高师函授教材

解析几何

（空间部分）

东北三省高师函授教材协编组

高师函授教材

解析几何

（空间部分）

东北三省高师函授教材协编组

解 析 几 何 下 册

（空间部分）

目 录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.c

第二编　空间解析几何学

空间解析几何是平面解析几何的继续和发展．它是在空间直角坐标系的基础上，继续用代数方法研究空间几何问题的．它的内容大体包括：

1）建立点与实数、曲面与方程的联系；

2）以坐标法为基础，向量为工具，研究空间的直线、平面和二次曲面的方程、性质以及它们之间的相互关系．

解析几何由平面进入到空间的一个明显的特点是，它所研究的点和图形不是限制在一个平面内，而是在空间中．它不仅可以研究空间中某一平面上的直线或曲线，而且可以研究空间中的任何直线和曲线以及平面和曲面．平面解析几何只是空间解析几何的一部分．因此，它所研究的范围比平面部分更为广泛．

在研究方法上，虽然仍是解析法，但空间部分所用的解析法除一般的代数方法外，还将充分地运用**向量代数的方法**。这样可使问题简化，便于研究．这也是它和平面部分在研究方法上一点区别．

在空间解析几何中除学习直角坐标外，我们还将介绍空间点的极坐标或球面坐标以及柱面坐标．

学习空间解析几何，可以发展我们的空间想象力，学会用平面图形表示空间物体的方法，为学好其他学科（如数学分析、线性代数、物理学等）打下基础，并能运用空间解析

几何知识解决有关实际问题。

第七章　空间直角坐标系及向量代数初步

为了用代数方法研究空间的几何问题，首先必须把空间的点和数联系起来，这就需要建立空间直角坐标系；其次，在研究的过程中，要用到向量代数的知识，因此，建立空间直角坐标系，介绍向量代数的一些基础知识，就是本章的主要内容。

学习本章的基本要求：

（1）已知空间的一点会求它的坐标，反之，已知一点的坐标会确定它在空间里的位置。要注意坐标轴和坐标面上的点，它们在坐标上的特征；要掌握对称点间在坐标上的相互关系。

（2）要理解向量的概念，注意向量和数量的差别；掌握向量线性运算的概念、性质和运算的法则，能熟练地进行向量的线性运算。

（3）掌握向量坐标的概念，注意向量坐标和向量分解式之间的关系；掌握向量线性运算的坐标表示方法。

（4）掌握向量的数量积、向量积、混合积的概念和性质以及它们的坐标表达式。并应用它们解决有关的几何问题。

（5）掌握两个向量的垂直、平行条件以及它们的夹角公式。

§ 7·1 空间直角坐标系

过空间的一点，作三条互相垂直的直线OX，OY，和OZ（图7—1），规定它们的正方向为箭头所指的方向，并选定一单位线段作为它们的公共度量单位，这样，就建立了一个空间直角坐标系．点O叫做坐标原点，OX、OY、OZ都叫做坐标轴，简称为X轴、Y轴和Z轴．

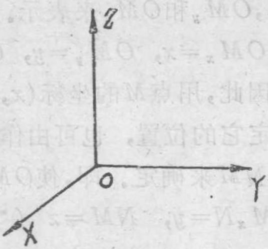

图 7—1

图 7—2

如果用右手的姆指和食指，分别指X轴和Y轴的正向，而这时中指所指的方向若与Z轴的正方向一致时(图7—2)，这样的坐标系叫做右旋系．如果与左手的三个手指的方向吻合时，叫做左旋系．本书用的是右旋系．

设点M是空间的任意一点，为了求点M的坐标，我们先作点M在三个坐标轴上的射影．即过点M分别作垂直于OX，OY，OZ的三个平面，则此三平面与坐标轴的三个交点M_x，M_y和M_z，即为点M在三条坐标轴上的射影．设由单位线段量得$OM_x=x$，$OM_y=y$，$OM_z=z$，显然（x,y,z）这三个有序的数是由点M的位置唯一确定；反之，若已知三个有序的数(x,y,z)，就可在空间里确定一点M．作法是在OX，

OY, OZ轴上，分别截取$OM_x=x, OM_y=y, OM_z=z$，过点M_x, M_y，M_z分别作垂直于三个坐标轴的平面，则三平面的交点就是点M的位置。这样，空间的点M与实数组(x, y, z)就构成了一一对应关系。我们把这样的三个有序的数(x, y, z)叫做点M的**直角坐标**。记做$M(x, y, z)$。其中**x叫做横坐标，y叫做纵坐标，z叫做竖坐标**（或立坐标）。

