

初等几何

下 册

杭州大学数学系

初 等 几 何

下 册

(立体几何部分)

一九七四年二月

毛主席语录

教育必须为无产阶级政治服务，必须同生产劳动相结合。

我们的教育方针，应该使受教育者在德育、智育、体育几方面都得到发展，成为有社会主义觉悟的有文化的劳动者。

学生也是这样，以学为主，兼学别样，即不但学文，也要学工、学农、学军，也要批判资产阶级。

要把精力集中在培养分析问题和解决问题的能力上，……

目 录

第六章 空间的直线和平面	(1)
§ 6.1 基本概念.....	(2)
一、空间图形的平面表示法(2) 二、平面的基本性质(3) 三、空间图形的作图(7) 习题二十二(9)	
§ 6.2 直线和直线的位置关系.....	(10)
一、两直线的位置关系(10) 二、平行直线的判定和性质(11) 三、异面直线所成的角(14) 习题二十三(17)	
§ 6.3 直线和平面的位置关系.....	(18)
一、直线和平面的位置关系(18) 二、直线和平面平行的判定和性质(20) 三、直线和平面垂直的判定和性质(24) 四、垂线和斜线、三垂线定理(31) 习题二十四(38)	
§ 6.4 平面和平面的位置关系.....	(40)
一、两平面的位置关系(40) 二、平面和平面平行的判定和性质(41) 三、平面和平面相交、二面角、平面和平面垂直的判定和性质(50) 四、三平面的位置关系(63) 习题二十五(66)	
〔附录〕平行射影的基本性质.....	(70)
第六章复习题.....	(72)
第七章 柱、锥、台、球及其表面积	(77)
§ 7.1 柱体.....	(77)

一、棱柱的性质和画法(77) 二、圆柱的性质和画法(85) 三、柱体表面的展开和表面积(90) 习题二十六(95)

§ 7.2 锥体..... (97)

一、棱锥和它的性质(97) 二、圆锥和它的性质(104) 三、锥体表面的展开和表面积(108) 习题二十七(111)

§ 7.3 台体.....(113)

一、棱台和它的性质(113) 二、圆台和它的性质(118) 三、台体表面的展开和表面积(120) 习题二十八(128)

§ 7.4 球.....(130)

一、球和球的截面(130) 二、球面和它的部分的面积(138) 三、球面的近似展开(148) 习题二十九(153)

[附录] 立体图.....(154)

一、斜二轴测投影(156) 二、正等轴测投影(158)

第七章复习题.....(161)

第八章 柱、锥、台、球的体积.....(165)

§ 8.1 柱体的体积.....(165)

一、体积、平行六面体的体积(165) 二、棱柱的体积(172) 三、圆柱的体积(174) 习题三十(178)

§ 8.2 锥体的体积.....(180)

一、棱锥的体积(180) 二、圆锥的体积(186) 习题三十一(190)

§ 8.3	台体的体积.....	(191)
	一、棱台、圆台的体积(191)	
	二、拟柱体和它的体积(195)	
	习题三十二(198)	
§ 8.4	球和它的部分的体积.....	(201)
	一、球的体积(201)	
	二、球扇形的体积(203)	
	三、球缺和球台的体积(204)	
	习题三十三(213)	
§ 8.5	小结.....	(216)
	一、几种简单立体的表面积和体积公式(216)	
	二、体积的度量方法(218)	
	三、祖暅定理(219)	
	四、体积的统一公式(221)	
第八章	复习题.....	(223)

第六章 空间的直线和平面

几何学是研究现实世界的空间形式的科学。在平面几何里，我们研究了平面图形的一些基本性质和这些性质的实际应用。恩格斯指出：“数和形的概念不是从其他任何地方，而是从现实世界中得来的。”“必须先存在具有一定形状的物体，把这些形状加以比较，然后才能构成形的概念。”从现实世界中的物体抽象出来的形的概念——几何图形，显然不完全在一个平面上。这种不完全在一个平面上的几何图形叫做空间图形，也叫做立体图形。在实践中，例如修建大型烟囱，设计水库堤坝坝面的坡度，计算堤坝的土石方，衡量钢管的重量，计算铸造机器零件的原料等等，都需要知道有关空间图形的性质及其度量。在制图、测量等自然科学中空间图形的性质也有广泛的应用。因此，为了三大革命实践的需要，在立体几何里，我们要在平面几何的基础上，进一步研究空间图形的一些性质和这些性质的实际应用。

