

第一篇 流体力学

目 录

第一章 流体的性质

§ 1-1	单 位	1-2
§ 1-2	因 次	1-7
§ 1-3	纯数, 有因次或无因次的常数和变数	1-10
§ 1-4	流体的粘性	1-12
§ 1-5	气体的粘度	1-15
§ 1-6	理想气体的膨胀和压缩	1-18

第二章 液体和气体的平衡

§ 2-1	流体中的压力和压力分布	2-2
§ 2-2	液体在重力下的平衡	2-3
§ 2-3	大 气 的 平 衡	2-5
§ 2-4	在其他力场中流体的平衡	2-8

第三章 流体动力学

§ 3-1	连 续 性 方 程	3-2
§ 3-2	不稳定流动的加速度	3-5
§ 3-3	伯 奴 利 方 程	3-9
§ 3-4	奈维-斯托克斯方程	3-14
§ 3-5	动 力 相 似 性	3-23
§ 3-6	层 流 与 湍 流	3-29
§ 3-7	流体的层流流动	3-31
§ 3-8	层流切应力、热传导与扩散	3-35
§ 3-9	湍流切应力、湍流传热和湍流传质	3-39

§ 3—1 0	粘性流体在光滑管和粗糙管中 流动时的压力降	3—46
§ 3—1 1	水力学直径	3—51
§ 3—1 2	流动分离与涡旋的形成	3—54
§ 3—1 3	物体和流体作相对运动时的阻力	3—58

第四章 能量平衡在流体运动中的应用

§ 4—1	管截面上的速度分布	4—1
§ 4—2	流体运动中的能量守恒	4—5
§ 4—3	粘性流体通过直管时的摩擦损失	4—7
§ 4—4	管道的突然扩大和收缩	4—9
§ 4—5	钢包出流	4—12
§ 4—6	流量的测量	4—14
§ 4—7	高炉冷风流量计的误差及校正	4—25

第五章 固定散料层

§ 5—1	比表面积和形状系数	5—2
§ 5—2	空隙度	5—5
§ 5—3	颗粒的平均粒度	5—7
§ 5—4	散料层的有效重	5—9
§ 5—5	流体流经散料层的压力降 ——札沃隆可夫方程	5—13
§ 5—6	流体流经散料层的压力降 ——柯曾尼(Kozeny)方程	5—18
§ 5—7	流体流经散料层的压力降 ——埃根(Ergun)方程	5—24
§ 5—8	散料层压力降方程的应用	5—27

第六章 边界层

§ 6-1 边界层厚度	6-1
一 边界层的物理厚度	6-3
二 边界层的位移厚度	6-3
三 边界层的动量厚度	6-5
§ 6-2 边界层的动量积分方程	6-6
§ 6-3 平板上湍流边界层的厚度	6-11
一 管内湍流流动的速度分布	6-12
二 平板上湍流边界层厚度	6-14
三 平板上纯湍流边界层的阻力系数	6-15
§ 6-4 平板上的复合边界层	6-16
§ 6-5 普朗特边界层方程及边界层的精确解	6-18
§ 6-6 管口的流动	6-26

第七章 因次分析与模型理论

§ 7-1 因次分析的基本用途	7-1
§ 7-2 无因次数	7-1
§ 7-3 白金汉定理 (π 定理)	7-3
§ 7-4 不可压缩、惰性、粘性液体的无因次方程	7-2
§ 7-5 单位的基本性质的数目	7-1'
§ 7-6 模型理论	7-20

第六章 边界层

在讨论伯努利方程时，曾假设流体没有粘性。在一定条件下，这项假设带来的误差并不大，譬如粘性流体在管中流动且 Re 数很大时，离开管壁一定距离以外的流体的速度都相同，速度分布线基本上平而直，这种速度分布线和理论上的无粘性流体相同，因此将适用于无粘性流体的各项方程用于这种状况也可求得满意结果。