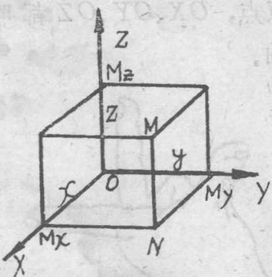

图7—3

由图7—3不难看出，点M的坐标也可由长方体的三条棱OM_x, OM_y和OM_z来表示。这是因为$OM_x=x$，$OM_y=y$，$OM_z=z$，因此，用点M的坐标(x, y, z)来确定它的位置，也可由作折线OM_xNM来确定。即，使$OM_x=x$，$M_xN=y$，$NM=z$（其中$M_xN \parallel OY, NM \parallel OZ$），这样，终点$M$即为所求的位置。

在空间直角坐标系中，三个坐标平面XOY, YOZ, ZOX把空间分成八个部分（图7—4），每个部分叫做一个**卦限**。在水平坐标上方的四个部分依次为Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限①，在水平面下方的四个部分依次为Ⅴ Ⅵ Ⅶ Ⅷ卦限。各卦限内点的坐标符号如下表所

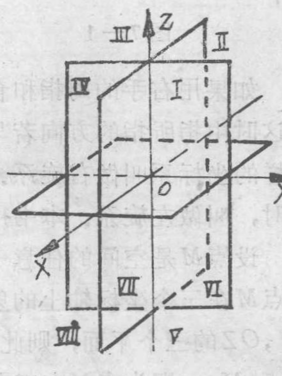

图7—4

①卦这个名称，源于中国古书《易经》，书中有“太极分两仪，两仪分四象，四象分八卦”。

示：

坐标 \ 卦限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

由图 7—4 可以看出：

位于XOY坐标平面上方的点，$z>0$叫做上半空间；下方的点，$z<0$，叫做下半空间；

位于YOZ坐标平面前方的点，$x>0$，叫做前半空间；后方的点，$x<0$，叫做后半空间；

位于XOZ坐标平面右方的点，$y>0$叫做右半空间；左方的点，$y<0$叫做左半空间。

特别是当：$z=0$时，点M在XOY坐标面上；$y=0$时，点M在XOZ坐标面上；$x=0$时，点M在YOZ坐标面上。当$y=z=0$时，点M在x轴上；当$x=z=0$时，点M在y轴上；当$x=y=0$时，点M在z轴上，当$x=y=z=0$，点M为坐标原点。

根据各卦限内点的坐标符号，不难推知，当点$M_1(x_1,y_1,z_1)$和$M_2(x_2,y_2,z_2)$对称时，其坐标间有如下关系：

关于坐标面XOY对称时，$x_1=x_2$，$y_1=y_2$，$z_1=-z_2$；

关于坐标面YOZ对称时，$x_1=-x_2$，$y_1=y_2$，$z_1=z_2$；

关于坐标面XOZ对称时，$x_1=x_2$，$y_1=-y_2$，$z_1=z_2$；

关于坐标原点对称时，$x_1=-x_2$，$y_1=-y_2$，$z_1=-z_2$；

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

例 1．试确定下列各点的位置：

$M_1(2,0,0)$；$M_2(0,\ 0,\ -3)$；$M_3(0,3,1)$；$M_4(1,2,3)$

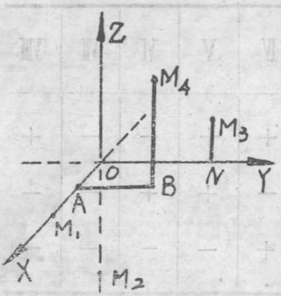

图 7—5

解：1）在X轴上取$OM_1=2$，得点M_1；

2）在Z轴上取$OM_2=-3$，得点M_2；

3）在Y轴上取 $ON=3$，过点N作垂线$NM_3=1$，得点M_3；

4）过 点 $A(1,0,0)$ 作 $AB/\!/OY$，取 $AB=2$，过点B作 $BM_4/\!/OZ$，取 $BM_4=3$，即得点M_4（图7—5）。

例 2．试判定下列各点间的对称关系：

$M_1(1,\ 2,\ 1)$，$M_2(1,\ 2,\ -1)$，$M_3(-1,2,1)$，$M_4(-1,\ -2,1)$

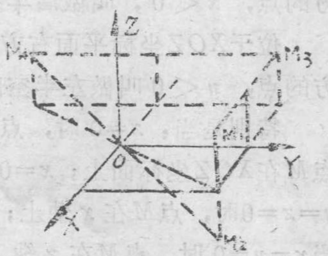

图 7—6

解：M_1，M_2关于坐标平面XOY对称，因为$z_1=-z_2$，其余坐标对应相等；M_1与M_3关于坐标 平面 YOZ 对称，因为 $x_1=-x_3$，其余坐标对应相等；M_2与M_4关于坐标原点对称，因为$x_2=-x_4$，$y_2=-y_4$，$z_2=-z_4$；M_3与M_4关于坐标面XOZ对称，因为$y_3=-y_4$，其余坐标对应相等（图7—6）。还有M_1，M_4关于 z 轴对称，M_2，M_3关于 y 轴对称。

