参考答案

一、选择题：每小题5分，共40分

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8
答　案	C	C	D	B	B	A	C	B

二、填空题：每小题5分，共30分.

9. $2\sqrt{2}$；　10. 9；　11. $\sqrt{3}$，$-\frac{2\pi}{3}$；　12. 0，$q-1$；　13. $\frac{6}{25}$，$\frac{19}{25}$；　14. $4\sqrt{6}$，2.

三、解答题

15. 解：(1) 由 $f(0)=2$，得 $b=2$；由 $f(\frac{\pi}{6})=3$，得

$\frac{\sqrt{3}}{4}a+\frac{3}{2}=3$，　$a=2\sqrt{3}$.

$\therefore f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+1$

$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+1$.

$\therefore T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2) 当 $2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，即 $x=k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in Z$ 时，$f(x)=2+1=3$ 为最大值；

当 $2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，即 $x=k\pi-\frac{\pi}{3}$，$k\in Z$ 时，

$f(x)=-2+1=-1$ 为最小值.

16. 解：(1) ξ 的可能值为 0，1，2.

若 $\xi=0$，表示没有取出次品，其概率为：

$p(\xi=0)=\frac{C_2^0C_{10}^3}{C_{12}^3}=\frac{6}{11}$；

同理，有

$p(\xi=1)=\frac{C_2^1C_{10}^2}{C_{12}^3}=\frac{9}{22}$；$p(\xi=2)=\frac{C_2^2C_{10}^1}{C_{12}^3}=\frac{1}{22}$.

$\therefore \xi$ 的分布列为：

ξ	0	1	2
p	$\frac{6}{11}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{22}$

$\therefore E\xi=0\times\frac{6}{11}+1\times\frac{9}{22}+2\times\frac{1}{22}=\frac{1}{2}$.

$D\xi=(0-\frac{1}{2})^2\times\frac{6}{11}+(1-\frac{1}{2})^2\times\frac{9}{22}+(2-\frac{1}{2})^2\times\frac{1}{22}=\frac{3}{22}+\frac{9}{88}+\frac{9}{88}=\frac{15}{44}$

(2) η 的可能值为 1，2，3，显然 $\xi+\eta=3$.

$\therefore p(\eta=1)=p(\xi=2)=\frac{1}{22}$;$p(\eta=2)=p(\xi=1)=\frac{9}{22}$

$p(\eta=3)=p(\xi=0)=\frac{6}{11}$.

$\therefore \eta$ 的分布列为：

η	1	2	3
p	$\frac{1}{22}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{6}{11}$

$E\eta=E(3-\xi)=3-E\xi=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$. $\because \eta=-\xi+3$，$\therefore D\eta=(-1)^2D\xi=\frac{15}{44}$.

17. 解法一：(1) 如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，$\because E$、F 分别为 AC，BC 中点，

$\therefore EF /\!/ AB$.

又 $AB \not\subset$ 平面 DEF，$EF \subset$ 平面 DEF，

$\therefore AB /\!/$ 平面 DEF.

(2) 过 D 作 $DG \perp AC$ 于 G，连接 BG.

$\because AD \perp CD$，$BD \perp CD$.

$\therefore \angle ADB$ 是二面角 $A-CD-B$ 的平面角.

$\therefore \angle ADB=90°$，即 $BD \perp AD$.

$\therefore BD \perp$ 平面 ADC，

$\therefore BG \perp AC$.

$\therefore \angle BGD$ 是二面角 $B-AC-D$ 的平面角.

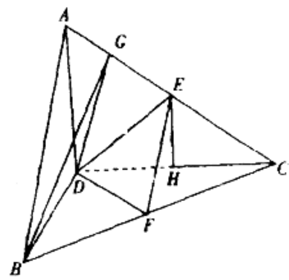


图 1

在 $Rt\triangle ADC$ 中，$AD=a$，$DC=\sqrt{3}a$，$AC=2a$，

$\therefore DG=\frac{AD \cdot DC}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

在 $Rt\triangle BDG$ 中，$\tan\angle BGD=\frac{BD}{DG}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore \angle BGD=\arctan\frac{2\sqrt{3}}{3}$，即二面角 $B-AC-D$ 的大小为 $\arctan\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(3) 过 E 作 $EH \perp DC$ 于 H.

