

全息摄影在力学上的应用

(译 文)

《 激光技术在力学上应用科研组 》

同济大学科学技术情报组编印

一 九 七 五 年 一 月

位移及应变场的摩尔* (Moiré) 分析

西柴 A. 希爱姆马雷拉(Cesar.A.Sciammarella)

提 要

摩尔法提供了一种于二维的及三维的物体表面上直接确定位移和应变场的方法。这篇文章主要是为系统地介绍摩尔方法而写的。我们回顾了需要清楚了解这个主题的基本原理，并且把它们扩展开来可以以从一般观点出发就能清楚了解其整个领域的内容，并且还有了一定的工作知识。

这篇文章所介绍的宽广范围的材料会给读者一个很好的基础去掌握摩尔方法范围内大多数这个技巧的现代的发展情况。作者希望读者阅读这篇文章之后能够在他们所从事的工作范围内知道摩尔方法的若干可能的应用。

鉴于这篇文章所包含材料的冗长，已经不可能再介绍摩尔方法的应用。在这一点上只要说一下摩尔方法已经在具有工程兴趣的问题中如塑性、热应力、粘弹性材料、复合材料、压力容器、板与壳等找到了很多的应用场合就已足够了。

名 词 汇 编

$a(X, y)$	= 传递函数的振幅部份。
d	= 位移向量。
E	= 光矢量的振幅。下标表示衍射的级。
$r_{\frac{E}{n}}^n$	= $E_n E_{r-n}$ 。
E	= 光矢量复振幅。下标表示衍射的级。双下标表示级的次序。

* 摩尔(MOiré) 这个字原是法文，意思是法国的一种波纹布，各国对于这种实验分析法都译其音称之，我们也译其音称为摩尔分析法。——译注。

$\underline{F}(x, y)$	=传递函数。
f	=透镜焦距。
h_p	=过滤函数的权。
$(h_p)_q$	=正交过滤函数的权。
i	=定义为入射光束与光栅法线的交角
$I(x)$	=映象平面上坐标为 x 的一点处的光强度。
I_0	=映象平面本底的光强度。
I_n	=第 n 个谐波的映象的光强度振幅。
$\tilde{I}_k$	= $I(x)$ 滤光后的型式。
$\tilde{I}(x)$	= $I(x)$ 的福利衰变换
$K(v_x, v_y)$	=成象系统的光瞳函数。
$\bar{K}(v_x, v_y)$	= $K(v_x, v_y)$ 的福利衰变换。
$L(v_x, v_y)$	=成象系统的频率——反应函数。
m	=透镜系统的放大率。
P	=光栅的格距。
$P(x)$	=光栅格距的局部值。
u, v, w	=模型上的点分别平行于 x, y, z 坐标轴的位移。
$U_1(v_x, v_y)$	=映象和实物的光复振幅矢量。 有一划的量表示福利衰变换。
$U_0(v_x, v_y)$	
t	=光栅间的空隙。
$T(x, y)$	=透过率函数。
$\alpha(x, y)$	=传递函数的相位部份。
β_n	= n 级的衍射波前与光栅法线的交角。
ω	=角频率。
δ	=条纹间距。
Δx	= x 方向引起的剪切，等于 $2\Delta x$ 。
Δy	= y 方向引起的剪切。
$\bar{\Delta y}$	= y 方向引起的剪切，等于 $2\Delta y$ 。