但将无粘性流体的假设用来研究流体流动过程中的能量损耗就失败了，用来分析流体与固体界面的传热与传质过程时也失败了，这表明还需要进一步分析粘性流体的流动。精确的实验发现，流体在流动中，紧贴界面的一层流体中速度的变化很大，这一层被称为边界层，它有几种定义，将在下文中讨论。由于边界层很薄，而其中的速度则自壁面处的零改变到主流速度，所以 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 值很大，相等的切应力自然也很大，于是粘性流体在流动中对固体壁面的切应力都集中在边界层内，边界层以外的流体的粘性力则可忽略不计。如果流体与壁面存在温度或浓度的差异时，流体在流动中将发生传热和传质，阻碍传热与传质的阻力主要集中在边界层内，由此可见边界层的重要性。本章所讨论的仅仅是牛顿型流体，以后不再指出。

§6-1 边界层厚度

精确的实验发现，在边界层内，存在两类区域：①层流区；②湍流区。

在层流区内，由于流体具有粘性，在与流动相垂直的方向上存在速度差，相邻两层流体在流动过程中相互滑动，但相邻两层流体的质点的相互交换则很少，相互滑动表示切应力的存在，这种切应力完全由流体的粘性引起，也就是通过分子运动传递能量，称为粘

剪切应力。这在第三章中已详细叙述过。

在湍流区内，流体湍动运动，既在流体前进的方向上存在速度脉动，又在与前进方向相垂直的方向上存在速度的脉动，后一种速度的脉动使相邻两层流体的质点发生明显的交换。由于相邻流体存在速度差，质点随着质点的交换也带来了动量的交换，从而产生切应力，这种切应力称为湍流切应力。当 Re 数时，它在数量上显著超过层流切应力。

以流体经平板为例讨论边界层的实用意义，因为平板是冶金工程中多种设备的基本几何形状。

设以速度 V_∞ 平行流动的流体在流动中遇到一块平板，这里以 V_∞ 称为主流速度，未受平板干扰而形成的速度的流体称为主流。平板的端面为尖缘，由于流体具有粘性，可以设想总是有一层极薄极薄的流体层紧贴平板上，这层紧贴平板以外的流体由于和静止流体间存在切应力而产生减速，于是形成层流边界层，它的厚度以 δ 表示。随着流体向下游运动，有主流动量消失去克服切应力的阻碍上， δ 逐渐增厚，到达平板上某一点，层流转变为湍流。湍流区的切应力比层流区大得多，平板对流体运动的阻力可以迅速地增加到该点为地方，因此随着流体向下游运动，湍流边界层的厚度增长得很快，比层流边界层增长得更快，于是在平板上的边界层内可划分三个区，即层流区、转变区和湍流区，但即使在湍流区内，湍流边界层的下方，紧贴平板处仍然存在一个层流底层，这个层流底层的厚度与边界层相比是微不足道的，大约只有毫米的数十分之一，层流底层内的切应力又完全由于流体具有粘性而产生，平板上

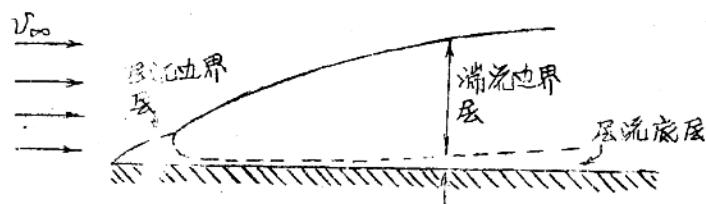


图 6-1 平板上的边界层

的边界层如图(6-1)所示。

边界层对流体流动时的动量传递、传热和传质具有重大影响，因此仅仅从性质上讨论还不够，需从数量上确定。首先要给边界层的厚度以明确定义，边界层厚度由于在不同的场合中为了方便表示而给予不同的定义。

一、边界层的物理厚度

自流体流速为零到流体速度相当主流速度99%或95%的厚度称为边界层的物理厚度，所以在迎接来流的板的端头处，边界层的物理厚度为零。

二、边界层的位移厚度 δ^*

设平流流动的流体在流动中流经一块无限宽的平板，在板上方形形成边界层，于是原先在平板端部，紧贴板的流层就成为边界层中流体的一部分，流体在进入边界层之前的质点速度与主流相同，而在进入边界层之后，由于有较大的切应力，质点速度降低了。设主流的质点速度为 $\rho_\infty U_\infty$ ，进入边界层后降低为 ρU ，按照连续性方程，流层截面积必须相应增加，在二维流动中，意味着边界层流层的厚度必须相应增加，于是主流流层亦相应向离开板的方向作轻微移动。

