随机振动及其实验分析

大连工学院工程力学所

一九八一年

前　言

随机振动与周期振动的主要区别在于它研究的不是单个的确定的振动现象，而是包含着大量表面上没有确定规律的振动现象的集合。所以它不能用时间的确定性函数来描述，只能用统计理论来分析其统计特性，为这类振动现象提供统计参数，进而为工程服务。

人们对随机振动的探讨开始得比较晚，周期振动已有二百年的研究历史了，而它基本上是从五十年代才问世。开始于航空工业，高速飞机与火箭。振源主要来自喷气噪声，大气紊流、附面层压力波动等等。这些随机振动源的研究、随机激励下结构振动计算、疲劳强度设计、隔振以及随机试验等一系列问题就提出来了。这就为机械振动研究开拓了一个新的领域—随机振动。

另外，在汽车、机车、船舰、土建、勘探等工程中，由于路面、海浪、地震等的随机激励，提出了各自相应的随机振动问题。所以随机振动理论在这些领域中也得到了发展。

近几年来，振动测试技术与计算技术取得了飞速发展，一些先进的测试分析工具，例如各种小型传感器、实时分析仪、FFT分析装置以及数控随机振动试验系统相继研制成功，特别是有关的数值方法如有限元法、快速付里叶变换等。所有这些，必将进一步推动随机振动理论向实用化方向发展，它将在工程中起更大的作用。近年来的振动诊断与监控在工程中的显著作用就是一例。

随机振动与谱分析涉及的知识较多，如概率数理统计、付里叶变换、结构动力学、实验力学等。在此只能就必要的数学工具做简单的回顾，以便介绍随机振动与谱分析基本概念，这就可能忽略了严格的数学论理。此外，学习这些基础知识的目的在于应用，故尽量介绍一些实验技术与分析方法和上述基本理论的应用。

讲义共十三章。第一章至第四章是数学基础知识。第五章至第十章是随机振动基本理论。第十一章至第十三章是随机振动实验分析方法及其应用。

本讲义可做为工科院校有关专业高年级学生及研究生选修课教材。并

02

0699284

0324/12

且可供科研单位和厂矿搞振动研究的技术人员参考。

由于水平不高，时间紧，讲义中可能存在不少错误，敬请批评指正。

讲义由于长吉编写，并请孙焕纯付教授审改。第十一章主要部分采用杨文彬同志所写的讲义中部分内容。

目　　录

第一篇　数学基础知识 …… 1
第一章　概率论与数理统计 …… 1
§ 1-1　随机事件及其概率 …… 1
§ 1-2　概率的基本运算 …… 3
§ 1-3　分布函数 …… 9
§ 1-4　常用的分布函数 …… 13
§ 1-5　数学期望 …… 18
§ 1-6　方差 …… 21
§ 1-7　二维随机变量的分布 …… 24

第二章　付里叶变换与频谱 …… 30
§ 2-1　付里叶级数 …… 30
§ 2-2　付里叶积分与付里叶变换 …… 48
§ 2-3　付里叶变换性质 …… 54

第三章　快速付里叶变换(FFT) …… 60
§ 3-1　离散付里叶变换 …… 60
§ 3-2　N=4的FFT算法 …… 63
§ 3-3　N=8的FFT算法 …… 65
§ 3-4　FFT算法理论推导 …… 68
§ 3-5　实数的FFT算法 …… 72

第四章　δ函数 …… 76
§ 4-1　δ函数的定义 …… 76
§ 4-2　δ函数重要性质 …… 77

第二篇　随机振动理论 …… 82
第五章　物理数据的分类 …… 82

§ 5-1 确定性数据的分类 …… 82
§ 5-2 随机数据的分类 …… 84
§ 5-3 随机过程的数值特征 …… 86

第六章 随机振动的时域特征 …… 87
§ 6-1 相关函数 …… 87
§ 6-2 相关函数性质 …… 89
§ 6-3 褶积 …… 94
§ 6-4 褶积定理 …… 95
§ 6-5 相关函数的计算机算法 …… 97
§ 6-6 相关分析的应用 …… 99