ε	= 应变。
$O(x)$	= 从坐标原点起表示光复振幅的矢量
γ	总转角。
γ	= 密度对于对数曝光曲线的斜率。
θ_r	= 定义为出射光束与光栅法线的交角。
θ_n	= 定义为衍射光束与光栅法线的交角。
θ_i	= 定义为入射光束对于主平面 π_1 的交角。
θ_i''	= " " " " " " " " " 次平面 π_2 的交角。
θ_n'	= 定义为 n 级的衍射光束对于主平面 π_1 的交角。
θ_n''	= 定义为 n 级的衍射光束对于次平面 π_2 的交角。
θ_n'	= 定义为 n 级的衍射光束对于变形后的光栅的法线的交角。
λ	= 光的波长。
ν	= 空间的频率。
π_1	= 主平面 (垂直于光栅面及垂直于光栅线的平面)。
π_2	= 次平面 (垂直于光栅面及平行于光栅线的平面)。
π_3	= 光栅平面。
ϕ	= 光矢量的相位。下标表示衍射的级。
ϕ_{kl}	= 相应于次序为 k, l 的光矢量的相位。
$\overline{\phi}_s$	= 依赖于第 s 级的光栅凹槽性质的相位常数。
ϕ_{r-n}	= $\phi_n + \phi_{r-n}$ 。
$\overline{\psi}(x)$	= 调制函数。

* 次平面 Secondary plane . 见 π_2 项 — 译注。

光 栅

周期性的讯号在通讯理论中起着十分重要的作用。例如将按正弦变化的函数作为载波是应用广泛的。信息可用调幅和调频两个基本方式施加于载波上。光栅于光学中起着相似的作用并且振幅变化和频率变化都能施加在光栅上。

为了分析光学的数据，有必要考虑一下如何能把一个需要的讯号放入一个波前。让我们考察一个平面波前。

$$\underline{E}(z) = E e^{i\phi} \quad (1)$$

在方程(1)中，我们能使振幅 E 改变，也能使矢量的相位产生变化，或者使振幅和相位都起变化。

让我们假定有一平面波前碰撞到一张底片或一个透明体上。令 $\underline{E}_i(x, y)$ 表示描绘入射波前的复振幅函数，而 $\underline{E}_0(x, y)$ 是射出的波前；这张底片的传递函数表示为

$$\underline{F}(x, y) = \frac{\underline{E}_0(x, y)}{\underline{E}_i(x, y)} = a(x, y) e^{i\alpha(x, y)} \quad (2)$$

这里

$$a(x, y) = \frac{E_0(x, y)}{E_i(x, y)} \quad (3a)$$

及 $\alpha(x, y) = \phi_0(x, y) - \phi_i(x, y) \quad (3b)$

因为物理的光检测器（例如，人的眼、底片、光电管）的性能只能感觉光强度而不能直接感觉光的振幅，所以必须引入另外一种函数表示底片的传递性质。一张底片的传递性质是以强度表示的，它定义为透过率。若入射光的强度为 $I_i(x, y)$ 及光通过底片后的强度是 $I_0(x, y)$ ，透过率定义为

$$T(x, y) = \frac{I_0(x, y)}{I_i(x, y)} \quad (4)$$

传递函数与透过率之间的关系为

$$T(x, y) = \tilde{F}^*(x, y) \cdot \tilde{F}(x, y) = a^2(x, y), \quad (5)$$

这里符号 $\tilde{\cdot}$ 表示复共轭的量

一个光栅可定义为能对一个入射波前产生周期的振幅变化或相位变化，或两者皆有变化的一个光学元件。这一光栅将以其透过率函数来数学地表征。假如光栅能改变入射波的振幅，便称这光栅为振幅光栅，其透过率函数是实数的。假若能改变相位，这光栅便称为相位光栅，其透过率函数是虚数的。如果同时振幅和相位都改变的，传递函数是复数的。

我们将要考察正弦光栅，已很明显，任何其他类型的光栅可以应用福利衰定理分解成为许多正弦光栅之和。

一个振幅正弦光栅的透过率函数的形式如下

$$F_1(x) = a + \frac{a}{2} \cos \frac{2\pi x}{P} \quad (6)$$

这里 P 是光栅的格距，而 $\frac{1}{P}$ 称为光栅的基本空间频率。因为余弦函数于交替半周中是负的值，而光的振幅矢量却不可能具有负值，因此，一个偏差项 a 就被引入方程(6)。