$\because BD \perp$ 平面 ADC，又 $EH \subset$ 平面 ADC，

$\therefore BD \perp EH$.

$\therefore EH \perp$ 平面 BCD.

$\because EH=\frac{1}{2}AD=\frac{a}{2}$，$S_{\triangle CDF}=\frac{1}{2}S_{\triangle BCD}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$\cos\angle EDF=\frac{DE^2+DF^2-EF^2}{2DE \cdot DF}=\frac{3}{4}$，$\sin\angle EDF=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}DE \cdot DF \cdot \sin\angle EDF=\frac{\sqrt{7}}{8}a^2$.

设点 C 到平面 DEF 的距离为 h.

$\because V_{C-DEF}=V_{E-CDF}$,

$\therefore \frac{1}{3}S_{\triangle DEF}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\triangle CDF}\cdot EH$,

即$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{7}}{8}a^2\cdot h=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{1}{2}a, h=\frac{\sqrt{21}}{7}a$.

故点 C 到平面 DEF 的距离为$\frac{\sqrt{21}}{7}a$.

解法二:(1)如图2,建立空间直角边标系,$O-xyz$,则

$D(0,0,0)$,$A(0,0,a)$,$B(a,0,0)$,$C(0,\sqrt{3}a,0)$

$E(0,\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{a}{2})$,$F(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}a,0)$

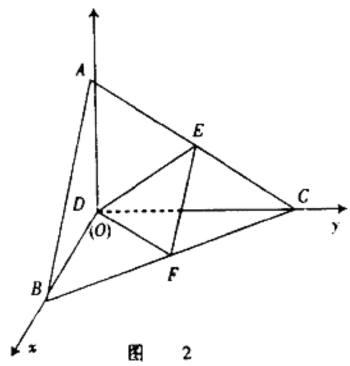


图 2

$\therefore \overrightarrow{AB}=(a,0,-a)$,$\overrightarrow{EF}=(\frac{a}{2},0,-\frac{a}{2})$.

$\because \overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,$\therefore \overrightarrow{EF}\parallel\overrightarrow{AB}$.

$\therefore AB\parallel EF$,且 $EF\subset$平面 DEF.

$\therefore AB\parallel$平面 DEF.

(2)$\because \overrightarrow{DB}=(a,0,0)$为平面 ACD 的一个法向量,

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为平面 ABC 的一个法向量,则$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}=ax-az=0,\\ \overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=\sqrt{3}ay-az=0,\end{cases}$

取 $z=1$,则 $x=1$,$y=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore \boldsymbol{n}=(1,\frac{\sqrt{3}}{3},1)$

$\therefore \cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{DB}>=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{DB}|}=\frac{a}{\sqrt{\frac{7}{3}}a}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

$\therefore$二面角 $B-AC-D$ 的大小的为 $\arccos\frac{\sqrt{21}}{7}$

(3)设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$为平面 DEF 的一个法向量,则$\begin{cases}\overrightarrow{DE}\cdot\boldsymbol{m}=\frac{\sqrt{3}}{2}ay+\frac{1}{2}az=0,\\ \overrightarrow{DF}\cdot\boldsymbol{m}=\frac{1}{2}ax+\frac{\sqrt{3}}{2}ay=0.\end{cases}$

取 $y=1$,则 $x=z=-\sqrt{3}$.

$\therefore \boldsymbol{m}=(-\sqrt{3},1,-\sqrt{3})$.

$\boldsymbol{m}_0=\frac{\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{m}|}=\frac{1}{\sqrt{7}}(-\sqrt{3},1,-\sqrt{3})$

$\therefore$点 C 到平面 DEF 的距离为

$d=|m_0\cdot\overrightarrow{DC}|=|-\frac{\sqrt{3}}{7}\times 0+\frac{1}{\sqrt{7}}\times\sqrt{3}a-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\times 0|=\frac{\sqrt{21}}{7}a.$

18. 解：(1)函数图象与 y 轴交点为 $(0,a)$. 依题意，$|a|\leqslant 1$，

$\therefore -1\leqslant a\leqslant 1$，即实数 a 的取值范围是 $[-1,1]$.