第七章 随机振动频域特征 …… 101
§ 7-1 功率谱密度 …… 101
§ 7-2 窄带与宽带过程 …… 104
§ 7-3 导出过程的谱密度 …… 106
§ 7-4 互功率谱密度 …… 108
§ 7-5 单边功率谱密度 …… 111
§ 7-6 泄漏效应及泄漏处理 …… 113
§ 7-7 窗函数 …… 117
§ 7-8 抽样定理 …… 125
§ 7-9 功率谱的计算机算法 …… 130

第八章 随机振动的传递特性 …… 146
§ 8-1 常系数线性系统 …… 146
§ 8-2 频率响应与脉冲响应 …… 147
§ 8-3 单输入系统的传递特性 …… 154
§ 8-4 双输入系统的传递特性 …… 159
§ 8-5 多输入系统的传递特性 …… 162
§ 8-6 各态历经过程 …… 164
§ 8-7 传递函数的计算机算法 …… 166

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第九章　随机振动的幅值域特征 …… 176
§9-1　概率密度函数 …… 176
§9-2　交叉分布 …… 178
§9-3　峰的分布 …… 183
§9-4　极大值分布 …… 185
§9-5　疲劳破坏 …… 187
§9-6　首次超出破坏 …… 191
§9-7　概率密度函数的计算机算法 …… 195

第十章　参数识别 …… 197
§10-1　振动系统的传递函数 …… 197
§10-2　传递函数的实频曲线特性 …… 203
§10-3　传递函数的虚频曲线特性 …… 205
§10-4　传递函数的矢量图 …… 207
§10-5　参数识别的图解法之一 …… 210
§10-6　参数识别的图解法之二 …… 212
§10-7　参数识别的计算机算法 …… 212

第三篇　随机振动实验分析及应用 …… 223
第十一章　近代振动实验仪器及分析设备 …… 224
§11-1　换能器 …… 224
§11-2　放大器 …… 235
§11-3　记录仪 …… 240
§11-4　分析仪 …… 254
§11-5　激振装置 …… 257

第十二章　随机振动实验分析 …… 259
§12-1　随机振动实验方法 …… 259
§12-2　随机振动实验技术 …… 262
§12-3　随机数据的数字分析 …… 265
§12-4　误差分析 …… 271

第十三章　随机振动分析方法的应用 …… 275
§13-1 结构频率响应的量测分析 …… 275
§13-2 振动诊断与监控 …… 275
§13-3 车辆振动的分析 …… 281
§13-4 瞬变随机过程分析 …… 283
§13-5 随机疲劳问题 …… 287
§13-6 振动对人体的影响 …… 287
§13-7 在港工程上的应用 …… 288
§13-8 噪声问题 …… 289

第一篇　数学基础知识

随机振动及其实验分析是解决振动系统振动问题的有力工具。特别是复杂振动分析，它更有独道之处。掌握这门分析方法除结构动力学知识外，最主要的基础就是数学。它所用到的数学比较多，其中有微积分学、概率论与数理统计、付里叶变换、广义函数、矩阵分析等。无疑，熟悉这些知识的读者，再来学习随机振动及其实验分析，那是极有力的条件。但对不熟悉它的读者，能用较少时间，掌握主要的数学工具，以便有个坚实的基础，这就是集中篇幅简要介绍主要而又常用的数学基础知识的目的所在。

本篇主要介绍：概率论与数理统计、付里叶变换、快速付里叶变换及脉冲函数。

第一章　概率论与数理统计

§1-1　随机事件及其概率

随机振动现象与一般地周期振动现象不同。最简单的周期振动，如简谐振动，有明显的振动规律。比如每秒钟振动次数是一样的，振动幅值大小也是稳定的。但随机振动则不然，每秒钟振动周期不固定，幅值也不固定，都随时在变动。对这些振动现象特征的观察，就是一种试验。当然，在自然界里，不只是观察振动，各种各样的科学实验，都广泛地被认为是试验。我们把在试验的结果中，所发生的现象叫做事件。如果在试验结果中，某事件，可能发生，也可能不发生，这种事件就叫做随机事件。例如远距离射击某一目标，击中目标就是随机事件。如果在每次试验的结果中，某一事件一定发生，则这一事件叫做必然事件；而对那些在每次试验的结果中，一定不发生的事件就称为不可能事件。