如果流体是无粘性的，那末在流经平板时不形成边界层，为了

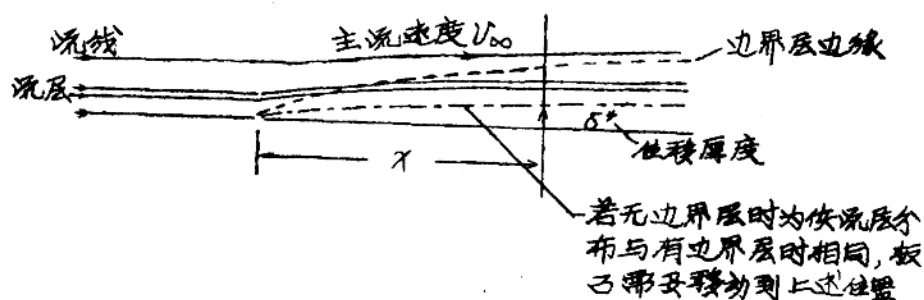


图 6-2 边界层的位移厚度

6-4

使主流流层和存在边界层时一样向外移动, 只有将平板移动若干距离, 这个距离就叫做边界层的位移厚度 δ^* , 如图(6-2)所示。

令 $\frac{y}{\delta} = \bar{y}$, $\frac{v}{v_{\infty}} = \bar{v}$, 则 $\bar{y}$ 和 $\bar{v}$ 都是无量纲值, 若边界层内的速度分布为 $\bar{v} = f(\bar{y})$, 边界层的位移厚度 δ^* 可按下述法计算。

在板上一点 x 处(图6-3), 在边界层厚度 δ 内的质点流量必须与厚度为 δ^* 内的质点流量相等。换句话说, 在边界层内的质点流量的差(相当面积 $OABR$)为

$$\int_0^{\delta} (\rho_{\infty} v_{\infty} - \rho v) dy$$

它必须和以主流的密度 ρ_{∞} 和速度 v_{∞} 流经位移边界层厚度 δ^* 内的质点流量(相当面积 $OPQR$), 即 $\rho_{\infty} v_{\infty} \delta^*$ 相等。

$$\text{于是 } \int_0^{\delta} (\rho_{\infty} v_{\infty} - \rho v) dy = \rho_{\infty} v_{\infty} \delta^*$$

$$\text{即 } \delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\rho v}{\rho_{\infty} v_{\infty}}\right) dy$$

$$\text{或 } \frac{\delta^*}{\delta} = \int_0^1 \left(1 - \frac{\rho v}{\rho_{\infty} v_{\infty}}\right) d\bar{y} \quad (6-1)$$

如果流体不可压缩, 则 $\rho = \rho_{\infty}$, 于是式(6-1)可改写为

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \int_0^1 (1 - \bar{v}) d\bar{y} \quad \dots (6-2)$$

于是位移边界层厚度

$$\delta^* = \delta \int_0^1 (1 - \bar{v}) d\bar{y}$$

上述位移边界层厚度是在二维流动的基础上推导而得, 因而仅适用于二维流动。如果流体沿

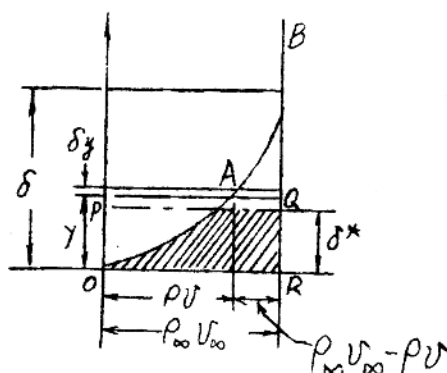


图6-3 在 x 点处的质点流量

曲线流动，曲线的曲率半径远远大于边界层厚度时，上述适用于三维流动的估算边界层厚度的计算方法仍然适用，但当曲线的曲率半径接近边界层厚度时，上述方法不适用。

三、边界层的动量厚度(θ)

