文登学校数学辅导材料系列之三

高等数学试题分析及解答

（经济类）

（1987年—2004年全国硕士研究生考试试题）

北京文登培训学校

目 录

第一章 函数·极限·连续

一、填空题

1.(1990 数学三、四) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$ $\underline{2}$.

【解】 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}=2.$$

2.(1992 数学四) 已知$f(x)=\sin x$,$f[\varphi(x)]=1-x^2$,则$\varphi(x)=$ $\underline{\arcsin(1-x^2)}$ 的定义域为$\underline{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}$.

【解】 由题设,$f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)$,因此$\sin\varphi(x)=1-x^2$.由此解得$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$.定义域为$|1-x^2|\leqslant 1$,即$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

3.(1993 数学三) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=$ $\underline{\dfrac{6}{5}}$.

【解】 因为当$x\to\infty$时$\sin\dfrac{2}{x}\sim\dfrac{2}{x}$,所以原式$=2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{(5x+3)x}=\dfrac{6}{5}$.

4.(1993 数学四) $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]=$ $\underline{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

【解】 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2}}[\sqrt{n(n+1)}-\sqrt{(n-1)n}]$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{(n-1)n}}=\frac{2}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

5.(1999 数学四) 设函数$f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=$ $\underline{\dfrac{1}{2}\ln a}$.

【解】 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln[a^1a^2\cdots a^n]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln a^{\frac{n(n+1)}{2}}=\dfrac{\ln a}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{n^2}=\dfrac{1}{2}\ln a$.

6.(2000 数学四) 若$a>0,b>0$均为常数,则$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{a^x+b^x}{2})^{\frac{3}{x}}=$ $\underline{(ab)^{\frac{3}{2}}}$.

【解】 原式$=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{a^x+b^x}{2}-1)\cdot\dfrac{3}{x}\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3(a^x+b^x-2)}{2x}\right\}$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{3(a^x\ln a+b^x\ln b)}{2}\right\}=\exp\left\{\frac{3(\ln a+\ln b)}{2}\right\}=(ab)^{\frac{3}{2}}.$$

7.(2002 数学三、四)　设常数 $a \neq \frac{1}{2}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n = \underline{\quad \frac{1}{1-2a} \quad}$.

【解】　原式 $= \ln\left[\exp\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-2na+1-n+2na)n}{n(1-2a)}\right] = \frac{1}{1-2a}$.

8.(2003 数学四)　极限 $\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}} = \underline{\quad e^2 \quad}$.

【解】　$\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{2}{x}\ln[1+\ln(1+x)]}$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln[1+\ln(1+x)]}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x)}{x}} = e^2$.

【评注】　对于 1^∞ 型未定式 $\lim f(x)^{g(x)}$ 的极限，也可直接用公式 $\lim f(x)^{g(x)}(1^\infty) = e^{\lim(f(x)-1)g(x)}$ 进行计算，因此本题也可这样求解：

$$\lim_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x}\ln(1+x)} = e^2.$$

9.(2004 数学三、四)若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b) = 5$,则 $a = \underline{\quad 1 \quad}$,$b = \underline{\quad -4 \quad}$.

【解】　因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b) = 5$,且 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot(\cos x-b) = 0$,

所以 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-a) = 0$,得 $a = 1$. 极限化为

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}(\cos x-b) = 1-b = 5$,得 $b = -4$.

因此,$a = 1, b = -4$.

二、选择题

1.(1987 数学三)　函数在其定义域内连续的是

(A) $f(x) = \ln x + \sin x$.　　(B) $f(x) = \begin{cases}\sin x, & x \leqslant 0,\\ \cos x, & x > 0.\end{cases}$

(C) $f(x) = \begin{cases}x+1, & x < 0\\ 0, & x = 0,\\ x-1, & x > 0.\end{cases}$　　(D) $f(x) = \begin{cases}\frac{1}{\sqrt{|x|}}, & x \neq 0\\ 0, & x = 0.\end{cases}$　　【A】

【解】　$\ln x$ 和 $\sin x$ 都是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，其和也是连续函数，故选(A). 其余各选项的函数都在 $x = 0$ 处间断.