物体所占有的空间部分，叫做几何体。几何体是立体几何研究的重要对象。几何体都是由一些面围成的，而这些面又有交线，研究这些面和线之间的位置关系以及和周围事物的位置关系，对于确定物体的形状和位置是很重要的。在这章里，我们着重研究空间的直线和直线、直线和平面以及平面和平面的位置关系和它们的主要性质。学习这部分内容，一方面为学习柱、锥、台和球以及制图打下基础，更主要的是这些内容既来源于生产实践，又能为生产实践服务。

§ 6.1 基本概念

一、空间图形的平面表示法

研究空间图形的性质时，不可能都利用模型，还要在平面内表示空间图形。

假定有一个正方体的铁丝架子，把它放在黑板的前面让太阳光照着，我们就可以看到这个架子在黑板上的影子。这个影子可以作为正方体在平面内的形象。由于太阳的光源很远，可以把太阳光当作是平行的。因此这个影子叫做正方体的平行射影，而产生它的方法叫做平行射影法。这些图形能够使我们得到和实际空间图形相近似的形象。例如正方体可以画成图6—1或图6—2的样子。被遮住的线可以不画，也可以画成虚线。

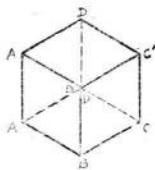
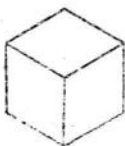
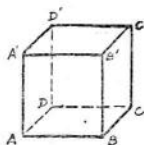
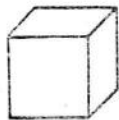


图6—1

图6—2

在平面内表示空间图形时，要注意下面两点：

1. 实际上平行的线段或直线必须画成平行。例如正方体中平行的棱，在图上也是平行的。但是两条相交直线所成的角在图上不一定画成和实际的角一样大小，如图6—1中通过正方体的顶点B的三棱间的角 $\angle ABB'$ 、 $\angle ABC$ 和 $\angle B'BC$ 实际上都是直角，而在图中分别画成直角 90° 、钝角 135° 和锐角 45° 。

2. 两条平行线段或同一条直线上的两线段画在图上时，

图中线段的比要和实际的比相同。例如图 6—1 中正方体的平行棱 AD、BC、A'D' 和 B'C' 都画成一样长。但是实际上不平行的两线段画在图上时，它们的比一般要改变，如图 6—1 中正方体的棱 AB 和 BC 实际上是相等的，而在图中 BC 画得较短。

正方体经常用图 6—1 来表示，图中 $\angle ABC = 135^\circ$ ； $\angle B'BC = 45^\circ$ ； $AB:BB' = 1:1$ ； $AB:BC = 1:\frac{1}{2}$ 。正方体也可以用图 6—2 来表示，这时 $\angle ABC = 120^\circ$ ； $\angle B'BC = 60^\circ$ ； $AB = BC = BB'$ 。为什么平行射影有这些性质？为什么空间图形的平面表示是这样的？我们将在第六章和第七章的附录中研究。

二、平面的基本性质

1. 平面的概念 几何学的基本图形是点、直线和平面。点和直线的概念，我们已经比较熟悉了，现在着重讨论平面。

机床的工作台的表面，农村场院的地面，平静的水面，光滑的玻璃面，这些都使我们产生一种印象：它们都是平的。平面就是这种印象的数学抽象。

“一切真知都是从直接经验发源的。”木工同志常用曲尺的一边在木板上移来移去，观察尺边和木板之间有没有空隙，从而来判断板面是不是平的。这种检查方法，说明平面具有下述基本性质：

公理 1 如果一条直线有两个点在一个平面内，那末这条直线就全都在这个平面内。

这时，我们说直线在平面内，或者平面通过直线。

这一条公理说明了直线在平面内的情况，它描述了平面的一个基本性质。如果有一个球面，在球面上任取两点并用直线

连起来，那末这条直线上只有两点在球面上，其余的点都不在球面上。上面说曲尺移来移去是向各个方向移动，而不是仅仅几个方向。例如曲尺的边可以在一个方向和圆柱的面完全接触，但是不能在所有的方向和圆柱的面完全接触，因为圆柱的面不是平的。