边界层内流体的流速低于主流的流速，在物面处，高度为 δ_y 的边界层流层中，流体的质点动量为 $\rho v \delta y$ ，这部分流体的动量为 $\rho v^2 \delta y$ ，如果这部分流体具有主流的流速 U_∞ ，则动量为 $\rho U_\infty^2 \delta y$ ，后者大于前者，两者的差为：

$$\rho U_\infty (U_\infty - v) \delta y$$

现在定义动量厚度 θ 。

如果不存在边界层，在厚度为 θ 的流层内动量流率为 $\rho U_\infty^2 \theta$ ，

令

$$\int_0^\delta \rho U_\infty (U_\infty - v) dy = \rho U_\infty^2 \theta$$

$$\text{亦即 } \theta = \int_0^\delta \frac{\rho v}{\rho_\infty U_\infty^2} \left(1 - \frac{v}{U_\infty}\right) dy$$

$$\text{或 } \frac{\theta}{\delta} = \int_0^1 \frac{\rho v}{\rho_\infty U_\infty} \left(1 - \frac{v}{U_\infty}\right) d\bar{y} \quad (6-3)$$

由上述可见，边界层内流体的质点动量若以主流速度流动时动量流率要大于以实际速度流动时的动量流率。不存在边界层时每度为 θ 的流层内的动量流率与两者的差相等时，该流层厚度称为边界层的动量厚度。

当流体不可压缩时，得

$$\frac{\theta}{\delta} = \int_0^1 \bar{v} (1 - \bar{v}) d\bar{y}$$

§6-2 边界层的动量积分方程

如果已知边界层内的速度分布, 那末可以利用比较简单的动量积分方程来计算不可压缩流体稳定流经平板时的边界层厚度的增长率以及阻力。此法的数学运算较少, 但对工程问题来说, 精确度是足够的了。

参看图(6-4), 选取上边为 x 和 $x+\Delta x$ 的一段边界层, 因为是二维流动, 可以取四个控制面, 其中 AB 和 CD 垂直 x 轴, 间隔距离为 Δx ; 平行于 x 轴的 BC 面也是一个控制面, 平板上取 AD 为控制面。四个控制面都具有单位宽度, 所以宽度在方程中将不出现。

流入控制面 AB 的流体质量流量为

$$W_x = \int_0^h \rho v_x dy \quad (6-4)$$

于是动量流量为

$$M_x = \int_0^h \rho v_x^2 dy \quad (6-5)$$

流出控制面 CD 的流体质量流量为

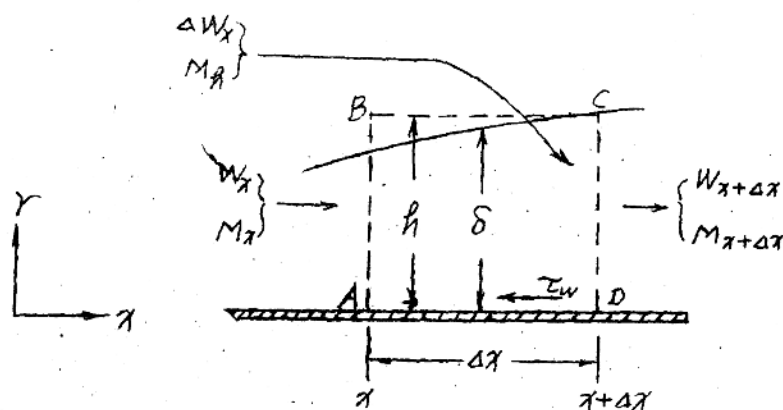


图 6-4 平板上边界层内流体的质量与动量

$$W_{x+\Delta x} = \int_0^h \rho v_x dy + \frac{d}{dx} \left\{ \int_0^h \rho v_x dy \right\} \Delta x \quad (6-6)$$

流进控制面 CD 的流体动量流率为

$$M_{x+\Delta x} = \int_0^h \rho v_x^2 dy + \frac{d}{dx} \left\{ \int_0^h \rho v_x^2 dy \right\} \Delta x \quad (6-7)$$

于是在区间 $x+\Delta x$ 中动量流率的变化为

$$\Delta W_x = W_{x+\Delta x} - W_x = \frac{d}{dx} \left\{ \int_0^h \rho v_x dy \right\} \Delta x \quad (6-8)$$