2.(1987 数学四)　函数在其定义域连续的是

(A) $f(x) = \frac{1}{x}$.　　(B) $f(x) = \begin{cases}\sin x, & x \leqslant 0,\\ \cos x, & x > 0.\end{cases}$

(C) $f(x) = \begin{cases}x+1, & x < 0\\ 0, & x = 0,\\ x-1, & x > 0.\end{cases}$　　(D) $f(x) = \begin{cases}\frac{1}{|x|}, & x \neq 0\\ 0, & x = 0.\end{cases}$　　【A】

【解】　$f(x) = \frac{1}{x}$ 在其定义域 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上连续，故选(A).

3.(1989 数学三、四)　设 $f(x) = 2^x + 3^x - 2$,则当 $x \to 0$ 时

(A) $f(x)$ 与 x 是等阶无穷小量.　　(B) $f(x)$ 与 x 同阶但非等价无穷小量.

(C) $f(x)$ 是比 x 较高阶的无穷小量.　(D) $f(x)$ 是比 x 较低阶的无穷小量.　【B】

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+3^x-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x\ln 2+3^x\ln 3}{1}=\ln 2+\ln 3\neq 1$,故选(B).

4.(1990 数学三、四)　设函数 $f(x)=x\tan x\cdot e^{\sin x}$,则 $f(x)$ 是

(A) 偶函数.　(B) 无界函数.

(C) 周期函数.　(D) 单调函数.　【B】

【解】 当 $x\to(2n+1)\dfrac{\pi}{2}(n\in Z)$ 时,$\tan x\to\infty$,从而 $f(x)\to\infty$,所以 $f(x)$ 是无界函数.

5.(1991 数学三、四)　下列各式中正确的是

(A) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\dfrac{1}{x})^x=1$.　(B) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$.

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^x=-e$.　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{-x}=e$.　【A】

【解】 选项(A)和(B)是 ∞^0 型极限,而(C)和(D)是 1^∞ 型极限.计算如下:

(A) 左边 $\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim\limits_{t\to+\infty}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{1+t}}=e^0=1$. 故应选(A).从而(B)是错误的.

(C) 左边 $=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(-\frac{1}{x})\cdot x}=e^{-1}\neq -e$. 故(C)错.

(D) 左边 $=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot(-x)}=e^{-1}\neq e$. 故(D)错.

6.(1991 数学四)　设数列的通项为 $x_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & 若\ n\ 为奇数,\\ \dfrac{1}{n}, & 若\ n\ 为偶数,\end{cases}$ 则当 $n\to\infty$ 时,x_n 是

(A) 无穷大量.　(B) 无穷小量.

(C) 有界变量.　(D) 无界变量.　【D】

【解】 因为子数列 $\{x_{2m}\}$ 的极限 $\lim\limits_{m\to\infty}x_{2m}=0$,而子数列 $\{x_{2m-1}\}$ 的极限 $\lim\limits_{m\to\infty}x_{2m-1}=+\infty$,所以 x_n 不是无穷小量,也不是无穷大量,实际上是无界变量.故选(D).

7.(1992 数学三)　当 $x\to 0$ 时,下列四个无穷小量中,哪一个是比其他三个更高阶的无穷小量?

(A) x^2.　(B) $1-\cos x$. $\sim\frac{1}{2}x^2$

(C) $\sqrt{1-x^2}-1$.　(D) $x-\tan x$.　【D】

【解】 根据无穷小代换公式,有

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,$$

$$\sqrt{1-x^2}-1\sim-\frac{1}{2}x^2,$$

$$x-\tan x\sim-\frac{1}{3}x^3,$$

最后一式可由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^3}=-\dfrac{1}{3}$ 得到.比较以上各式,应选(D).

8.(1992 数学三、四)　设 $F(x)=\dfrac{x^2}{x-a}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 为连续函数，则 $\lim\limits_{x\to a}F(x)$ 等于

(A)a^2.　　(B)$a^2f(a)$.