(2) $f'(x)=x^2+(a-4)x+2(2-a)=(x-2)a+x^2-4x+4$.

令 $f'(x)>0$ 对任意的 $a\in[-1,1]$ 恒成立，即不等式 $g(a)=(x-2)a+x^2-4x+4$

对任意的 $a\in[-1,1]$ 恒成立，其充要条件是 $\begin{cases}g(1)=x^2-3x+2>0,\\ g(-1)=x^2-5x+6>0\end{cases}$

解得：$x<1$ 或 $x>3$.

$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,1)$ 或 $x\in(3,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$ 对任意 $a\in[-1,1]$ 恒成立.

所以对任意的 $a\in[-1,1]$ 函数 $f(x)$ 均是单调递增的.

故存在区间 $(-\infty,1)$ 和 $(3,+\infty)$ 对任意的 $a\in[-1,1]$ 函数 $f(x)$ 在该区间内均是单调增的.

19. 解：(1)由 $a_2=1$，$S_n=\frac{n}{2}a_n$，$n\in N^*$，得，

$a_1=0$，$a_2=1$，$a_3=2$，$a_4=3$.

于是猜想 $a_n=n-1$.

下面用数学归纳法证明：

显然 $n=1$，$n=2$ 时等式成立，假设 $n=k(k\geqslant 2)$ 时等式成立，即 $a_k=k-1$，$(k\geqslant 2)$，则

$a_{k+1}=S_{k+1}-S_k$

$\quad=\frac{k+1}{2}a_{k+1}-\frac{k}{2}a_k$

$2a_{k+1}=(k+1)a_{k+1}-k(k-1)$

$(k-1)a_{k+1}=k(k-1)$

$\therefore a_{k+1}=k=(k+1)-1$.

即当 $n=k+1$ 时等式也成立. 故对任意 $n\in N^*$ 均有

$a_n=n-1$.

(2)由(1)知，

$(1+\frac{1}{2a_{n+1}})^{a_{n+1}}=(1+\frac{1}{2n})^n$

$=C_n^0+C_n^1\frac{1}{2n}+C_n^2(\frac{1}{2n})^2+\cdots+C_n^r(\frac{1}{2n})^r+\cdots C_n^n(\frac{1}{2n})^n$.

$\because C_n^r(\frac{1}{2n})=\frac{1}{2^r}\cdot\frac{C_n^r}{n^r}=\frac{1}{2^r}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!\ \cdot n^r}<\frac{1}{2^r}$，$(r=1,2,\cdots,n)$

$\therefore (1+\frac{1}{2n})^n<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}=2-(\frac{1}{2})^n<2$.

而 $(1+\frac{1}{2n})^n\geqslant C_n^0+C_n^1\frac{1}{2n}=\frac{3}{2}$，

$\therefore \frac{3}{2} \leq (1+\frac{1}{2n})^n < 2.$

即 $\frac{3}{2} \leq (1+\frac{1}{2a_{n+1}})^{a_{n+1}} < 2.$

20. 解：(1)由题意，可设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，由已知，得$\begin{cases} c^2-a^2=2 \\ c=2(c-\frac{a^2}{c}) \end{cases}$

解得：$a=\sqrt{2}, c=2.$

双曲线方程为$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}.$

(2)由(1)可知$A(1,0)$，设直线 PQ 的方程为 $y=k(x-1)$.

由方程组$\begin{cases} \frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1, \\ y=k(x-1) \end{cases}$

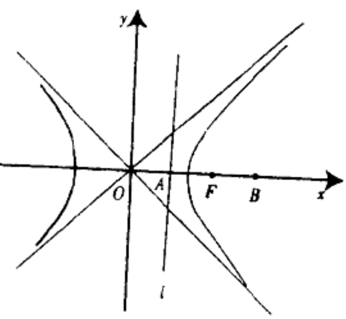
消去y，得

$(k^2-1)x^2-2k^2x+k^2+2=0.$

依题意，$\begin{cases} k^2 \neq 1 \\ \Delta = 4k^4-4(k^2-1)(k^2+2)>0, \end{cases}$

解得 $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$且 $k \neq \pm 1$.

