师专函授学习资料

《初等数学复习及研究》

（平面几何）

学习参考资料

第三分册

（习题解答）

保定地区教师进修学校

邯郸地区教师进修学校

说　明

为了配合梁绍鸿编《初等数学复习及研究》（平面几何）的函授教学，我们编写了这本《习题解答》。内容包括原书中的引言和一、二两章的所有习题，供师专进修学员参考。

这本《习题解答》是由保定地区教师进修学校李子年、王爱俊、王德如和邯郸地区教师进修学校雷国铭、梁美玲、张东海几位同志负责编写的。

由于时间仓促，水平所限，其中错漏很多，敬望读者批评指正，在此谨表谢意。

编者

一九七九年七月

目　　录

引言

习题一……………………………………（ 1 ）

第一章　中学平面几何摘要

第一节　直线形定理

习题二……………………………………（ 9 ）

第二节　有关圆的定理

习题三……………………………………（ 29 ）

第三节　比例线段及相似形定理

习题四……………………………………（ 57 ）

第四节　面积定理

习题五……………………………………（ 99 ）

复习一……………………………………（120）

第二章　推证通法

第一节　命题的形式

习题六……………………………………（211）

第二节　直接证法与间接证法

习题七……………………………………（217）

第三节　综合法与分析法

习题八……………………………………（225）

第四节　演绎法与归纳法

习题九……………………………………（230）

复习二……………………………………（240）

引　言

习　题　一

1. 在几何学里经常有哪两件要做的主要工作？

答　第一件是为了明确概念而确立定义，第二件是为了揭示真理而推证定理。

2. 什么叫做元词？分哪两类？

答　不定义的基本概念叫做元词，它是解释其余一切概念的本源。在元词中，指单纯的事物的叫做元名或基本元素；表示事物间关系的叫做元谊或基本关系。

3. 什么叫做公理？

答　不加证明而采用的命题叫做公理。公理在希腊文的意思是：值得承认的真理。

在数学里，能适用于各科的公理叫数学公理；仅适用于几何一科的公理叫几何公理；在几何公理中，有关作图方法的公理又叫做作图公法。

4. 几何论证的本源安在？

答　几何论证的本源在于选取元词和公理。

5. 建立系统严明的几何学，为什么必须首先选定元词和公理？

答　选定元词和公理之后，几何论证便有了明确的本源，此外再无需诉诸直觉或默契。

6。什么叫做公理体系？

答　选定的元词和公理，彼此相辅而行就组成了所谓公理体系。

7。几何学的产生，是因先有一套公理体系呢？还是由于实际需要？

答　几何学是由于人类生产生活的需要而产生的，不是因为先有一套公理体系而后产生的几何学。

8。关于西方几何学的起源，有什么传说？

答　相传四千多年以前，埃及境内的尼罗河每年泛滥成灾，沿岸的田亩地界尽被淹没，事后必须设法测量，重新勘定田地的界线，这样，便从实际劳动中积累了一些有关土地测量的简单知识，据说西方的几何学就起源于这种测地术。

9。埃及和我国古代对于几何的知识怎样？

答　埃及人很早就知道了许多关于几何的知识，大约公元前1700年，埃及的阿默斯（Ahlnes）手抄了一本书（阿默斯手册），里面载有很多关于面积的测量法以及关于金字塔的问题，这是世界上最古的一本数学书。

我国最早的数学书是“周髀算经”和“九章算术”，里面也载有许多关于几何的问题，由这两部书可以知道“圆周率”及“勾股定理”在我国很早就被发现了。再往前推一些，无论在石器时代的陶器上，或在殷商的钟鼎上都已有了精美的几何图案。所以我国古代的几何知识在很早已达到了很高的程度。

10。墨子说：“圜，一中同长也。”又说：“方，柱隅

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

四讙也。”各是什么意思？

答 这里的“圜”就是圆，那是说圆有唯一的中心，而这个中心距圆上任何点都等远．“方，柱隅四讙也。”其中的“方”是指正方形，“柱”就是边，“隅”就是角，“讙”有相等的意思，这一条说的是正方形的四边及四角各各相等．

11．荀子说：“五寸之矩，尽天下之方也。”是什么意思？这话和欧几里得所提出的那个公设相当？

答 这里的“方”指的是正方形（或长方形），即四个角都是直角的图形；“矩”是测方的一种工具——直角尺，这句话的意思是：用一个小“矩”能测得一切直角，因为所有的直角都是相等的。它和欧几里得的第四公设“凡直角都相等”的意义完全相当．