(C)0.　　(D) 不存在.　　【B】

【解】　由洛必达法则和 $f(x)$ 的连续性

$$\lim_{x\to a}F(x)=\lim_{x\to a}\frac{x^2\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2x\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+x^2f(x)}{1}=a^2f(a).\text{故选(B).}$$

9.(1997 数学三)　设 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\,\mathrm{d}t,g(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的

(A) 低阶无穷小.　　(B) 高阶无穷小.

(C) 等价无穷小.　　(D) 同阶但不等价的无穷小.　　【B】

【解】　由洛必达法则及等价无穷小替换

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin[(1-\cos x)^2]\cdot\sin x}{x^4+x^5}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2\cdot x}{x^4+x^5}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\frac{1}{2}x^2)^2}{x^3+x^4}=0,\text{故选(B).}$$

10.(1997 数学四)　设 $f(x),\varphi(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内连续，且当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的高阶无穷小，则当 $x\to 0$ 时，$\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$ 是 $\int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ 的

(A) 低阶无穷小.　　(B) 高阶无穷小.

(C) 同阶但不等价的无穷小.　　(D) 等价无穷小.　　【B】

【解】　因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t}{\int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\sin x}{x\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=0$，故选(B).

11.(1998 数学三、四)　设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f(x)$ 的间断点，其结论为

(A) 不存在间断点.　　(B) 存在间断点 $x=1$.

(C) 存在间断点 $x=0$.　　(D) 存在间断点 $x=-1$.　　【B】

【解】　分 3 种情况求极限，得

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & \text{当}|x|<1\text{时},\\ \dfrac{1+x}{2}, & \text{当}|x|=1\text{时},\\ 0, & \text{当}|x|>1\text{时}.\end{cases}$$

可知在 $x=1$ 处 $f(x)$ 间断，故选(B).

12.(2000 数学三、四)　设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，

则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$

(A) 存在且一定等于零. (B) 存在但不一定为零.

(C) 一定不存在. (D) 不一定存在. 【D】

【解】 取$\varphi(x)=f(x)=g(x)=x$,题设条件均满足,但$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$(不存在). 又取$\varphi(x)=f(x)=g(x)=0$,此时$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$(存在). 故应选(D).

13. (2002 数学二、四) 设函数 $f(x)$ 连续,则在下列变上限定积分定义的函数中,必为偶函数的是

(A)$\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$. (B)$\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$.

(C)$\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$. (D)$\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$. 【A】

【解】 (排除法)取 $f(t)=t$,则选项(B),(C)和(D)的积分均为$\int_0^x t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}x^3$,排除这三个选项. 故选(A).

14. (2004 数学三、四) 函数 $f(x)=\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界.

(A)$(-1,0)$. (B)$(0,1)$

(C)$(1,2)$. (D)$(2,3)$ 【A】

【解】 当 $x\neq 0,1,2$ 时,$f(x)$ 连续,而 $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=-\frac{\sin3}{18}$,$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\frac{\sin2}{4}$,

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\frac{\sin2}{4}$,$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty$,$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\infty$,

所以,函数 $f(x)$ 在$(-1,0)$内有界,故选(A).

15. (2004 数学三、四) 设 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内有定义,且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$,

$g(x)=\begin{cases} f(\frac{1}{x}), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$,则

(A)$x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点.

(B)$x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点.

(C)$x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点.

(D)$g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关. 【D】

【解】因为$\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}f(\frac{1}{x})=\lim\limits_{u\to\infty}f(u)=a$(令 $u=\frac{1}{x}$),又 $g(0)=0$,所以,

当 $a=0$ 时,$\lim\limits_{x\to0}g(x)=g(0)$,即 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

当 $a\neq0$ 时,$\lim\limits_{x\to0}g(x)\neq g(0)$,即 $x=0$ 是 $g(x)$ 的第一类间断点,因此,$g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关,故选(D).

三、计算证明题

1.(1987 数学四)　求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\text{arccot}x}$.