既然控制面 AD 是平板本身，不可能有流体穿越，所以为了满足连续性方程，必有一部分流体穿越控制面 BC 进入，这部分流体为 ΔW_x ，它具有主流流速 v_∞ ，带入的动量为

$$M_f = \Delta W_x \cdot v_\infty \quad (6-9)$$

单位边界层中所得到的动量等于失去的动量减去获得的动量，即

$$M_{x+\Delta x} - M_x - M_f \quad (6-10)$$

由动量定律知，单位时间内动量的改变相当于一个力，因此单位边界层所获得的动量必等于在板面 Δx 距离内所作用的切应力，所以

$$M_{x+\Delta x} - M_x - M_f = -\tau_w \cdot \Delta x \quad (6-11)$$

$$\text{又} \quad \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} = \tau_w \quad (6-12)$$

所以得

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int_0^h \rho v_x^2 dy \right\} \Delta x - v_\infty \frac{d}{dx} \left\{ \int_0^h \rho v_x dy \right\} \Delta x = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} \cdot \Delta x$$

..... (6-13)

将自 0-h 的积分分为两段，即

$$\int_0^h = \int_0^\delta + \int_\delta^h$$

而且当 δ 和 h 间， $v_x = v_\infty$ ，设 ρ 和 μ 为常数，于是式 (6-13)

6-5

可简化为

$$\rho \frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta} (v_{\infty} - v_x) v dy \right] = \tau_w \quad (6-14)$$

$$\text{令 } \frac{v_x}{v_{\infty}} = \bar{v}, \quad \frac{y}{\delta} = \bar{y}$$

则上式变为

$$\tau_w = \rho v_{\infty}^2 \frac{d}{dx} \left[\delta \int_0^1 \bar{v}(1-\bar{v}) d\bar{y} \right] \quad (6-15)$$

$$\text{但 } \delta \int_0^1 \bar{v}(1-\bar{v}) d\bar{y} =$$

$$\text{所以 } \tau_w = \rho v_{\infty}^2 \frac{d}{dx} \left[\delta \int_0^1 \bar{v}(1-\bar{v}) d\bar{y} \right] = \rho v_{\infty}^2 \frac{d\theta}{dx} \quad \dots\dots (6-16)$$

在边界层理论中, 当物体在粘性流体中运动时, 阻力集中边界层中, 因此

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_w = C_f \rho \frac{v^2}{2} \quad (6-17)$$

式中 C_f 为阻力系数。

比较式(6-16)和式(6-17)得

$$C_f = 2 \frac{d\theta}{dx} \quad (6-18)$$

$$\text{令 } \int_0^1 \bar{v}(1-\bar{v}) d\bar{y} = I, \text{ 则}$$

$$C_f = 2I \frac{d\delta}{dx} \quad (6-19)$$

由上式可见, I 取决于在 y 方向上的速度分布, 在一定的分布下, I 可以积分, 而且具有一定数值, 边界层内的速度分布有许多关系式, 现用其中一个最简单的, 即

$$\bar{v} = \sin \frac{\pi}{2} \bar{y} \quad (6-20)$$

现在利用式(6-20)推导平板上边界层厚度的增长率。已知

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2} = \frac{2\mu}{\rho V_\infty^2} \left(\frac{dV_x}{dy} \right)_w$$

$$\left(\frac{dV_x}{dy} \right)_w = \frac{V_x}{\delta} \left(\frac{d\bar{v}}{d\bar{y}} \right)_w = \frac{V_\infty}{\delta} D_0$$

其中, 令 $D_0 = \left(\frac{d\bar{v}}{d\bar{y}} \right)_w$,

于是
$$C_f = \frac{2\mu}{\rho V_\infty \delta} D_0$$

由式(6-19)得

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{C_f}{2I} = \frac{\mu}{\rho V_\infty \delta} \cdot \frac{D_0}{I} \quad (6-21)$$

分离变量得

$$\delta d\delta = \frac{\mu}{\rho V_\infty} \cdot \frac{D_0}{I} dx$$

积分上式得

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{\mu x}{\rho V_\infty} \cdot \frac{D_0}{I} + C \quad (6-22)$$