12．试举出古代希腊的几个数学家，并略述他们对于几何的事迹．

答 古代希腊的数学家有：他勒（Thales，约公元前640—546年）、毕达哥拉斯（Pythagoras，公元前582—493年）、依卜加（Hippocrates，约公元前430年）、柏拉图（Plato，约公元前427—347年）、欧几里得等人．他勒曾发现若干几何定理和证明的方法，这就是理论几何的开端；他还能运用几何定理来解决实际问题，凭一根竹竿就可测得金字塔的高。毕达哥拉斯发现并证明了勾股定理；依卜加编著了第一部初等几何教科书，“反证法”证题是他首先应用的，他与柏拉图同为研究“几何三大问题”的有名人；柏拉图首创现在视为利器的“分析法”，而却立缜密的定义和明晰的公理作为几何学的基础，这种思想也由柏拉图开其先

河；欧几里得搜集当时已知的初等几何材料（包括自己发现的），按照严密的逻辑系统，编成“几何原本”，这书在历史上极负盛名，后世誉为几何学的杰作。

13.为什么说欧几里得的“几何原本”是一部古代的杰作？

答 欧几里得的“几何原本”，从一些特别提出的公理、公设和定义有计划地来论证其他命题，另外，它第一次把丰富而散漫的几何材料整理成了系统严明的读本，这些优点，使它成为人类历史上的科学杰著。

14．我们现在学的几何学叫做“欧几里得几何学”，这个名称是怎样得来的？

答 两千多年来，所有初等几何教科书以及十九世纪以前一切有关初等几何的论著，无不以他的“几何原本”为依据。于是，这部系统严明的著作乃被人看作几何学的经典著作，由于这个历史性的称誉，人们一直就把这种体系的几何学，称为欧几里得几何学。

15．欧几里得的“几何原本”有什么缺点？是不是因为有这些缺点而我们就降低了对这部书的评价？

答 “几何原本”的缺点在于它的基础部分。“几何原本”的基础是用七个定义，五个公设和八个公理来构造的（详见原书5—6页）．

欧几里得给“点”、“线”、“直线”、“面”、“平面”都下了定义，但这些定义都有逻辑上的缺陷．

另外，欧几里得的全盘公设和公理，作为几何学严格的逻辑推理的基本命题过于贫乏，因此，他在推证命题时，往往不得不求助于图形的直观性，而若明若暗地默认一些“显然的事实”。例如“某点介于另两点之间”、“在一直线的同侧或

异侧”、“多边形的内部或外部”、“圆与直线或圆与圆（在一定条件下）的相交”等类的话，在“几何原本”中不时出现，可是这些话的含义或根据，欧几里得并没有预先明确地给指出来。

从严格的逻辑观点来看，欧几里得的“几何原本”确有以上指出的一些缺点，但我们不应该因此便去苛责古人，因为在他的时代来说，其所建立的几何逻辑结构，不能不算是非常严密的了。无疑地，欧几里得在几何发展史上不可磨灭的功绩，是他示范地完成了用形式逻辑建立严明的几何体系这一出色的工作，所以我们对于“几何原本”的评价，并不因为它的缺点而有所降低，历史地看，我们认为这书是一部具有一定历史价值的承前启后的杰作。

16．近代公理法对于建立几何学有何严格的要求？

答 近代公理法要求在建立几何学时，必须把一些无定义的基本概念（元词）挑选出来，而这些概念相互间的关联则在一些不加证明的基本命题（公理）中予以确定；一切新的概念，一定要用基本概念或已有定义的基本概念来下定义；一切提出的几何命题，无论它的本身如何明显，若不是要根据公理或已证的命题来证明它，就要明确宣布它为公理。这就是说，在构成几何学时，只许纯粹按逻辑推理进行，绝不容许诉诸直观或默契。

17．试给“线段”、“半线”、“半面”、“角”下严格定义。

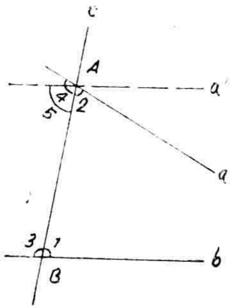
答案参看原书11页或中学课本。

18．试证普雷非耳公理和欧几里得第五公设等效。（可用中学平面几何定理．）

证明　(1) 由普雷非耳公理推欧几里得第五公设.