【解】　原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\text{arccot}x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x^2}{x^2}=1.$

2.(1987 数学三)　求极限$\lim\limits_{x\to0}(1+xe^x)^{\frac{1}{x}}$.

【解】　原式$=\lim\limits_{x\to0}[(1+xe^x)^{\frac{1}{xe^x}}]^{e^x}=e.$

或　原式$=\exp\left\{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+xe^x)}{x}\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+xe^x}{1+xe^x}\right\}=e.$

或　原式$=\exp\left\{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^x}{x}\right\}=e.$

3.(1988 数学四)　求极限$\lim\limits_{x\to1}(1-x^2)\tan\dfrac{\pi}{2}x$.

【解】　原式$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{\cot\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-2x}{-\frac{\pi}{2}\csc^2\frac{\pi}{2}x}=\dfrac{4}{\pi}.$

4.(1988 数学三)　求极限$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}$.

【解】　令$t=x\ln x$,则$x^x=e^{x\ln x}=e^t$.于是,原式$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^t-1}{t}=1.$

5.(1989 数学三)　求极限$\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^x$.

【解】　令$t=\dfrac{1}{x}$,有

原式$=\lim\limits_{t\to0}(\sin t+\cos t)^{\frac{1}{t}}=\exp\left\{\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t+\cos t-1}{t}\right\}=\exp\{\lim\limits_{x\to0}(\cos t-\sin t)\}=e.$

6.(1989 数学四)　求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

【解】　原式$=\exp\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+e^x)}{x}\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+e^x}{x+e^x}\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}\right\}=\exp\{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}\}$

$=e.$

7.(1990 数学四)　求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x(1+t^2)e^{t^2-x^2}dt$.

【解】　根据洛必达法则

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x(1+t^2)e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x^2)e^{x^2}}{(1+2x^2)e^{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

8.(1991 数学三)　求极限$\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n})^{\frac{1}{x}}$,其中$n$是给定的自然数.

【解】　原式$=\exp\left\{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}{nx}\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx}}{n}\right\}$

$$= \exp\left\{\frac{1+2+\cdots+n}{n}\right\} = e^{\frac{n+1}{2}}.$$

9.(1991 数学四) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.

【解】 原式 $= \exp\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\right\} = \exp\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right\} = e^0 = 1.$

10.(1992 数学三) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}, & 若\ x\neq 1,\\ 1, & 若\ x=1,\end{cases}$ 问函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否连续?若不连续，修改函数在 $x=1$ 处的定义，使之连续.

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-\sin(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x\cdot\cos(x-1)}$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{\cos(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}$$

$$=-\frac{4}{\pi^2}\neq f(1),$$

所以函数在 $x=1$ 处不连续，若修改定义令 $f(1)=-\frac{4}{\pi^2}$，则函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

11.(1992 数学四) 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-\sin(x-1)}{\cos(x-1)(-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x)}=\dfrac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x-1)}{\cos\frac{\pi}{2}x}$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{\cos(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}=-\frac{4}{\pi^2}.$$

12.(1994 数学三、四) 设函数 $f(x)$ 可导，且

$$f(0)=0, F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\,dt,$$

求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)}{x^{2n}}$.

【解】 设 $x^n-t^n=u$，则 $-nt^{n-1}dt=du$. 当 $t=0$ 时，$u=x^n$；当 $t=x$ 时，$u=0$. 于是

$$F(x)=\frac{1}{n}\int_0^{x^n}f(u)\,du,\quad F'(x)=x^{n-1}f(x^n).$$

故 $$\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{x^{2n}}=\lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{2nx^{2n-1}}=\frac{1}{2n}\lim_{x\to0}\frac{f(x^n)}{x^n}=\frac{1}{2n}\lim_{x\to0}\frac{f(x^n)-f(0)}{x^n-0}=\frac{1}{2n}f'(0).$$

【注】 本题在数学四中是证明题，证明 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)}{x^{2n}}=\dfrac{f'(0)}{2n}$.