随机事件在试验结果中，出现与不出现是否是可知的；有什么规律没有；这是随机事件分析的一个重要问题。很显然，在一次试验中，随机事件发生与不发生是难以确定的。但在大量的试验中，发生的可能性就有一定的规律。历史上，有人曾做过抛掷硬币试验。令m代表徽花向上的次数，

n 代表掷币的总次数。并记 $W=\frac{m}{n}$ 表示徽花向上占总掷币数的多少。从中可以看出，当抛掷硬币的次数较少时，徽花向上的次数占总数的比例是不稳定的；但当掷币次数增加，愈来愈明显趋于一个稳定的数，这个数为 1／2。这个例子是容易被我们所接受的。此外，还可看出，事件发生次数与试验次数之比，是个很值得研究的量。由此，引出如下的频率概念。

假设随机事件 A 在 n 次试验中发生了 m 次，则比值 $\frac{m}{n}$ 叫做随机事件 A 的频率。记作 W(A)，即

$$W(A)=\frac{m}{n} \qquad (1-1)$$

显然，任何随机事件的频率都介于 0 与 1 之间，即

$$0 \leqq W(A) \leqq 1$$

W(A)= 0　的事件为不可能事件；

W(A)= 1　的事件为必然事件。

在这里，W(A)刻划了随机事件 A 在试验中发生的可能性大小。当试验次数充分大时，频率在一个小于一的数值附近摆动。在试验中这个刻划随机事件 A，发生的可能性大小且小于一的正数叫做随机事件 A 的概率。记作 P(A)。随机事件的概率为 $0 \leqq P(A) \leqq 1$；必然事件的概率为 P(A)= 1；不可能事件的概率 P(A)= 0。

在随机事件的概念里，再介绍几个有关的概念。如果在试验时，若干个随机事件发生的可能性机会均等，则称它们为等可能性事件；如果在试验时，若干个随机事件中，任何两个事件不可能同时发生，则称它们为互不相容事件或称互斥事件；如果试验时，若干个随机事件中，至少有一个事件发生，则称它们构成完备群。在抛掷硬币的试验中，徽花朝上事件与徽花朝下事件，二者一起构成了完备群。把构成完备群的事件叫做基本事件。

概率的古典定义：

在由 N 个互不相容且等可能性的事件构成的完备群中，有 m 个情况具有性质 A，则 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{N} \qquad (1-2)$$

例1，从0，1，2……9十个数字中，任取一个数的概率为多少？

基本事件总数N=10，构成完备群，而且任取一个数的事件是不相容且具有等可能性。事件A出现的可能性m=10，则$P(A)=\frac{m}{n}=1$。

再问，任取一个数是奇数的概率是多少？同理分析，N=10，m=5。

故 $$P(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

例2：有一批产品共1000件，其中有10件次品，从这批产品中，任取100件，求其中恰有10件次品的概率。

解：从1000件产品中，任取100件产品，其全部取法就是基本事件，基本事件个数就等于，从1000件中，取出100件的组合数，即为$N=C_{1000}^{100}$。而恰有10件次品的可能性数为，从990件正品中选取99个正品的组合数。即$m=C_{1000-10}^{100-10}$，$N=C_{1000}^{100}$，$m=C_{990}^{99}$。

$$P(A)=\frac{m}{N}=\frac{990!\cdot 900!\cdot 100!}{891!\cdot 99!\cdot 1000!}$$

$$=\frac{892\cdot 893\cdot 894\cdot\cdots\cdots 899\cdot 900\cdot 10}{991\cdot 992\cdot 993\cdot\cdots\cdots 999\cdot 1000}$$

$$\doteq 0.00389$$

即 $$P(A)=\frac{3.89}{1000}$$。

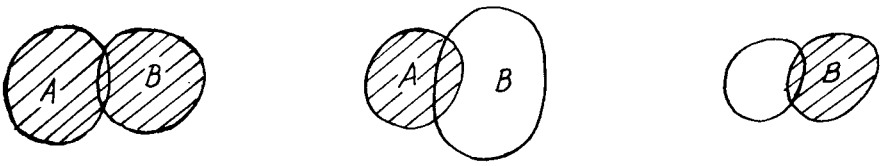
就是说，1000件产品中，有10件次品，在每次抽查100件时，含10件次品的概率是：抽取257次其中才有一回抓到。