设直线 a、b 与第三条直线 c 相交于 A、B 两点，$\angle 1$ 和 $\angle 2$、$\angle 3$ 和 $\angle 4$ 各为同旁内角，且满足条件

$$\begin{cases} \angle 1+\angle 2<2Rt\angle, \\ \angle 3+\angle 4>2Rt\angle. \end{cases}$$



(图1·1·1)

过 A 作 $a' \parallel b$，令 a' 与 c 在 $\angle 4$ 侧所成的角为 $\angle 5$（如图 1.1.1）.

那么，　$\angle 3+\angle 5=2Rt\angle$，

$\therefore$　$\angle 4>\angle 5$，$\therefore$　a' 与 a 不重合.

由普雷非耳公理知：　$a \nparallel b$.

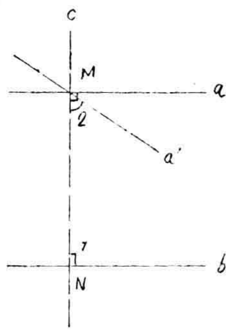
于是，a 与 b 必相交.

又$\because \angle 4>\angle 5=\angle 1$，若a、b 交于 $\angle 3$、$\angle 4$ 侧，则与三角形的外角定理相矛盾.

故　a 和 b 只能在 $\angle 1$、$\angle 2$侧相交，

即　欧几里得第五公设成立.

(2)　由欧几里得第五公设推普雷非尔公理.



(图1·1·2)

方法 1：设 M 是直线 b 外的一点.

过 M 作直线 $c \perp b$，直线 $a \perp c$，

则　$a \parallel b$（垂直于同一条直线

的两条直线互相平行）.

再过 M 引任意一条与 a 不重合的直线 a',

那么，a 在 c 的某一侧与 c 成锐角。

设图 1.1.2 中的 $\angle 2 < Rt\angle$. 于是，$\angle 1 + \angle 2 < 2Rt\angle$.

$\therefore$ a 与 b 必在 $\angle 1$、$\angle 2$ 侧相交.（欧儿里得 第五公设）

$\therefore$ $a' \nparallel b$,

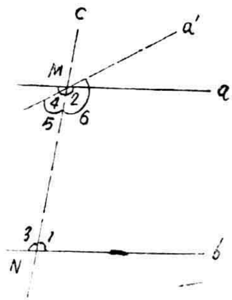
故 过 M 只可以引一条与 b 平行的直线.

方法 2：设直线 c 过 M 点且与 b 交成的角为 $\angle 1$、$\angle 3$，过 M 作直线 $a \parallel b$,

则 $\angle 1 + \angle 2 = 2Rt\angle$,

$\angle 3 + \angle 4 = 2Rt\angle$.

再过 M 作不与 a 重合的直线 a'.



（图1·1·3）

令a'与 c 所成的角为 $\angle 5$、$\angle 6$,

$\because$ $\angle 4$ 和 $\angle 5$，$\angle 2$ 和 $\angle 6$ 有公共边 MN，且另一边不重合，

$\therefore$ $\angle 5 \neq \angle 4$, $\angle 6 \neq \angle 2$.

于是，在同侧二内角的和中有：

$$\angle 3 + \angle 5 < 2Rt\angle \quad 或 \quad \angle 1 + \angle 6 < 2Rt\angle.$$

由普雷非耳公理知：a' 与 b 必相交.

仿此可证：过 M 而不与 a 重合的所有直线都和 b 相交.

故 普雷非耳公理成立.

由（1）和（2）的证明得：普雷非耳公理和欧儿里得第

五公设等效．

19“亚几默德公理”在我国是谁首先道出？它又叫做什么公理？

答　这条公理在我国首先是墨子道出的，他在“墨经”上曾说：“穷，或有前不容尺也。”这话的意思已含有“亚几默德公理”的内容，因此，现在将此公理应改称或不容尺公理，但此说尚未定论．

亚几默德公理又称度量公理，有了它便可以度量任意线段的“长度”．

20．希尔伯特公理体系中有哪个元名？哪几个元谊？哪几组公理？

答　希尔伯特公理体系中有三个元名、五个元谊、五组公理（计二十条）详见下表：

- 希尔伯特公理体系
  - 元词
    - 元名
      - 点
      - 直线
      - 平面
    - 元谊（以释万名万谊）
      - 结合关系
        - 点在直线上
        - 点在平面上
      - 顺序关系——一点介于两点之间
      - 合同关系
        - 两线段相等
        - 两角相等
  - 公理（以推万理万法）
    - 结合公理（$Ⅰ_1$—$Ⅰ_8$）
    - 顺序公理（$Ⅱ_1$—$Ⅱ_4$）
    - 合同公理（$Ⅲ_1$—$Ⅲ_5$）
    - 平行公理（Ⅳ）
    - 连续公理（$Ⅴ_1$—$Ⅴ_2$）