例 3．求满足$xyz=0$的点的轨迹。

解：设点$P(x,y,z)$满足上述条件，则必有 $xyz=0$

由此可知，x, y, z中至少有一个为 0 或$x=0$，或$y=0, z=0$，当 $x=0$ 时，点P在YOZ平面上；当 $y=0$ 时，点P在XOZ平面上；当 $z=0$ 时，点 P 在 XOY 平面上．当 $x=y=0$ 时，点P的轨迹是 z 轴($y=z=0$时是 x 轴，$x=z=0$时是 y 轴)．因此，点P的轨迹是三个坐标平面．

练习：求满足 $xyz>0$ 的点的轨迹．

§ 7·2 向量和向量的线性运算

1. 向量的概念

在日常生活中，常遇到两种不同的量．如：土地的面积、水库的容积、谷物的产量、时间、温度、质量等．这种量只要用一个数就可完全表示它；另外一种量，要确定它们，除需知道其数量的大小而外，还必须知道它们的方向．如：火车、飞机、火箭的速度、位移、力与加速度等．因此，

定义：有大小和方向的量叫做向量（或矢量）；只有大小而无方向的量叫做数量（或标量）．

我们在第二章中讲的有向线段，就是向量在几何中的表现．因此，有向线段是向量．并且以后常用有向线段表示向量，它的长度就表示向量的大小，它的方向就表示向量的方向．

例如，以A为始点的，B为终点的向量记作$\overrightarrow{AB}$．有时也用一个小写的字母上面加箭头来表示向量。如$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$等（图7—7）

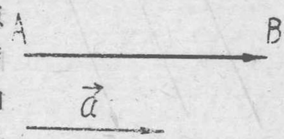

图 7 — 7

对于向量，我们所注意的是它的大小和方向。至于它以那一点为始点，对于我们来说并不重要。因此，我们定义凡是满足下列条件的两个向量就是相等的：

（1）两个向量位于同一直线或平行直线上，且方向相同；

（2）两向量的长度相等。

由向量相等的定义可知，只要不改变向量的大小和方向，它是可以任意平行移动的。

定义：不改变大小和方向，可以任意平行移动的向量叫做自由向量。

在自由向量的意义下，可以把相等的向量看作是同一个向量。它们的区别只是始点的位置不同。在解析几何中，除自由向量外，还要用到一种始点固定的向量，就是点的向径。

定义：设点M是空间里的任意一点，则以原点为始点，M为终点的向量，叫做点M的向径。

今后提到的向量一般为自由向量。

向量的长度，又叫做向量的模。向量$\vec{a}$（或$\overrightarrow{AB}$）的模用$|\vec{a}|$（或$|\overrightarrow{AB}|$）表示。

模相等而方向相反的两个向量，叫做互逆向量。$\vec{a}$的逆向量记作$-\vec{a}$。如图7—8中的$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$与$\overrightarrow{EF}$是互逆向量。即$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{EF}$。

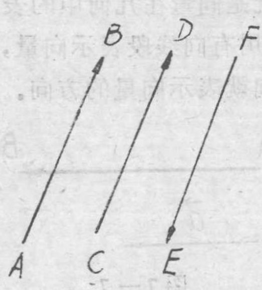

图7—8

我们把位于同一直线或平行直线上的向量称为**共线向量**；把位于同一平面或平行平面上的向量称为**共面向量**。共线向量的方向可以是相同的，也可以是相反的。

例如，相等向量是共线的，一向量和它的逆向量也是共线的；任意两个向量都是共面的，因为总可以分别过它们作两个平行（或重合）平面。但任意三个

向量就不一定共面了。

注意：数量与向量都有相等的概念，而且数量可直接比较大小，但向量则不能。$\vec{a}>\vec{b}$ 是无意义的，而 $|\vec{a}|>|\vec{b}|$ 是有意义的，它表示向量 $\vec{a}$ 的模大于向量 $\vec{b}$ 的模。