§1-2 概率的基本运算

首先定义随机事件的和与积的概念。

随机事件的和，表示事件中只要有一事件发生。例如，事件A与B之

和记作A + B，图示如下



(a) A+B　　(b) A　　(C) B

图 1 —1

图 a 代表A发生，B亦发生；

图 b 代表A 发生；

图 c 代表B发生。这三种情况都代表A + B事件。类似地，随机事件 A_1，A_2…… An 的和这一事件记作 $A_1 + A_2 + \cdots\cdots + An$ 。

随机事件的积，表示事件都发生。随机事件 A_1，A_2，A_3…… An之积记作 $A_1 \cdot A_2 \cdots\cdots An$ 。

㈠概率的加法定理

有限个互不相容事件的和的概率，等于这些事件的概率之和 。即

$$P(A_1+A_2+\cdots\cdots+An)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots\cdots+P(An) \qquad (1-3)$$

证明

设有 N个基本事件构成的完备群，其中 A_1事件发生的次数为 M_1，A_2 事件发生的次数 M_2，… An 事件发生的次数为 Mn 。则有

$$P(A_1+A_2+\cdots\cdots+An)=\frac{M_1+M_2+\cdots\cdots+Mn}{N}=\frac{M_1}{N}+\frac{M_2}{N}+\cdots\cdots+\frac{Mn}{N}$$

$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots\cdots+P(An)$$

由此定理可推出下列两个结果：

推论 1)：如果事件 A_1，A_2 …… An 构成互不相容的完备群，则这些事件概率之和等于一。

即 $$P(A_1)+P(A_2)+\cdots\cdots+P(An)=1 \qquad (1-4)$$

因为 A_1 …… An 构成完备群，故它们之中，至少有一事件发生，就是说，$A_1 + A_2 + \cdots\cdots + An$ 是必然事件。而必然事件概率为 一。

推理 2)：对立事件的概率之和等于一。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

所谓对立事件就是指如事件 A 发生记作 A，其对立事件就是 A 不发生，记作 $\overline{A}$。

则有 $$P(A)+P(\overline{A})=1 \qquad (1-5)$$

一般说来，任意两个事件 A 与 B 之和，由下式确定：

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \qquad (1-6)$$

这是因为事件 (A+B) 等于三个互不相容事件之和：

$$A+B=A\cdot\overline{B}+\overline{A}B+AB \qquad (1-7)$$

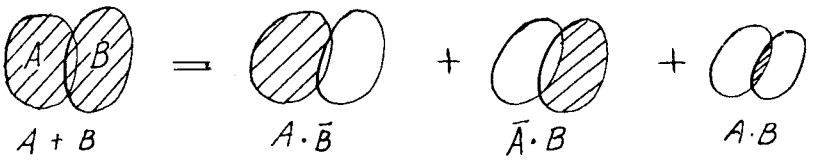


图 1 — 2

而 $$A=AB+A\overline{B} \qquad (1-8)$$

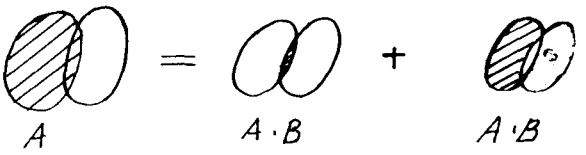


图 1 — 3

则有 $$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B}) \qquad (1-9)$$

即 $$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB) \qquad (1-10)$$

同理 $$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB) \qquad (1-11)$$

由 (1—7) 式得

$$P(A+B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)+P(AB) \qquad (1-12)$$

将 (1—10)(1—11) 代入 (1—12) 整理后有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

当事件互不相容时，有 $P(AB)=0$

㈡条件概率、概率乘法定理

在事件B已发生的条件下，事件A的概率叫做事件A在事件B已发生的条件概率。

设A、B为两个随机事件，两事件之积的概率等于其中之一事件的概率与另一事件的条件概率之积。

即 $$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B) \qquad (1-13)$$

证明：令有N个基本事件的完备群，其中A发生的可能性有M_1个，B发生的可能性有M_2个。而(AB)事件发生的可能性为M个。

若A发生，就是说有M_1个可能性，在A发生的条件下B再发生，就是指(AB)发生，其可能性有M个。

于是 $$P(B/A)=\frac{M}{M_1}=\frac{\frac{M}{N}}{\frac{M_1}{N}}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