因为直线是向两个方向无限伸展的，它没有端点，没有粗细，因此，从公理 1 可知：平面是向四周（即各个方向）无限伸展着的，它没有边界，也没有厚度。在实践中，我们见到许多平面的实例，它们只是平面的一部分，例如墙面、桌面等等。当我们在适当的角度和适当的距离看桌面和窗玻璃面时，觉得它们象平行四边形。因此，通常用平行四边形表示平面，如图 6—3。

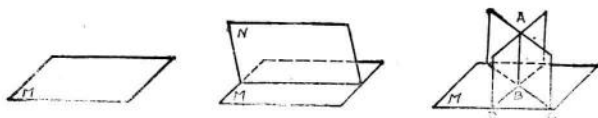


图 6—3

在画一个水平放置着的平面时，通常把平行四边形的锐角画成 45° ，把横边画得等于另一边的两倍。一个平面的一部分被另一个平面遮住时，通常把被遮的部分的线段画成虚线或不画。如图 6—3 中的平面，我们分别叫做平面 M、平面 N、平面 AC 和平面 AD。

2. 平面的确定 在立体几何里，确定平面位置的问题是很重要的。在日常生活中，我们看到：

(1) 通过一个已知点有无限多个平面。

(2) 一扇门和门框用两个铰链 A、B 连接，这扇门就可以绕着它的门轴 (AB) 旋转。同样，如果已知两点 A 和 B，那末经过

这两点的任何平面完全包含直线 AB 。也就是说，经过 A 、 B 的平面可以绕着直线 AB 旋转。如图6—4。这就表示：

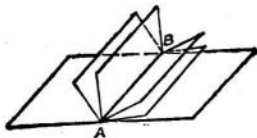


图6—4

通过两个已知点有无限多个平面。

公理2 如果两个平面有一个公共点，那末它们有通过这点的一条公共直线。

这条公理说明，空间两个平面的相互位置除了重合以外只可能有两种情形，一种是相交于一条直线；另一种是没有交点。

(3)如果我们在地板 C 点处钉一个钉子(图6—5)，当

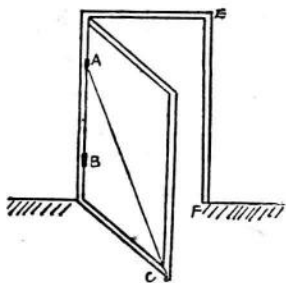


图6—5

门靠着钉子时，门就固定在唯一的位置上。这就表示：

公理3 过不在一条直线上的三个点，可以作一个平面，并且只可以作一个平面。

这个公理说明：经过不在一条直线上的三点，可以确定一个平面；经过一点或两点，就不可能确定通过它们的平面；而经过空间的任意四点，就不一定能作一个平面

同时通过这四个点。

根据上述三条公理和平行公理及直线的确定，容易得到下列推论。

推论1 过一条直线和这条直线外的一个点，可以作一个平面，并且只可以作一个平面。

证明：如果在已知的直线(l)上任取两个点(A 、 B)，那末它

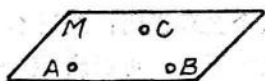
们连同这条直线外的已知点(C)组成了不在一条直线上的三个点。根据公理3, 过这三个点可以作唯一的平面(M)。而根据公理1, 已知直线(l)在这个平面(M)内。

推论2 过两条相交的直线可以作一个平面, 并且只可以作一个平面。

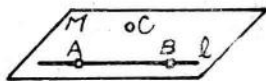
证明: 如果在每一条直线上, 且在这两条直线(a, b)的交点外各取一个点(A, B), 那末它们连同交点(C), 组成了不在一条直线上的三个点。过这三个点可以作唯一的平面(公理3), 而两条已知的直线都在这个平面内(公理1)。

推论3 过两条平行的直线可以作一个平面, 并且只可以作一个平面。

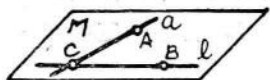
证明: 根据定义, 两条平行的直线(l, m)一定在一个平面(M)内; 因为过平行线中的一条直线(l)和另一条直线(m)上的任意一点(C)可以作一个平面(M)(推论1), 所以这个平面是唯一的。