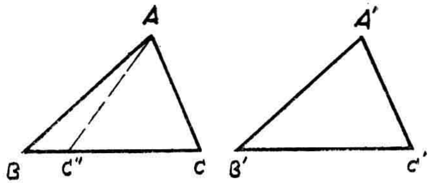
试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第一章

习题二

1．证明§5定理13·1°，但不许用以后的定理．

已知 在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，$AC=A'C'$．



（图2·1）

求证 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$．

分析 因为$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，在此条件下，若证明$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$，由定理2·1°知，只需证出$BC=B'C'$即可．

证法1 （反证法） 如果$BC\neq B'C'$，则$BC>B'C'$，或$BC<B'C'$．今设$BC>B'C'$，在BC上截取$CC''=B'C'$，连结AC''，则$\triangle AC''C\cong\triangle A'B'C'$，$\therefore$ $\angle AC''C=\angle B'=\angle B$，这与定理6（$\angle AC''C>\angle B$）矛盾，

$\therefore$ $BC\not>B'C'$．

同法可证 $BC \nless B'C'$，故只能是 $BC=B'C'$.

由此可得 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.（sas）

证法 2（迭合法）把 $\triangle A'B'C'$ 置于 $\triangle ABC$ 上，使 $A'C'$ 与 AC 重合，$\because$ $\angle C=\angle C'$，$\therefore$ BC 顺 $B'C'$ 落下，

此时可能有三种情况出现：

（1）B' 点与 B 点重合（$CB=C'B'$），则 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$；

（2）B' 点落在 BC 上（$BC>B'C'$）；

（3）B' 点落在 CB 的延长线上（$BC<B'C'$）.

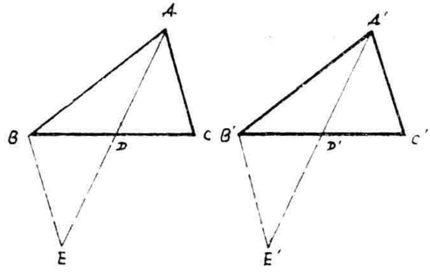
设 B' 点落在 BC 上的 C'' 处（图 2·1），于是 $\triangle A'B'C'$ 占有 $\triangle AC''C$ 的位置，即 $\triangle AC''C \cong \triangle A'B'C'$，

$\therefore$ $\angle AC''C=\angle B'=\angle B$. 而 $\angle AC''C>\angle B$（定理 6）

$\therefore$ B'点不能落在 BC 上.

仿此可证：B' 点也不能落在 CB 的延长线上。于是，B' 点只能与 B 点重合，故 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

2. 两三角形若一边的中线及另两边对应相等，则它们必是合同的.



（图2·2）

已知 在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，AD和$A'D'$各为其对应边的中线，且$AD=A'D'$，$AB=A'B'$，$AC=A'C'$。

求证 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

证明 分别延长AD与$A'D'$，使$DE=AD$，$D'E'=A'D'$，连结BE及$B'E'$，

则 $\triangle BDE\cong\triangle ADC$、$\triangle B'D'E'\cong\triangle A'D'C'$.

$\therefore$ $\angle DAC=\angle BED$，$AC=BE$，

及 $\angle D'A'C'=\angle B'E'D'$，$A'C'=B'E'$.

于是 $\triangle ABE\cong\triangle A'B'E'$，(s s s)

$\therefore$ $\angle BAD=\angle B'A'D'$，$\angle BED=\angle B'E'D'$·

而 $\angle BAC=\angle BAD+\angle DAC$，

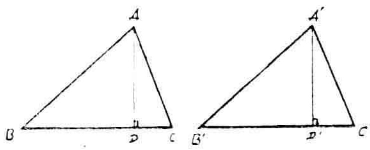
$\angle B'A'C'=\angle B'A'D'+\angle D'A'C'$，

$\therefore$ $\angle BAC=\angle B'A'C'$. 因此，$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$·(s a s)

3. 两三角形若一边的高及另两边对应相等，试问它们是否合同？为什么？

答 不一定合同。

因为：(1)若二三角形之高均在其内部或外部或为一直角边



（图2·3·1）

时，则此二三角形合同。例如，在 $\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$AB=A'B'$，

AC＝A′C′，AD⊥BC，A′D′⊥B′C′，

且　AD＝A′D′，

则　Rt△ABD≌Rt△A′B′D′、Rt△ADC≌Rt△A′D′C′，

∴　∠BAD＝∠B′A′D′、∠DAC＝∠D′A′C′，

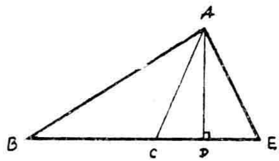
∴　∠BAC＝∠B′A′C′.