13.(1994 数学四) 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$.

【解】 令 $x=\frac{1}{t}$,则原式$=\lim\limits_{t\to 0}[\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)]=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\frac{1}{2}.$$

14.(1997 数学四) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}[\frac{a}{x}-(\frac{1}{x^2}-a^2)\ln(1+ax)](a\neq 0)$.

【解】 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax-(1-a^2x^2)\ln(1+ax)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a+2a^2x\ln(1+ax)-a(1-ax)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2a^2\ln(1+ax)+\frac{2a^3x}{1+ax}+a^2}{2}=\frac{a^2}{2}.$$

15.(1998 数学四) 求$\lim\limits_{n\to\infty}(n\tan\frac{1}{n})^{n^2}$($n$为自然数).

【解】 由函数极限求数列极限的方法,有

$$\lim_{x\to 0^+}(\frac{\tan x}{x})^{\frac{1}{x^2}}=\exp\left\{\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x-x}{x^3}\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to 0^+}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan^2x}{3x^2}\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{3x^2}\right\}=e^{\frac{1}{3}}.$$

则 原式$=e^{\frac{1}{3}}$.

16.(2001 数学三、四) 已知 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内可导,且

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=e,$$

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+c}{x-c})^x=\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)],$$

求 c 的值.

【解】 根据 1^∞ 型极限计算公式,

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+c}{x-c})^x=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}(\frac{x+c}{x-c}-1)x\right\}=e^{2c}.$$

对 $f(x)$ 在区间$[x-1,x]$上使用拉格朗日定理,有

$$f(x)-f(x-1)=f'(\xi),\quad x-1<\xi<x.$$

于是 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim\limits_{\xi\to\infty}f'(\xi)=e$.

由题设,$e^{2c}=e$,解得 $c=\frac{1}{2}$.

17.(2002 数学三、四) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)dt]du}{x(1-\cos x)}$.

【解】 原式$=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)dt]du}{x^3}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)dt}{3x^2}$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{2x\arctan(1+x^2)}{6x} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}.$$

18.(2003 数学三) 设 $f(x)=\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)},\ x\in[\frac{1}{2},1)$.

试补充定义 $f(1)$ 使得 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上连续.

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}[\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}]$

$$=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\lim_{x\to 1^-}\frac{\pi(1-x)-\sin\pi x}{(1-x)\sin\pi x}$$

$$=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\lim_{x\to 1^-}\frac{-\pi-\pi\cos\pi x}{-\sin\pi x+(1-x)\pi\cos\pi x}$$

$$=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\lim_{x\to 1^-}\frac{\pi^2\sin\pi x}{-\pi\cos\pi x-\pi\cos\pi x-(1-x)\pi^2\sin\pi x}=\frac{1}{\pi}.$$

由于 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1)$ 上连续，因此定义 $f(1)=\frac{1}{\pi}$，则 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上连续.

【评注】 本题实质上是一求极限问题，但以这种形式表现出来，还考查了连续的概念. 在计算过程中，也可先作变量代换 $y=1-x$，转化为求 $y\to 0^+$ 的极限，可以适当简化.

19.(2004 数学三、四) 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2})$

【解】原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{1}{4}\sin^2 2x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\frac{1}{2}\sin 4x}{4x^3}.$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(4x)^2}{6x^2}=\frac{4}{3}.$$

第二章　导数与微分

一、填空题

1.(1989 数学三、四)　曲线 $y=x+\sin^2 x$ 在点$(\frac{\pi}{2},1+\frac{\pi}{2})$处的切线方程是 $\underline{\quad y=x+1\quad}$.

【解】 $y'=1+2\sin x\cos x, y'\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=1$,故切线方程为 $y=x+1$.

2.(1990 数学三、四)　设函数 $f(x)$ 有连续的导函数，$f(0)=0$ 且 $f'(0)=b$,若函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ A & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续，则常数 $A=\underline{\quad a+b\quad}$.