在这点上，很容易回忆起透镜的一个重要的性质。让我们考虑图 1 中的光学装置。我们有一透镜，它的前、后聚焦平面位于距透镜主平面距离 f 之处。光通过物平面的传输可由方程(2)的传递函数来表示。方程式(1)所表示的平面波前照明物面，它是准直、相干、及单色的光。从物体平面射出的光由下式给出：

$$\begin{aligned} \tilde{E}_0(x, y) &= F(x, y) E e^{i\phi(x, y)} \\ &= E a(x, y) e^{i[\phi(x, y) + \alpha(x, y)]} \end{aligned} \quad (7)$$

在前、后聚焦平面内的复数振幅之间的关系表示为(1)†：

$$E_0(\xi, \eta) = \int_A E_0(x, y) e^{-\frac{12\pi}{\lambda} \left(\frac{\xi x}{f} + \frac{\eta y}{f} \right)} dx dy \quad (8)$$

这个方程式可以如下的陈述加以说明：后聚焦平面内的复振幅可以由前聚焦平面的传递函数通过福利衰变换得到。后聚焦平面中接收到的强度由下式给出

† 括号 () 表示这篇文章后面的参考文献。

$$I(x, y) = E_0^* \cdot E_0$$

(9)

因为光学系统的输出只可能以能量接收器的形式（人眼、光电管、底片）接收，它仅能接收变换后振幅的平方。如果我们在物体平面上放了一块振幅正弦光栅，在后聚焦平面上我们将观察到三个点（图2），中间的点对应于偏差项，而旁边的二个点相当于+1及-1级的衍射，如果光栅不是一个正弦光栅而是一个具有如图3所

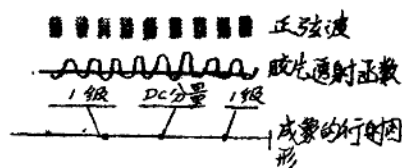
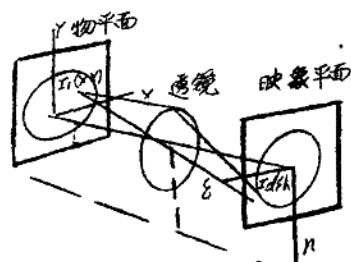


图1·透镜的福利衰变换性质。

图2·光学上获得的一个正弦光栅的福利衰光谱。

示的传递函数的光栅，在后聚焦平面上我们会观察到多数的点，这些点中属于同级的点成对地与偏差项组合起来，便产生了进入传递函数的福利衰展开式的相继的谐波。

我们只在一个方向上已考察过正弦光栅。让我们假设我们有一个传递函数对应于正交方向的两个正弦光栅

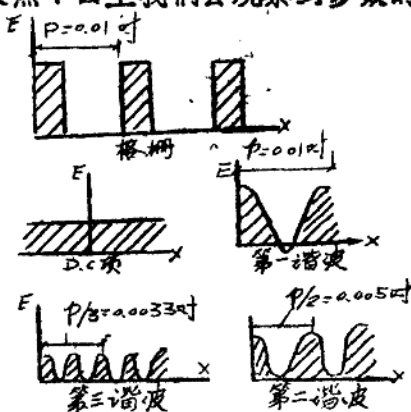


图3

$$F(x, y) = a + \frac{a}{2} \cos \frac{2\pi x}{P} \cos \frac{2\pi y}{P}$$

(10)

y 方向的正弦光栅于 **x** 方向产生一个衍射图形，**x** 方向的正弦光栅于 **y** 方向产生一个衍射图形。如果我们有一正弦光栅其空间方位是与铅直方向成 30° 角，图 4。这个衍射图形将出现在与铅直方向成 30° 角的方向。