我们把始点与终点相重合的向量叫做零向量。记作 $\vec{O}$，它的长度为0，方向不定。

2．向量的加法

由力学可知，如果力 $\vec{F}_1$ 和 $\vec{F}_2$ 作用在同一点，则它们的合力 $\vec{F}$，恰为从 O 点引出的，以 $\vec{F}_1$ 和 $\vec{F}_2$ 为两邻边的平行四边形对角线（图 7—9）。向量的加法就是以这类问题为基础而定义的。

（1） 向量加法的定义

设向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 有共同的起点O，我们把从O点引出的以 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 为两邻边的平行四边形的对角线，叫做向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和。记作 $\vec{a}+\vec{b}$ **点O叫做附着点**。（图 7—10）。

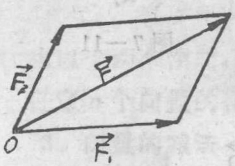

图 7—9

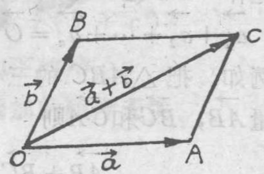

图 7—10

因为我们所研究的向量是自由向量，所以也可把图 7—10中的 $\overrightarrow{AC}$ 看作是向量 $\vec{b}$．这样，又可把两个向量之和定义为：

如果向量 $\vec{a}$ 的终点与向量 $\vec{b}$ 的始点重合，那么，以 $\vec{a}$ 的

始点为始点，$\vec{b}$的终点为终点的向量，叫做向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的和。

显然这两种定义是等价的。它们同时给出了作两个已知向量和的方法。前一种叫做**平行四边形法则**；后一种叫做**三角形法则**。

从三角形法则可以得到求任意 n 个向量$\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，$\cdots\vec{a}_n$，的和的多边形法则。这就是：把向量平行移动，使$\vec{a}_2$的始点重合于$\vec{a}_1$的终点，使$\vec{a}_3$的始点重合于$\vec{a}_2$的终点，如此继续下去，直到$\vec{a}_n$的始点重合于$\vec{a}_{n-1}$的终点为止。则以$\vec{a}_1$的始点为始点，$\vec{a}_n$的终点为终点的向量$\vec{a}$，就是所求的 n 个向量的和（图 7—11），记作：

$$\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n$$

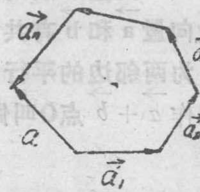

图 7—11

有时会出现这样的情况，最后一个向量的终点与第一个向量的始点相重合。这时的和向量为$\vec{O}$。记作

$$\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n=\vec{O}$$

例如，把$\triangle ABC$的三边看作向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$和$\overrightarrow{CA}$则

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{O}$$

显然，向量$\vec{a}$与它的逆向量$-\vec{a}$之和为零向量。因为$\vec{a}$与$-\vec{a}$共线且大小相等方向相反，若把$-\vec{a}$的始点重合于$\vec{a}$的终点，则$-\vec{a}$的终点必与$\vec{a}$始点相重合。所以它们的和为零向量。即

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{O}$$

（2）向量加法的性质

根据向量加法的法则，可以证明向量加法满足交换律和结合律。

Ⅰ）**交换律**：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

在$\triangle OAC$中（图7—12），由加法的定义可知$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OC}$；在$\triangle OBC$中，$\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{OC}$。由此可知

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

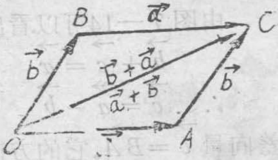

图 7—12

Ⅱ）结合律：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

在$\triangle ADC$中，$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$；在$\triangle ACB$中，$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\overrightarrow{AB}$（图7—13）。

在$\triangle DCB$中，$\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{DB}$；在$\triangle ADB$中，$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}$。由此可知

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

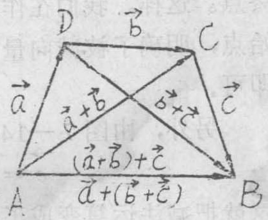

图 7—13

由以上两个性质，可推得如下的结论：

任意 n 个向量的和与它们相加的顺序无关。

3．向量的减法

我们把向量的减法定义为向量加法的逆运算。即，**若**

$$\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$$

则向量 $\vec{c}$ 称为向量 $\vec{a}$ 减向量 $\vec{b}$ 的差。记作 $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$。

由定义可知，被减向量$\vec{a}$就是减向量$\vec{b}$与差向量$\vec{c}$之和，因此，被减向量$\vec{a}$相当于平行四边形的一条对角线，减向量$\vec{b}$则是平行四边形的一边，而另一边就是所求的差向

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.c