【解】 $A=\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\sin x}{x}$

$=f'(0)+a=b+a.$

3.(1991 数学三、四)　设曲线 $f(x)=x^3+ax$ 与 $g(x)=bx^2+c$ 都通过点$(-1,0)$，且在点$(-1,0)$有公共切线，则 $a=\underline{\quad -1\quad}$，$b=\underline{\quad -1\quad}$，$c=\underline{\quad 1\quad}$.

【解】 $f'(x)=3x^2+a, g'(x)=2bx$. 由题意，$f'(-1)=g'(-1)$，即 $3+a=-2b$. 又由 $f(-1)=-1-a=0$ 得 $a=-1$. 代入前式中，解得 $b=-1$. 最后由 $g(-1)=b+c=0$ 得 $c=1$.

4.(1992 数学四)　设 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t(\dfrac{x+t}{x-t})^x$,则 $f'(t)=\underline{\quad (2t+1)e^{2t}\quad}$.

【解】 根据 1^∞ 型极限计算公式，

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+t}{x-t})^x=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}(\frac{x+t}{x-t}-1)x\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}\frac{2tx}{x-t}\right\}=e^{2t}.$$

故　$$f'(t)=(te^{2t})'=(2t+1)e^{2t}.$$

5.(1993 数学三、四)　已知 $y=f(\dfrac{3x-2}{3x+2})$，$f'(x)=\arcsin x^2$,则$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=\underline{\quad \dfrac{3\pi}{2}\quad}$.

【解】 $\dfrac{dy}{dx}=f'(\dfrac{3x-2}{3x+2})\cdot(\dfrac{3x-2}{3x+2})'=\arcsin(\dfrac{3x-2}{3x+2})^2\cdot\dfrac{12}{(3x+2)^2}.$

故　$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=3\arcsin 1=\frac{3\pi}{2}.$$

6.(1994 数学三、四)　已知 $f'(x_0)=-1$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=\underline{\quad 1\quad}$.

【解】 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\dfrac{[f(x_0-2x)-f(x_0)]-[f(x_0-x)-f(x_0)]}{x}} = \frac{1}{-f'(x_0)} = 1.$$

7.(1994 数学三、四)　设方程 $e^{xy}+y^2=\cos x$ 确定 y 为 x 的函数，则 $\frac{dy}{dx}=$ $-\dfrac{ye^{xy}+\sin x}{xe^{xy}+2y}$.

【解】　对方程两边关于 x 求导，

$$e^{xy}(y+xy')+2yy'=-\sin x,\quad y'=-\frac{ye^{xy}+\sin x}{xe^{xy}+2y}.$$

8.(1995 数学三)　设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$,则 $f^{(n)}(x)=$ $\dfrac{(-1)^n 2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$.

【解】　$f(x)=-\dfrac{(x+1)-2}{1+x}=-1+2(1+x)^{-1}$,

$$f'(x)=2(-1)(1+x)^{-2},$$

$$f''(x)=2(-1)(-2)(1+x)^{-3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=2(-1)(-2)\cdots(-n)(1+x)^{-(n+1)}=\frac{(-1)^n 2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

9.(1996 数学三)　设 (x_0,y_0) 是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上的一点，若在该点的切线过原点，则系数应满足的关系是　$\dfrac{c}{a}\geqslant 0,b$ 任意，(或 $ax_0^2=c,b$ 任意)　.

【解】　在点 (x_0,y_0) 处抛物线的切线斜率为 $2ax_0+b$,切线方程为 $y-y_0=(2ax_0+b)(x-x_0)$. 因为原点在此切线上，所以得 $y_0=2ax_0^2+bx_0$.

将最后一式与 $y_0=ax_0^2+bx_0+c$ 联立，即得 $ax_0^2=c,b$ 任意.

10.(1996 数学三、四)　设方程 $x=y^y$ 确定 y 是 x 的函数，$dy=$ $\dfrac{1}{x(1+\ln y)}dx$.