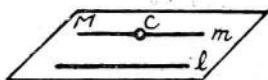
(公理3)



(推论1)



(推论2)



(推论3)

图6-6

平板仪和照相机的架子都是三只脚的, 这样就可以平稳地放在地面上; 包装用的木箱, 常常钉两条平行的木条或两条相交的木条进行加固, 这样使木板保持在一个平面上。学习这些

基本性质有助于进一步研究几何体的性质，同时知道了平面的确定，使空间图形的确定有了基础。

三、空间图形的作图

平面几何里所有的作图，都是在一个平面内用画图仪器来完成的。其中只使用圆规和直尺的作图，叫做尺规作图。

立体几何作图中所作的是空间图形。要作空间图形，用画图仪器已经不够，因为在一个平面内作出空间图形是不可能的，而前面所说的空间图形的表示法，也就是我们在纸面上和黑板上画出来的，只不过是它在平面内的射影，所以不是它的本身，而是它的象征。此外，在作空间图形的时候，还要遇到一种新的基本图形——平面，而作平面不可能用这种简单的方法来完成的。

因此，在作空间图形的时候，必须正确地确定完成某一个作图的意义，特别是作一个平面的意义。

在平面几何作图的基础上，根据平面的基本性质，我们认为：

1. 如果找到了确定一个平面的条件(公理 3 及推论)，这个平面就已经作成了。

2. 如果已经知道两个相交的平面，它们的交线就已经作成了。

3. 如果已经知道一个平面，我们就可以在这个平面内完成平面几何里所有的作图。

以后我们认为在空间完成作图，就是要归纳到有限次数的下面三种基本作图。

1. 过不在一条直线上的三个点作平面；过一条直线和这条直线外的一点作平面；过两条相交直线或两条平行直线作平

面。

2. 作两个平面的交线。

3. 用圆规和直尺在所给的或者所作出的平面内完成作图。

例 1 过已知直线 a 外的已知点 A 作直线平行于直线 a (图 6-7)。

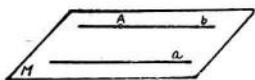


图 6-7

解：过直线 a 和点 A 作平面 M (基本作图 1)；在这个平面内过点 A 作一条直线 b 平行于直线 a (基本作图 3)；直线 b 就是

所求作的直线。

这个作图题只有一解。因为根据平行线的定义，平行于直线 a 的直线 b 应该和 a 在同一平面内。直线 b 经过的点 A 也应在此平面内。但是过直线 a 和点 A 只可以作一个平面 M 。这就是说，所求的直线 b 应当在平面 M 内。根据平行公理，在平面 M 内过点 A 只可以作一条直线平行于已知直线 a ，因此本题只有一解。

例 2 作已知平面 P 和不在这个平面内的已知直线 a 的交点(图 6-8)。

解：在平面 P 内任取一点 A ，使它不在直线 a 上；过点 A 和直线 a 作平面 Q (基本作图 1)；作平面 Q 和平面 P 的交线 b (基本作图 2)；在平面 Q 内直线 a 和直线 b 的交点 C 就是所求的点。

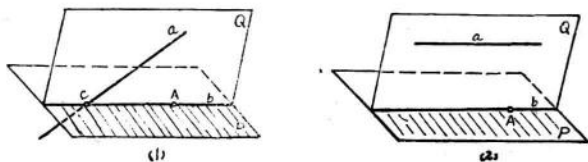


图 6-8

如果直线 a 和 b 相交, 这个作图题有一解(图6—8(1))。
如果直线 a 和 b 平行, 那末这个作图题没有解(图6—8(2))。

习题二十二

回答下面 1—8 题:

1. 自行车为什么做一只脚架就可以了? 而独轮车为什么要做两只脚架? 为什么测量仪器的架子都是三只脚的?

2. 压路机要压平一块地面, 为什么要各个方向来回开动?

3. 要把一张纸贴在墙壁上, 为什么只要上下或左右揩两条浆糊就够了?

4. 怎样用两条细绳来检查方桌的四条脚的端点是不是在同一个平面内?

5. 四条线段依次首尾相接, 所得的封闭图形一定是平面图形吗? 平行四边形是不是平面图形? 梯形呢? 为什么?