如果替换简单的正弦光栅，我们便有了更加复杂的光栅，其衍射图形将组成一系列的点。

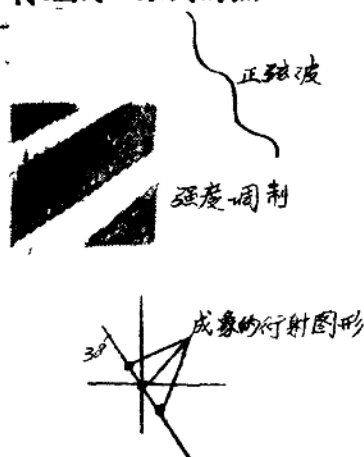


图 4·一个相对于垂线定位为 30° 的正弦光栅的福利光谐。

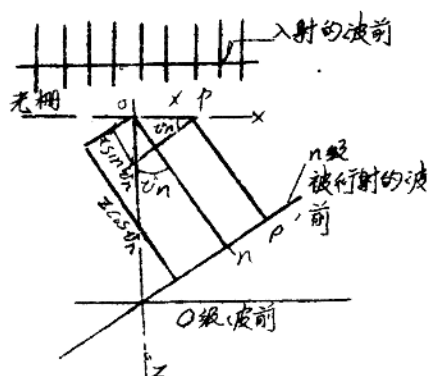


图 5·由一个衍射光栅产生的波前及坐标系。

让我们考虑一个包含在坐标系 **x**、**y** 平面内的光栅，如图 5 所示。一个波长为 λ 且为单位振幅的光的平面波前垂直地入射在光栅上，当它经过光栅时，便分裂成为不同的衍射级。相对于光栅法线各衍射级的角度可以下式表示：

$$\sin \theta_n = \frac{n\lambda}{P} \quad (11)$$

从光栅射出的波前可以下列方程式表示

$$E(x, z) = E_0 e^{\frac{2\pi iz}{\lambda}} + \sum_{j=1}^{j=n} E_j e^{2\pi i \frac{z \cos \theta_j + x \sin \theta_j}{\lambda}}$$

$$+ \sum_{j=1}^{j=n} E_j e^{2\pi i \frac{z \cos \theta_j - x \sin \theta_j}{\lambda}} \quad (12)$$

这里，第一项对应于零级波前，第二及第三项相当于负的及正的衍射级。指数函数的自变量是相对于 $z=0$ 平面的波前的各个相位。

我们已经看到一个透镜怎样起着光谱分析器的作用，即在其后聚焦平面上产生了一个位于前聚焦平面上的光栅的传递函数的光谱。如果在透镜 I 的后聚焦平面上的衍射光谱用作为透镜 II 的前聚焦平面上的物体图 6，透镜 II 的后聚焦平面上将有一个光栅的映象，我们已经产生了一种变换的变换，得到了原来的传递函数。容易看到，于透镜 II 的前聚焦平面上我们能够阻挡若干频率，而所得到的映象会缺掉这

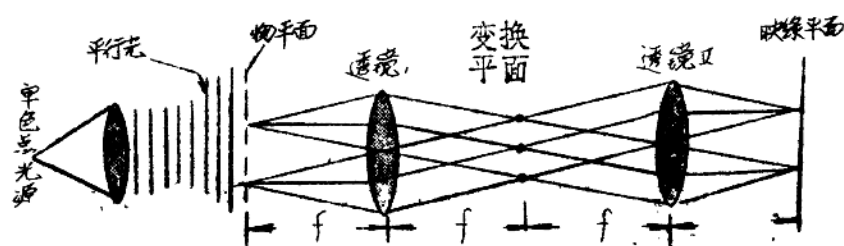


图 6. 光学过滤的光学装置

些个别的（频率）分量。这个过程称为光学过滤。利用了这种光学过滤的过程我们能够控制方程式 (12) 的项数，这将有助于映象的形成。

我们能够只让偏差背景项及一个频率通过，在这情形中，我们将得到一个具有相应频率的正弦光栅。如果我们有二个正交的光栅，我们便能够消除二个条线系统中的一个（图 7a，图 7b）或者我们允许沿 45° 对角线方向的级通过（图 7c），便能得到沿着 45° 的光栅。当我们选择其他的对角线时，就能够产生在 x 轴和 y 轴方向之间