式中 C 为积分常数。

当 $x=0$ 时 $\delta=0$, 所以 $C=0$ 。又令 $\frac{\rho V_\infty x}{\mu} = Re_x$, 则式(6-22)可写为

$$\delta = \sqrt{\frac{2D_0}{I}} \cdot \frac{x}{Re_x^{1/2}} \quad (6-23)$$

式(6-23)中的 D_0 与 I 取决于边界层中的速度分布, 如果用式(6-20)的关系式, 即 $\bar{v} = \sin \frac{\pi}{2} \bar{y}$

$$\therefore \frac{dv}{dy} = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \bar{y} \quad (6-24)$$

紧贴板面处 $\bar{y}=0$, $\left(\frac{d\bar{v}}{d\bar{y}} \right)_w = \frac{\pi}{2}$, 因而 $D_0 = \frac{\pi}{2} = 1.571$ 。

$$\text{又 } I = \int_0^1 \bar{v}(1-\bar{v}) d\bar{y} = \int_0^1 \left(\sin \frac{\pi}{2} \bar{y} - \sin^2 \frac{\pi}{2} \bar{y} \right) d\bar{y},$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[-\cos \frac{\pi}{2} \bar{y} - \frac{\pi}{4} \bar{y} + \sin \frac{\pi \bar{y}}{4} \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = 0.137 \quad (6-25)$$

$$\text{因此 } \sqrt{\frac{2D_0}{I}} = \sqrt{\frac{3.142}{0.137}} = 4.79$$

代入式(6-23)得

$$\delta = \frac{4.79x}{Re_x^{1/2}} \quad (6-26)$$

上式称为层流边界层厚度的近似解。(注:若边界层的温度分布线

为 $\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3$, 则称 $\delta = \frac{4.64x}{Re_x^{1/2}}$, 其中系数与 4.79

相差很小。)

例:平板上层流边界层的速度分布可以下式表示

$$\bar{v} = A\bar{y} - B\bar{y}^3$$

式中A与B为常数, 当空气流速为 30 米·秒⁻¹, 按此式计算平板端部以后一米处的边界层厚度。

解:由式(6-23)知

$$\delta = \sqrt{\frac{2D_0}{I}} \cdot \frac{x}{Re_x^{1/2}}$$

$$\text{式中 } D_0 = \left(\frac{d\bar{v}}{d\bar{y}} \right)_w, \quad I = \int_0^1 \bar{v}(1-\bar{v})d\bar{y}.$$

首先确定A和B值, 在速度分布的外缘, 即

$$\bar{y}=1, \quad \bar{v}=1, \quad \frac{d\bar{v}}{d\bar{y}}=0$$

代入题中所给的近似式, 得,

$$A - B = 1 \quad (1)$$

将近似式求微商, 得 $\frac{d\bar{v}}{d\bar{y}} = A - 3B\bar{y}^2$

$$\text{即 } A - 3B = 0 \quad (2)$$

联立求解(1)及(2)式, 得 $A = \frac{3}{2}$, $B = \frac{1}{2}$ 。

于是此似式为 $\bar{v} = \frac{3}{2}\bar{y} - \frac{1}{2}\bar{y}^3$ (3)

$$\frac{d\bar{v}}{d\bar{y}} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\bar{y}^2, \text{ 于是 } D_0 = \frac{3}{2}$$

$$I = \int_0^1 (A\bar{y} - B\bar{y}^3)(1 - A\bar{y} + B\bar{y}^3) d\bar{y} = \frac{A}{2} - \frac{A^2}{3} + \frac{2AB}{5} - \frac{B}{4} - \frac{B^2}{7}$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{9}{12} + \frac{6}{20} - \frac{1}{8} - \frac{1}{28} = \frac{39}{280}$$

$$\text{于是 } \delta = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{3}{2}}{\frac{39}{280}}} - \frac{\pi}{Re_x^{1/2}} = 4.64 \frac{\pi}{Re_x^{1/2}}$$

$$Re_x = \frac{\rho \bar{v}_{\infty} x}{\mu} = \frac{30 \times 1}{14.6 \times 10^{-6}} = 2.05 \times 10^6$$

$$\text{于是 } \delta = \frac{4.64 \times 1}{\sqrt{2.05} \times 10^3} = 3.22 \times 10^{-3} \text{ 米} = 3.22 \text{ 毫米}。$$

