2 = \frac{\alpha}{\beta} + 2$$

根据韦达定理得

$$\begin{aligned} -p &= y_1 + y_2 = \frac{\beta}{\alpha} + 2 + \frac{\alpha}{\beta} + 2 \\ &= \frac{\beta^2 + \alpha^2 + 4\alpha\beta}{\alpha\beta} \\ &= \frac{(\alpha + \beta)^2 + 2\alpha\beta}{\alpha\beta} \\ &= \frac{6^2 + 2 \times 7}{7} \\ &= \frac{36 + 14}{7} = \frac{50}{7} \end{aligned}$$

$$p = -\frac{50}{7}$$

$$\begin{aligned} q &= y_1 y_2 = \left(\frac{\beta}{\alpha} + 2 \right) \left(\frac{\alpha}{\beta} + 2 \right) \\ &= \frac{\beta + 2\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\alpha + 2\beta}{\beta} \\ &= \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 + 5\alpha\beta}{\alpha\beta} \\ &= \frac{2(\alpha + \beta)^2 + \alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{2 \times 6^2 + 7}{7} \\ &= \frac{72 + 7}{7} = \frac{79}{7} \end{aligned}$$

$$q = \frac{79}{7}$$

$$\therefore \text{新方程为 } y^2 - \frac{50}{7}y + \frac{79}{7} = 0$$

$$\text{即 } 7y^2 - 50y + 79 = 0$$

18. 已知方程 $x^2 - (a^2 + 2b - 2)x + a + b + 2 = 0$ 的二根恰为方程

$x^2 + ax + b = 0$ 的二根的平方, 求 a 、 b 的值.

解: 设 $x^2 + ax + b = 0$ 的二根为 x_1 、 x_2 .

$$\text{故 } \begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 x_2 = b \end{cases}$$

方程 $x^2 - (a^2 + 2b - 2)x + a + b + 2 = 0$ 的二根为 x_1^2 和 x_2^2 .

$$\text{故 } \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = a^2 + 2b - 2 \\ x_1^2 \cdot x_2^2 = a + b + 2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \\ &= (-a)^2 - 2b = a^2 - 2b \end{aligned}$$

$$x_1^2 \cdot x_2^2 = (x_1x_2)^2 = b^2$$

$$\therefore \begin{cases} a^2 - 2b = a^2 + 2b - 2 \\ b^2 = a + b + 2 \end{cases}$$

$$\text{解之得 } b = \frac{1}{2}, \quad a = -\frac{9}{4}$$

19. 若方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两根是

$\operatorname{tg} \theta$ 和 $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right)$, 又两根的比是 $3 : 2$, 试求 p 、 q 的值

解: 因方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两根为

$\operatorname{tg} \theta$ 和 $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right)$

$$\text{依韦达定理得} \begin{cases} \operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) = -p \\ \operatorname{tg} \theta \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) = q \end{cases}$$

$$\text{又 } \operatorname{tg} \theta : \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) = 3 : 2$$

$$2 \operatorname{tg} \theta = 3 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) = \frac{3(1 - \operatorname{tg} \theta)}{1 + \operatorname{tg} \theta}$$

$$2 \operatorname{tg} \theta (1 + \operatorname{tg} \theta) = 3(1 - \operatorname{tg} \theta)$$

$$2 \operatorname{tg} \theta + 2 \operatorname{tg}^2 \theta = 3 - 3 \operatorname{tg} \theta$$

$$2 \operatorname{tg}^2 \theta + 5 \operatorname{tg} \theta - 3 = 0$$

$$(2 \operatorname{tg} \theta - 1)(\operatorname{tg} \theta + 3) = 0$$

$$\therefore \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2} \quad \text{或} \quad \operatorname{tg} \theta = -3$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) = \frac{1}{3} \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) = -2$$

$$\therefore p = - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = -\frac{5}{6}$$

$$q = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$p = - [(-3) + (-2)] = 5$$

$$q = (-2)(-3) = 6$$

$$\text{答 } p = -\frac{5}{6} \quad q = \frac{1}{6} \quad \text{或} \quad p = 5 \quad q = 6$$

20. 当 a, b, c 为实数时, 求证:

方程 $x^2 - (a+b)x + (ab-c^2) = 0$ 有两个实数根,
并求这两个根相等的条件.

$$\begin{aligned} \text{解: 判别式 } \Delta &= (a+b)^2 - 4(ab-c^2) \\ &= (a-b)^2 + 4c^2 \end{aligned}$$

因已知 a, b, c 为实数, 故有 $(a-b)^2 + 4c^2 \geq 0$
从而原方程有两个实数根.