【解一】　方程两边取对数：$\ln x=y\ln y$. 求导得

$$\frac{1}{x}=y'\ln y+y\cdot\frac{1}{y}\cdot y'\Rightarrow y'=\frac{1}{x(1+\ln y)}\Rightarrow dy=\frac{1}{x(1+\ln y)}dx.$$

【解二】　方程两边取微分，得

$$dx=d(y^y)=(de^{y\ln y})=y^y d(y\ln y)=y^y(\ln y\cdot dy+dy).$$

解出　$dy=\dfrac{1}{y^y(1+\ln y)}dx=\dfrac{1}{x(1+\ln y)}dx.$

11.(1996 数学四)　设 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$,则 $y'''\Big|_{x=\sqrt{3}}=$ $\dfrac{5}{32}$.

【解】　$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

$$y''=[(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}]'=-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$y'''=[-x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}]'$$

$$=-(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}+3x^2(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}.$$

故 $\qquad y'''\Big|_{x=\sqrt{3}}=-\frac{1}{8}+\frac{9}{32}=\frac{5}{32}.$

12.(1997 数学三、四) 设 $y=f(\ln x)e^{f(x)}$，其中 f 可微，则 $dy=$ $e^{f(x)}[\frac{1}{x}f'(\ln x)+f'(x)f(\ln x)]dx$.

【解一】 $y'=f'(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\cdot e^{f(x)}+f(\ln x)e^{f(x)}f'(x)$，

$$dy=y'dx=e^{f(x)}[\frac{1}{x}f'(\ln x)+f'(x)f(\ln x)]dx.$$

【解二】 $dy=d[f(\ln x)e^{f(x)}]$

$$=e^{f(x)}d[f(\ln x)]+f(\ln x)d(e^{f(x)})$$

$$=e^{f(x)}[\frac{1}{x}f'(\ln x)+f'(x)f(\ln x)]dx.$$

13.(1998 数学三、四) 设曲线 $f(x)=x^n$ 在点(1, 1) 处的切线与 x 轴的交点为$(\xi_n, 0)$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=$ $\frac{1}{e}$.

【解】 $f'(x)=nx^{n-1}$，$f'(1)=n$，切线方程为 $y-1=n(x-1)$. 将$(\xi_n,0)$代入方程中，解出 $\xi_n=1-\frac{1}{n}$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}f(\xi_n)=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(-\frac{1}{n})n}=e^{-1}.$$

14.(2003 数学三) 设 $f(x)=\begin{cases}x^{\lambda}\cos\frac{1}{x}, & 若\ x\neq 0,\\ 0, & 若\ x=0,\end{cases}$ 其导函数在 $x=0$ 处连续，则 λ 的取值范围是 $\lambda>2$.

【解】 当 $\lambda>1$ 时，有

$$f'(x)=\begin{cases}\lambda x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}+x^{\lambda-2}\sin\frac{1}{x}, & 若\ x\neq 0\\ 0, & 若\ x=0,\end{cases}$$

显然当 $\lambda>2$ 时，有 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0=f'(0)$，即其导函数在 $x=0$ 处连续.

15.(2003 数学三) 已知曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 与 x 轴相切，则 b^2 可以通过 a 表示为 $b^2=$ $4a^6$.

【解】 由题设，在切点处有 $y'=3x^2-3a^2=0$，有 $x_0^2=a^2$.

又在此点 y 坐标为 0，于是有 $0=x_0^3-3a^2x_0+b=0$，

故 $b^2=x_0^2(3a^2-x_0^2)^2=a^2\cdot 4a^4=4a^6$.

16.(2004 数学四) 设 $y=\arctan e^x-\ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$，则 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1}=\frac{e-1}{e^2+1}$.

【解】 因为 $y=\arctan e^x-x+\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)$，$y'=\frac{e^x}{1+e^{2x}}-1+\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$，

所以，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=\dfrac{e-1}{e^2+1}$.

二、选择题

1.(1987 数学三、四)　若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，x_1 和 x_2 是区间 (a,b) 内任意两点，且 $x_1<x_2$，则至少存在一点 ξ，使

(A) $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，其中 $a<\xi<b$.