6. 设有不在一个平面内的四点, 过其中任意三点各作一个平面。问一共可作几个平面?

7. 设有相交于一点而不在同一个平面内的三条直线, 过其中的任意两条各作一个平面。问一共可作几个平面?

8. 和两条平行线相交的直线是不是在这两条平行线所决定的平面内?

9. 根据以下条件画两两相交的平面: 1) 水平平面和直立平面相交; 2) 水平平面和倾斜平面相交; 3) 两直立相交平面。

10. 求证: 一个平面和不在这个平面内的一条直线最多只能有一个公共点。

11. 过已知直线 a 外的一个已知点 A , 求作直线, 使它和直线 a 垂直相交。

12. 过已知直线 a 上的一个已知点 A , 求作直线 a 的垂线。

这样的垂线有多少条？

13. 在已知平面 M 内，求作一条直线，使它过这平面内的一个已知点 A ，并且和不在这平面内的一条已知直线 a 相交。

§ 6.2 直线和直线的位置关系

一、两直线的位置关系

“一切客观事物本来是互相联系的和具有内部规律的。”在同一个平面内的两条不重合的直线不是相交，就是平行。在空间的两条直线，还有另外一种位置关系。例如，教室里下垂的电灯线和黑板的一条横边缘，它们是不在同一个平面内的两条直线。

不在同一个平面内的两条直线叫做异面直线。它们既不相交，也不平行。

因此，空间的两条不重合直线的位置关系有三种：

1. 异面直线 没有公共点。——不在同一个平面内。
 2. 平行直线 没有公共点。
 3. 相交直线 只有一个公共点。
- } 在同一个平面内。

画异面直线时，要把两条直线画在不同平面内，这样才容易显示出异面直线的特点。例如画异面直线 a 和 b 时，图6—9(1)、(2)的画法比较明确；(3)的画法就不明确。

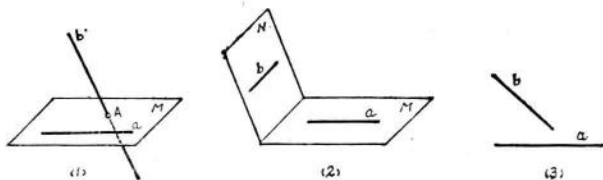


图 6 - 9

动力装置的传动机构中的两条轴线就有三种位置关系。例如,在圆柱齿轮传动机构里,两条轴线是平行的(图 6—10(1));在圆锥齿轮传动机构里,两条轴线是相交的(图 6—10(2));在蜗轮蜗杆传动机构里,两条轴线是异面直线(图 6—10(3))。

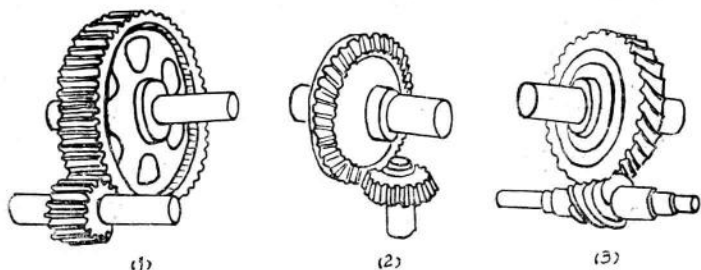


图 6—10

二、平行直线的判定和性质

我们知道,在同一平面内,如果两条直线都平行于同一条直线,那末这两条直线也平行。我们来观察一下空间的情况。建筑工人在安放房屋的桁条时,只要检查两个屋面的两条桁条分别与脊桁平行,就可以判定两条桁条也是平行的。又三架飞机作编队飞行,如果在某一时刻的飞行路线 a 与 b 平行, c 与 b 也平行,自然 a 与 c 也是平行的。从这些实例,可以得出:

三线平行定理 如果两条直线都平行于第三直线,那末这两条直线也平行。

为了证明这个定理,先证明下面的定理。

平行直线的判定定理 如果两个相交平面分别通过两条平行直线,那末它们的交线就和这两条直线平行。

已知:直线 a 和 b 平行,平面 M 和 N 分别过直线 a 和 b , 并且相交于直线 c (图 6—11)。