即在平板端部以后一米处的层流边界层的厚度为 3.22 毫米。

§6-3 平板上端流边界层的厚度

以边界层厚度 δ 为特征长度的雷诺数写作 $Re_\delta = \frac{v_\infty \delta}{\nu}$ 。实验证明, 大约 $Re_\delta > 1500$ 时边界层内流体的速度梯度较大, 使层流激发为湍流。如果平板不光滑, 或者来流本身就带有湍动, 形成湍流的临界 Re_δ 还要低于 1500。但是即使生临界 Re_δ 以上, 在平板端部边界层仍为零, 而在紧靠端部处, 仍然存在层流边界层, 虽然它可能很薄。

由式(6-26)知, 层流边界层厚度随 x 的增加而变厚, 即

$$\delta = 4.79 \times Re_x^{-\frac{1}{2}} = 4.79 v_x^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \nu^{\frac{1}{2}} \quad (6-27)$$

以式(6-27)代入 Re_δ , 得

$$Re_b = 4.79 U_x^{1/2} \chi^{1/2} \nu^{-1/2} U^{1/2} \nu^{-1/2} = 4.79 U_x^{1/2} \chi^{1/2} \nu^{-1/2}$$

如果 $Re_b = 1500$ 时, 流动变为湍流, 代入上式得

$$\chi = 99230 \cdot \frac{\nu}{U_\infty} \cong 70^5 \cdot \frac{\nu}{U_\infty} \quad (6-28)$$

也可写为

$$Re_\chi = 10^5 \quad (6-29)$$

以水为例, $\nu = 10^{-6} \text{ 米}^2 \cdot \text{秒}^{-1}$, 取 $\chi = 0.1 \cdot \frac{1}{U_\infty} \text{ 米}$, 如果 $U_\infty = 10 \text{ 米} \cdot \text{秒}^{-1}$, 则 $\chi = 10^{-2} \text{ 米}$, 如果 $U_\infty = 10^2 \text{ 米} \cdot \text{秒}^{-1}$, 则 $\chi = 10^{-3} \text{ 米}$, 所以随主流速度的增加, 层流边界层的长度不断减小, 愈来愈接近平板端部, 而湍流边界层的长度则不断增加。分析湍流边界层的比较简单的方法是利用层流中完全发展了的湍流的实验式, 即勃拉修斯 (Blasius) 关系式。

一、管内湍流流动的速度分布

流体在管内流动, Re 不大于 2.5×10^5 时, 勃拉修斯建议采用以下关系式:

$$C_f = 0.0791 Re^{-1/4} \quad (6-30)$$

设管内流体的速度分布可以下式表示

$$\frac{U_x}{U_{x1}} = \left[\frac{y}{(D/2)} \right]^n = \left(\frac{y}{a} \right)^n \quad (6-31)$$

式中速度 U_x 是距管壁 y 处的流体速度, D 为管径, a 为管壁半径。

将管壁中心的流速用管内流体的平均流速 $\bar{U}_x$ 表示, 得 $\bar{U}_{x1} = k \bar{U}_x$, k 为常数, 则

$$U = k \bar{U}_x \left(\frac{y}{a} \right)^n$$

$$\text{即 } \bar{U}_x = \frac{U}{k} \left(\frac{y}{a} \right)^n \quad (6-32)$$

今以勃拉修斯关系式计算管壁处的切应力

$$\tau_w = C_f \frac{1}{2} \rho \bar{v}_x^2 = \frac{0.0791 \nu^{\frac{1}{4}}}{D^{\frac{1}{4}} \cdot \bar{v}_x^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{1}{2} \rho \bar{v}_x^2 = 0.03955 \rho \bar{v}_x^{\frac{7}{4}} \left(\frac{\nu}{D}\right)^{\frac{1}{4}}$$