故 $$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)$$

同理 $$P(AB)=P(B)\cdot P(A/B)$$

一般情况有：N个随机基本事件$A_1\ A_2\cdots\cdots A_n$

则概率乘法定理有

$$P(A_1A_2\cdots\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1\cdot A_2)\cdots\cdots$$
$$P(A_n/A_1\cdot A_2\cdots A_{n-1}) \qquad (1-14)$$

假如$P(B/A)=P(B)$ 则称A、B两个事件为统计独立的，这指出一事件概率与另一事件发生与否无关。

当A_1，A_2 …… A_n互相独立时，

$$P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\cdots\cdots P(A_n)$$
$$(1-15)$$

即，有限个独立事件积的概率等于这些事件概率之积。

例1：两名射手，各自射击同一目标，设甲射中目标的概率为$P(A)=0.9$，乙射中目标的概率为$P(B)=0.8$，求目标被射中的概率。

解：A，B两事件相容且独立，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$
$$=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)$$
$$=0.9+0.8-0.9\times0.8=0.98$$

例2：设某盒中装有10只晶体管，4只是次品，6只是正品，其中取两次，每次任取一只，取后再不放回，问两次都拿到正品管的概率是多少？

解：第一次拿到正品管这一事件记作A；

第二次拿到正品管这一事件记作B。

$$P(A)=\frac{6}{10}\quad,\qquad P(B/A)=\frac{5}{9}$$

依乘法定理有

$$P(AB)=P(B/A)\cdot P(A)=\frac{5}{9}\times\frac{6}{10}=\frac{1}{3}$$

两次全是拿到正品管的概率为1/3。

㈢ 全概率公式

假设事件B_1，B_2，……B_n构成互斥事件的完备群，而事件A在B_i发生的条件下的条件概率为$P(A/B_i)$($i=1,2\cdots n$)，则有事件A发生的概率

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A/B_i)$$

该公式为全概率公式。

证明

因B_i事件($i=1,2\cdots n$)之间是互不相容的，所以事件AB_i与AB_j($i\neq j$)，亦互不相容。事件A可以看成n个互不相容事件AB_i($i=1,2\cdots\cdots n$)之和

$$A=AB_1+AB_2+\cdots\cdots+AB_n$$

根据概率加法定理，

$$P(A)=P(AB_1)+P(AB_2)+\cdots\cdots+P(AB_n)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)$$

由乘法定理，则有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P(A/B_i)$$

例：甲乙丙三名射手，同向一敌机射击。甲击中的概率为0.4；乙击中的概率为0.5；丙射中的概率为0.7。若只一人射中，飞机被击落的概率为0.2；若其中二人射中，则飞机被击落的概率为0.6；若三人同时射中，则飞机必定被击落。求飞机被击落的概率。

解：

第一步，分析随机事件，那些基本事件构成完备群，依题意，可令“三人皆射不中”为基本事件B_0；“只一人射中”为B_1；“其中二人射中”为B_2；“其中三人射中”为B_3。这四种情况构成完备群。

再记“飞机被击落”这一事件为A。

第二步，分析各事件的概率：

由题意知，记甲射中的概率为$P(a)=0.4$，

甲未射中的概率为$P(\bar{a})=0.6$，

记乙射中的概率为$P(b)=0.5$，

乙未射中的概率为$P(\bar{b})=0.5$，

记丙射中的概率为$P(c)=0.7$，

丙未射中的概率为$P(\bar{c})=0.3$。

基本事件$B_0=\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$，由乘法定理，它满足独立性要求。

$$P(B_0)=P(\bar{a})\cdot P(\bar{b})\cdot P(\bar{c})$$

$$=0.6\times0.5\times0.3=0.09$$

基本事件$B_1=a\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{a}\cdot b\cdot\bar{c}+\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot c$由乘法定理与加法定理，有

$$P(B_1)=P(a)\cdot P(\bar{b})\cdot P(\bar{c})+P(\bar{a})P(b)P(\bar{c})+P(\bar{a})P(\bar{b})P(c)$$