如图，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{2k^2}{k^2-1}$.



$x_1x_2=\frac{k^2+2}{k^2-1}.$

若 $k^2-1<0$，则 x_1 与 x_2 异号，P、Q 分别在双曲线的两支上. 此时$\angle PBQ$ 为锐角. 而由$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}=0$ 可知$\angle PBQ=90°$，矛盾. 故 $k^2-1>0$. 即 $k<-1$ 或$k>1$.

$\therefore -\sqrt{2}<k<-1$ 或 $1<k<\sqrt{2}$.

此时 P、Q 两点同在双曲线左支上.

由直线 PQ 的方程得

$y_1=k(x_1-1), y_2=k(x_2-1)$

$y_1y_2=k^2(x_1-1)(x_2-1)$

$\quad =k^2[x_1x_2-(x_1+x_2)+1]$

$\quad =k^2(\frac{k^2+2}{k^2-1}-\frac{2k^2}{k^2-1}+1)$

$\quad =\frac{k^2}{k^2-1}$

$\because \overrightarrow{BP}=(x_1-3,y_1), \overrightarrow{BQ}=(x_2-3,y_2)$，

且$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}=0$.

$\therefore (x_1-3)(x_2-3)+y_1y_2=0$

$x_1x_2-3(x_1+x_2)+9+y_1y_2=0$

$\dfrac{k^2+2}{k^2-1}-\dfrac{6k^2}{k^2-1}+9+\dfrac{k^2}{k^2-1}=0$

$5k^2-7=0, k=\pm\dfrac{\sqrt{35}}{5}\in(-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2})$.

所以直线 PQ 方程为

$\sqrt{35}x-5y-\sqrt{35}=0$ 或 $\sqrt{35}x+5y-\sqrt{35}=0$.

(3) $\because \lambda>1$, P、Q 两点应在双曲线的同一支上.

$\because x_1+x_2=\dfrac{2k^2}{k^2-1}$ 与 $x_1x_2=\dfrac{k^2+2}{k^2-1}$ 同号.

$\therefore x_1>0, x_2>0$, 即 P、Q 两点同在双曲线的右支上.

$\because \overrightarrow{AP}=(x_1-1,y_1)$, $\overrightarrow{AQ}=(x_2-1,y_2)$, 且 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AQ}$,

$$\therefore \begin{cases} x_1-1=\lambda(x_2-1), & ① \\ y_1=\lambda y_2, & ② \\ x_1^2-y_1^2=2, & ③ \\ x_2^2-y_2^2=2. & ④ \end{cases}$$

由②得 $y_1^2=\lambda^2y_2^2$. ⑤

将③、④代入⑤, 得

$x_1^2-2=\lambda^2x_2^2-2\lambda^2$

由①得 $x_1=\lambda x_2+1-\lambda$ 代入上式, 得

$(\lambda x_2+1-\lambda)^2-2=\lambda^2x_2^2-2\lambda^2$

化简, 得

$2\lambda(\lambda-1)x_2=(3\lambda+1)(\lambda-1)$

$\because \lambda>1$,

$\therefore x_2=\dfrac{3\lambda+1}{2\lambda}, x_1=\lambda\dfrac{3\lambda+1}{2\lambda}+1-\lambda=\dfrac{\lambda+3}{2}$.

依题意, $M(x_1,-y_1)$. $\overrightarrow{FM}=(x_1-2,-y_1)$, $\overrightarrow{FQ}=(x_2-2,y_2)$

$\therefore \overrightarrow{FM}=(\dfrac{\lambda+3}{2}-2,-y_1)=(\dfrac{\lambda-1}{2},-y_1)$

$=-\lambda(\dfrac{1-\lambda}{2\lambda},\dfrac{y_1}{\lambda})=-\lambda(\dfrac{3\lambda+1}{2\lambda}-2,\dfrac{y_1}{\lambda})$

$=-\lambda(x_2-2,y_2)$

$\therefore \overrightarrow{FM}=-\lambda\overrightarrow{FQ}$.