的许多中间方向的光栅。

图7. 一个光栅和它的光谱的照相。(a)十字光栅和光谱；(b)铅直线和光谱；(c)水平线和光谱；(d)45度线和光谱。

光栅作为位移讯息的载流子

我们在一个模型的表面上刻划上光栅，这个光栅在这情形中起了一个讯息载流子的作用。想得到的讯息是模型表面上各点的位移。在

这一点上为了简化分析，我们假定这个光栅是正弦的。于是传递函数由方程(6)给出。

现在假设我们作用一个载荷于模型上使模型发生变形方程(6)便变成

$$F_2(x) = a + \frac{a}{2} \cos \frac{2\pi x}{P(x)} \quad (13)$$

这个载流子已经被载荷所引起的变形所调制，方程(13)中的余弦项的幅角可以写成

$$\theta_2(x) = \frac{2\pi x}{P(x)} = 2\pi \left(\frac{x}{P} + \bar{\varphi}(x) \right) \quad (14)$$

这里 $\bar{\varphi}(x)$ 称为调制函数。于图 8a 中我们已经绘示了一个假设的调制函数，图 8b 表示这个载流子而图 8c 表示这个调制后的载流子。图 8b 的矢量图表示矢量 $\vec{E}_1$ ，它以不变的频率 $\nu = 1/P$ 旋转并产生载流子。图 8b 的右面点绘出矢量 $\vec{E}_1$ 的相位。在坐标轴 x 的点处矢量 $\vec{E}_1$ 的相位定义如从坐标原点开始到坐标 x 的点这个矢量的总转角。图 8c 右面的图给出产生调制过的载波的矢量的相位图。调制了的载流子矢量的相位是在未调制的载流子的相位上加上调制函数 $\bar{\varphi}(x)$ 而得到，如方程(14)所示。矢量 $\vec{E}_1$ 将有一个变的角速度

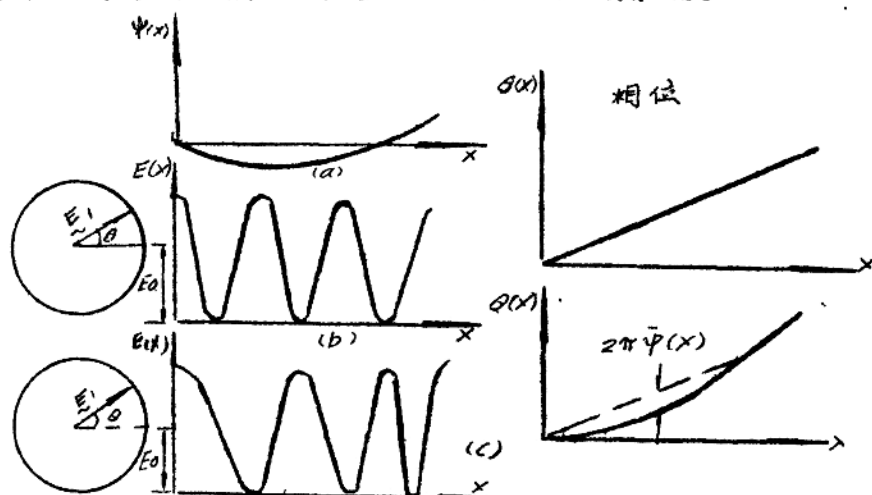


图 8 一个载流子的矢量表示。(a) 调制函数；
(b) 未变形的载流子；(c) 变形后的载流子。

$$\omega(x) = \frac{d\theta(x)}{dx} = 2\pi \left(\frac{1}{P} + \frac{d\bar{\psi}(x)}{dx} \right) \quad (15)$$