故　△ABC≌△A′B′C′，　（sas）

仿此可证其他两种情形.

（2）若不符合（1）中之条件，则二三角形不合同.

如图2·3·2所示，在△ABC和△ABE中，AB＝AB，AC＝AE，AD是它们的对应高，显然，△ABC与△ABE不合同.

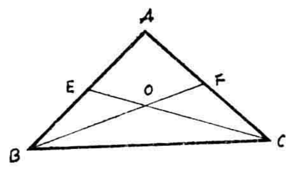


（图2·3·2）

4．有两中线相等的三角形必是等腰的.

已知　CE和BF分别是△ABC的AB边及AC边的中线，且CE＝BF.

求证　△ABC是等腰三角形.



（图2·4·1）

证法1　设O点是△ABC的重心，则

OE＝OF，OB＝OC，

又　∠EOB＝∠FOC，

∴　△EOB≌△FOC.

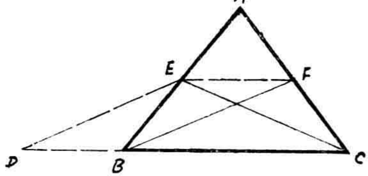
∴　EB＝FC，　而　EB＝$\frac{1}{2}$AB，EC＝$\frac{1}{2}$AC.

∴　AB＝AC，　故　△ABC是等腰三角形.

证法 2 连结 EF，过 E 作 ED∥FB，则 四边形DBFE为平行四边形。

∴ ED＝FB＝EC，∴ ∠D＝∠FBC＝∠ECB，于是 △EBC≅△FCB（s a s） ∴ ∠EBC＝∠FCB。

∴ △ABC是等腰三角形。



（图2·4·2）

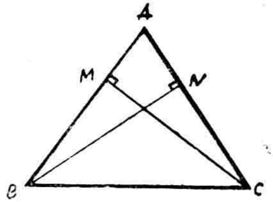
证法 3 参看原书 95 页“例题 4”。

证法 4 参看原书 97 页“习题七”的第 6 题。

5. 有两高相等的三角形必是等腰的。

已知 在 △ABC 中，CM⊥AB，BN⊥AC，且 CM＝BN。

求证 △ABC 是等腰三角形。



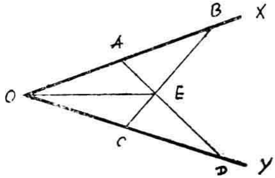
（图2·5）

证明

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}CM\perp AB\\ BN\perp AC\end{array}\right\}\Longrightarrow \angle BNC=\angle CMB\\ \qquad\qquad CM=BN\\ \qquad\qquad BC=CB\end{array}\right\}\Longrightarrow \triangle MBC\cong\triangle NCB$$

$\Longrightarrow \angle MBC=\angle NCB \Longrightarrow \triangle ABC$ 是等腰三角形。

6．在∠XOY的边OX及OY上各取两点A、B及C、D，使OA＝OC且OB＝OD．连AD与BC设交于E，求证：OE平分∠XOY．



（图2·6·1）

已知 如图2·6·1所示，OA＝OC，OB＝OD，E是AD和BC的交点．

求证 OE平分∠XOY．

证法1

$$\left.\begin{array}{l} OA=OC \\ OB=OD \\ \angle AOD=\angle COB \end{array}\right\}\Longrightarrow \triangle AOD\cong\triangle COB\Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Longrightarrow\angle B=\angle D \\ \angle AEB=\angle CED \\ AB=CD \end{array}\right\}\Longrightarrow \left.\begin{array}{l} EB=ED \\ OB=OD \\ OE=EO \end{array}\right\}\Longrightarrow \triangle BOE\cong\triangle DOE$$

$$\Longrightarrow\angle BOE=\angle DOE\Longrightarrow OE\text{平分}\angle XOY.$$

证法2 连结BD，

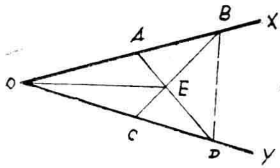
则 $\angle OBD=\angle ODB$，

又 AB＝CD（等量的差相等），BD＝DB，

∴ $\triangle ADB\cong\triangle CBD$，

∴ $\angle ADB=\angle CBD$，

∴ EB＝ED．



（图2·6·2）

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com