$$P(B_1)=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7$$

$$=0.36$$

基本事件$B_2=a\cdot b\cdot\bar{c}+a\bar{b}c+\bar{a}\cdot b\cdot c$ 同理有

$$P(B_2)=P(a)P(b)P(\bar{c})+P(a)P(\bar{b})P(c)+P(\bar{a})P(b)P(c)$$

$$=0.4\times0.5\times0.3+0.4\times0.5\times0.7+0.6\times0.5\times0.7=0.41$$

基本事件 $B_3 = abc$

$$P(B_3)=P(a)P(b)P(c)=0.4\times0.5\times0.7=0.14$$

事件A的概率，就是在各个 B_i 的条件下A的条件概率。

$$P(A/B_0)=0$$

$$P(A/B_1)=0.2$$

$$P(A/B_2)=0.6$$

$$P(A/B_3)=1.0$$

第三步，利用全概率公式

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(B_i)P(A/B_i)$$

$$=0.09\times0+0.36\times0.2+0.41\times0.6+0.14\times1$$

$$=0.458$$ 即为所求。

§1-3 分布函数

随机变量就是在试验结果中，取不同数值的量。例如在振动系统的振动中，振动量（位移、速度、加速度、应力等）每个时刻取多大值是不定的，每个实验记录也不完全一样。就是说它的值是随机地变化着的。

随机变量有两种最重要的基本类型，即离散随机变量与连续随机变量。

所谓离散随机变量就是指按一定顺序取一个一个数值。

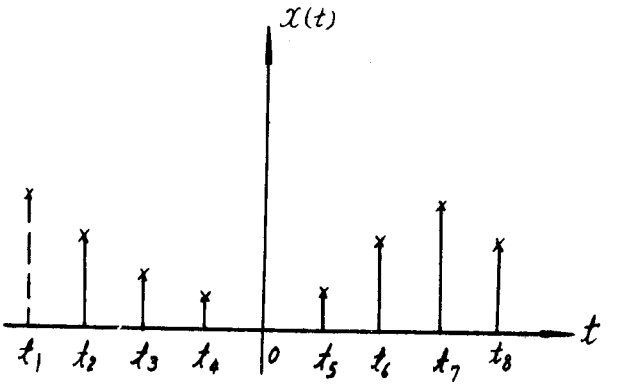


图 1-4 离散随机变量

随机变量依次取 x_1，x_2，x_3……

连续随机变量是指随机变量取某一区间中任何数值。

在连续型随机变量的研究中，常常考虑随机变量 $\xi < x$ 这一事件的概率，记作

$$F(x)= P(\xi < x) \qquad (1-16)$$

函数 $F(x)$ 叫做随机变量 ξ 的概率分布函数简称分布函数。

分布函数具有下列性质：

1．随机变量的分布函数 $F(x)$ 的值介于 0 与 1 之间。

即
$$0 \leqq F(x) \leqq 1 \qquad (1-17)$$

这一点是由概率的性质决定的。

2．随机变量 ξ 落在区间 $[x_1, x_2)$ 内的概率等于分布函数 $F(x)$ 在该区间上的增量。

因为在 x 轴上任意两点 x_1 及 x_2，且 $x_1 < x_2$，对应的分布函数为 $F(x_1)$，$F(x_2)$，它表示出随机变量 ξ 值小于 x_1，x_2 值的概率：

$$F(x_1)=P(\xi < x_1)\ ,\quad F(x_2)= P(\xi < x_2)$$

随机变量 ξ 落在 x 轴上那点都具有等可能性，而且 $\xi < x_1$，$x_1 \leqq \xi < x_2$ 又是互斥事件。于是可按乘法定理处理

$$P(\xi < x_2)=P(\xi < x_1)+P(x_1 \leqq \xi < x_2)$$

$$P(x_1 \leqq \xi < x_2)= P(\xi < x_2)-P(\xi < x_1)$$

$$= F(x_2)-F(x_1) \qquad (1-18)$$

由此可以得出下列性质。

3．分布函数 $F(x)$ 是非减函数，且处处左连续

4．
$$F(-\infty)= \lim_{x \to -\infty} F(x)= 0$$

$$F(\infty)= \lim_{x \to \infty} F(x)= 1 \qquad (1-19)$$

综上，可以用下图描绘分布函数的一般形状。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com