(B) $f(b)-f(x_1)=f'(\xi)(b-x_1)$，其中 $x_1<\xi<b$.

(C) $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$，其中 $x_1<\xi<x_2$.

(D) $f(x_2)-f(a)=f'(\xi)(x_2-a)$，其中 $a<\xi<x_2$.　【C】

【解】　拉格朗日定理条件有两条：函数在闭区间上连续，在开区间上可导. 而选项(A)，(B)和(D) 在区间端点不满足前一条件. 只有(C) 符合定理条件，故选(C).

2.(1990 数学三、四)　设函数 $f(x)$ 对任意 x 均满足等式 $f(1+x)=af(x)$，且有 $f'(0)=b$，其中 a,b 为非零常数，则

(A) $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导.

(B) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=a$.

(C) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=b$.

(C) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=ab$.　【D】

【解】　应选(D). 由题设等式，令 $x=0$，得 $f(1)=af(0)$. 由导数定义，

$$f'(1)=\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{af(x)-af(0)}{x}=af'(0)=ab.$$

3.(1993 数学三、四)　设函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处

(A) 极限不存在.　　(B) 极限存在但不连续.

(C) 连续但不可导.　　(D) 可导.　【C】

【解】　先判断 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性. 因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}=0=f(0)$，所以连续.

又因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}}{x}$ 不存在，故选(C).

4.(1995 数学三、四)　设 $f(x)$ 为可导函数，且满足条件 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为

(A) 2.　　(B) -1.　　(C) $\dfrac{1}{2}$.　　(D) -2.　【D】

【解】　$-1=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{-x}=\dfrac{1}{2}f'(1)\Rightarrow f'(1)=-2$.

故选(D).

5.(1998 数学三、四)　设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，周期为 4，又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的斜率为

(A) $\dfrac{1}{2}$.　(B) 0.　(C) -1.　(D) -2.　【D】

【解】$-1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(5-x)-f(5)}{-x}=\frac{1}{2}f'(5)\Rightarrow f'(5)=-2,$$故选(D).

6.(2000 数学三、四)　设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是

(A) $f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$.　(B) $f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$.

(C) $f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$.　(D) $f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$.　【B】

【解】使用排错法. 当 $f(a)\neq 0$ 时，例如选项(C)中 $f(a)>0$，则由 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处的连续性(可导必连续)知，在 $x=a$ 的某个邻域内 $f(x)>0$，此时 $|f(x)|=f(x)$ 在 $x=a$ 处可导. 因此排除了(C)和(D).

当 $f(a)=0$ 时，设 $\varphi(x)=|f(x)|$，则有

$$\varphi'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{|f(x)|}{|x-a|}$$
$$=\left|\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|=|f'(a)|,$$
$$\varphi'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a^-}-\frac{|f(x)|}{|x-a|}$$
$$=-\left|\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|=-|f'(a)|,$$

而 $\varphi(x)=|f(x)|$ 在 $x=a$ 处可导的充要条件是 $\varphi'_+(a)=\varphi'_-(a)$，即

$$|f'(a)|=-|f'(a)|\Leftrightarrow|f'(a)|=0\Leftrightarrow f'(a)=0.$$

故排除(A)，同时也证明了(B)是正确的.

7.(2002)数学三、四)　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，在开区间 (a,b) 内可导，则

(A) 当 $f(a)f(b)<0$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

(B) 对任何 $\xi\in(a,b)$，有 $\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]=0$.

(C) 当 $f(a)=f(b)$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$.

(D) 存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.　【B】

【解】因为在 $x=a$ 和 $x=b$ 处 $f(x)$ 无连续条件，所以零点定理、罗尔定理和拉格朗日中值定理失效，(A)、(C)和(D)错误. 故选(B).

实际上，因为 $f(x)$ 在点 ξ 处可导，则必连续. 故(B)正确.

$f(x)=-f(x)$

8.(2003 数学三)　设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

(A) 在 $x=0$ 处左极限不存在.　(B) 有跳跃间断点 $x=0$.