由方程 (6-32), $\bar{v}_x^{\frac{7}{4}} = \frac{v_x^{\frac{7}{4}}}{k^{\frac{7}{4}}} \left(\frac{a}{y}\right)^{\frac{7n}{4}}$

$$\therefore \tau_w = \frac{0.03955}{k^{\frac{7}{4}}} \rho v_x^{\frac{7}{4}} \cdot \frac{a^{\left(\frac{7n}{4} - \frac{7}{4}\right)}}{y^{\frac{7n}{4}}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\tau_w = \frac{0.0333}{k^{\frac{7}{4}}} \rho v_x^{\frac{7}{4}} \cdot \frac{\nu}{y^{\frac{7n}{4}}} \cdot a^{\left[\frac{7n}{4} - \frac{1}{4}\right]} \quad (6-33)$$

在紧贴管壁的层流边界内, 流体速度 v_x 与管径直径无关, 亦即 $v_x = f(a)$, 为了在 (6-33) 式中使 a 不影响 τ_w , 必然存在 $\frac{7n}{4} - \frac{1}{4} = 0$, 于是 $n = \frac{1}{7}$, 以此代入式 (6-31), 遂得

$$\frac{v_x}{v_{x1}} = \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{7}} \quad (6-34)$$

式 (6-34) 为普朗特-特维施提出的管内湍流速度分布的七分之一方根规律。

当管径直径很大时, 这规律仍然适用, 而平板可看作是管径直径无限大时的一块管壁, 因此也可用于平板。若以 δ 代 a , 对平板来说, 存在

$$\frac{v_x}{v_{\infty}} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \quad \text{或} \quad \bar{v} = \bar{y}^{\frac{1}{7}} \quad (6-35)$$

当 $Re_x < 10^6$ 时, 上式与实验结果相当符合, 但不适用于管壁处, 现将式 (6-34) 用于式 (6-33) 以计算管壁处的切应力, 重确定 k 值。管内层流为

$$\begin{aligned} \pi a^2 \bar{v} &= 2\pi \int_0^a v_x r dr = 2\pi \bar{v} k \int_0^a \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{7}} (a-y) dy \\ &= \frac{49}{60} \pi \bar{v} k a^2 \end{aligned}$$

式中 a, r 与 y 的关系如图 (6-5) 所示, 因此 $\frac{a}{y} = \frac{60}{49} = 1.224$.

于是式 (6-33) 可写为

$$\tau_w = 0.0234 \rho v_x^{\frac{7}{4}} \left(\frac{v}{y} \right)^{\frac{1}{4}}$$

将上式用于平板 (相当直径很大的圆边中带有较小圆周长的一次圆壁) 时, 应用式 (6-35) 代入上式, 得

$$\tau_w = 0.0234 \rho v_\infty^{\frac{7}{4}} \left(\frac{r}{\delta} \right)^{\frac{1}{4}}$$

因为 $C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2}$,

所以在平板上的边界层内

$$C_f = 0.0468 \left(\frac{r}{v_\infty \delta} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{0.0468}{Re_b^{\frac{1}{4}}} \quad (6-36)$$

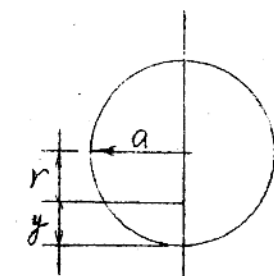


图 6-5. a, r 与 y 的关系

上式是由管内速度分布的七分之一次方根规律导出的平板湍流边界层的阻力系数方程, 应用上式可以确定湍流边界层厚度。

二、平板上湍流边界层厚度

由式 (6-21) 知,

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{C_f}{2I}$$

而式 (6-36), $C_f = 0.0468 \left(\frac{r}{v_\infty \delta} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (6-36)$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \bar{v}(1-\bar{v}) d\bar{y} = \int_0^1 \bar{y}^{\frac{1}{4}} (1-\bar{y}^{\frac{1}{4}}) d\bar{y} \\ &= \left[\frac{7}{8} \bar{y}^{\frac{8}{7}} - \frac{7}{9} \bar{y}^{\frac{9}{7}} \right]_0^1 = \frac{63-56}{72} = \frac{7}{72} \end{aligned} \quad (6-37)$$

代入式 (6-21), 得

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{72 \times 0.0468 r^{\frac{1}{4}}}{2 \times 7 \times (v_\infty \delta)^{\frac{1}{4}}}$$