这两个实数根相等的条件是 $\Delta = 0$

$$\text{即 } (a-b)^2 + 4c^2 = 0$$

$$\text{从而得 } \begin{cases} (a-b)^2 = 0 \\ c^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} a = b \\ c = 0 \end{cases} \text{ 为两根相等的条件}$$

21. 设 $x^2 - 11x + 22 = 0$ 的根为 α, β ,

求作以 $(\alpha + \beta), (\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta})$ 为根的二次方程.

解: 由韦达定理, 知 $\alpha + \beta = 11$ 及 $\alpha \cdot \beta = 22$

$$\text{从而 } (\alpha + \beta) + (\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta})$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)\alpha\beta + (\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)\alpha\beta + (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{11 \times 22 + 11^2 - 2 \times 22}{22} = \frac{29}{2}$$

$$(\alpha + \beta)(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta})$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)(\beta^2 + \alpha^2)}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)[(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta]}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{11[11^2 - 2 \times 22]}{22} = \frac{77}{2}$$

$$\text{故所求方程为 } x^2 - \frac{29}{2}x + \frac{77}{2} = 0$$

$$\text{即 } 2x^2 - 29x + 77 = 0$$

$$22. \text{解方程 } x^4 + 10x^3 + 23x^2 - 10x - 3 = 0$$

$$\text{解: 化为 } x^4 + 10x^3 + 25x^2 - 2x^2 - 10x - 3 = 0$$

$$\text{即 } [(x^2)^2 + 2(x^2)(5x) + (5x)^2] - 2(x^2 + 5x) - 3 = 0$$

$$\text{即 } (x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 3 = 0$$

方程左边变成关于 $(x^2 + 5x)$ 的二次三项式。

$$\text{再分解因式, 得 } (x^2 + 5x - 3)(x^2 + 5x + 1) = 0$$

$$\text{分别解 } x^2 + 5x - 3 = 0 \text{ 及 } x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$\text{得原方程的根为: } x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{37}}{2}$$

$$x_{3,4} = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$23. \text{解方程 } \frac{x^2 + 3x + 1}{4x^2 + 6x - 1}$$

$$- 3 \cdot \frac{4x^2 + 6x - 1}{x^2 + 3x + 1} - 2 = 0$$

解: 因方程中两个分式项互为倒数, 故可设

$$\frac{x^2 + 3x + 1}{4x^2 + 6x - 1} = y$$

$$\text{则原方程变形为 } y - \frac{3}{y} - 2 = 0$$

$$\text{即 } \frac{y^2 - 2y - 3}{y} = 0, \text{ 即 } \frac{(y+1)(y-3)}{y} = 0$$

显然 $y \neq 0$

$$\therefore y_1 = -1, y_2 = 3$$

$$\text{于是得 } \frac{x^2 + 3x + 1}{4x^2 + 6x - 1} = -1 \dots\dots (1)$$

$$\text{或 } \frac{x^2 + 3x + 1}{4x^2 + 6x - 1} = 3 \dots\dots (2)$$

分别解(1)及(2) 得 x 的4个值分别为:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{9}{5}, \quad x_3 = \frac{-15 + \sqrt{401}}{22},$$

$$x_4 = \frac{-15 - \sqrt{401}}{22}$$

经检验, 方程分母均不为零, 故它们都是原方程的解.

$$24. \text{ 解方程组 } \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{5}{3y} = 1 \\ \frac{9}{x} + \frac{10}{y} = 5 \end{cases}$$

解: 各方程实际上是关于函数 $\frac{1}{x}$ 与 $\frac{1}{y}$ 的一次方程

利用加减消元法就 $\frac{1}{x}$ 与 $\frac{1}{y}$ 解之, 得到

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \end{cases} \quad \text{从而} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$25. \text{ 解方程组 } \begin{cases} x^2 + 2xy - 8y^2 - 6x + 18y - 7 = 0 & \text{①} \\ 2x^2 - 5xy - 10y^2 - 3x + 9y + 7 = 0 & \text{②} \end{cases}$$

$$\text{解: ①} + \text{②:} \quad \text{得 } 3x^2 - 3xy - 18y^2 - 9x + 27y = 0$$

$$\text{即 } x^2 - xy - 6y^2 - 3x + 9y = 0$$

$$\text{即 } (x - 3y)(x + 2y) - 3(x - 3y) = 0$$

$$\text{即 } (x - 3y)(x + 2y - 3) = 0 \quad \text{③}$$

$$\text{解③得 } x = 3y \quad \text{④}$$

$$\text{或 } x = 3 - 2y \quad \text{⑤}$$