相位调制信号的瞬时频率可定义为

$$\frac{1}{P(x)} = \nu(x) = \frac{\omega(x)}{2\pi} = \frac{1}{P} + \frac{d\bar{\psi}(x)}{dx} \quad (16)$$

从 (16)

$$\nu(x) - \nu = \frac{1}{P(x)} - \frac{1}{P} = \frac{d\bar{\psi}(x)}{dx} \quad (17)$$

现在我们需要把上面许多量和实际的变形联系起来。

让我们于图 9 中考察点 P，其未变形时的坐标是 x_0 ，变形后的坐标是 x 。对应于未变形位置时点 P 处的光的振幅的相位矢量是

$$O_2(x) = 2\pi \frac{x_0}{P} \quad (18)$$

在变形时点 P 与一个未变形时的点 P_1 重合。对应于 P_1 的相位是

$$O_1(x) = 2\pi \frac{x}{P} \quad (19)$$

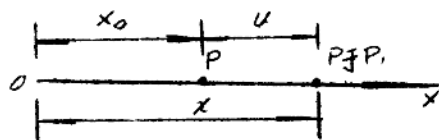


图 9. 未变形及已变形的光栅

两个相位的差是

$$O_1(x) - O_2(x) = \frac{2\pi}{P} (x - x_0) \quad (20)$$

并且因为按定义有

$$u = x - x_0 \quad (21)$$

这是点 P 沿 x 方向的位移，于是有

$$O_1(x) - O_2(x) = \frac{2\pi}{P} u \quad (22)$$

可是鉴于光栅是印到模型上去的，坐标轴与光栅同时在变形，便有

$$O_2(x) = O_0(x) - 2\pi \frac{z_0}{p} = 2\pi \frac{z}{p(x)} \quad (23)$$

于是有

$$u = \frac{P}{2\pi} [O_1(x) - O_2(x)] = P \bar{\psi}(x) \quad (24)$$

我们还能够看出，按照(17)及(24)有

$$\frac{du}{dx} = P \left(\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p} \right) = -P [v(x) - v] = -P \frac{d\bar{\psi}(x)}{dx} \quad (25)$$

对小变形有

$$\epsilon_x = P [v(x) - v] = P \frac{d\bar{\psi}(x)}{dx} \quad (26)$$

可见，频率的改变直接与模型的应变有关。

我们的问题是创造检查出对我们有兴趣的讯息的方法，这些讯息是位移及它们的导数等。一种可能的检查方法是于模型光栅之前引入第二片光栅，称为参考光栅。

摩 尔 法

在摩尔法中，我们将要用一种光学系统——眼、照相机、透镜、透镜系统——去研究两个重叠的光栅所形成的映象的问题。为了这个目的，我们可以利用一个光学系统的扩展物体的成象理论来进行分析。方法上，于观察摩尔条纹所用的光学系统含有二个设在物体平面的光栅，一个透镜及一个设置在映象平面的检光器。我们可以准直的单色的相干光去照明物体平面或以非相干光去照明物体平面。

福利哀变换用于光学分析（见483页，参考文献（I））证明—

个光学系统会起象过滤器那样的作用，即容许若干空间频率通过并阻止其余的频率通过。

在相干光照明的情形中，如果我们称映象光的复数振幅矢量的福利衰变换 $\bar{U}_1(V_x, V_y)$ ，这里 V_x 及 V_y 都是空间频率；称物光复数振幅矢量的福利衰变换为 $\bar{U}_0(V_x, V_y)$ 及称透镜的频率反应函数为 $K(V_x, V_y)$ ，或光瞳函数

$$\bar{U}_1(V_x, V_y) = \bar{U}_0(V_x, V_y) \bar{K}(V_x, V_y) \quad (27)$$

从方程(27)可推知映象的频率分量只依赖于物的相应的分量，且这两个分量之比为 $\bar{K}$ 。如果我们考察一个理想的透镜，图10， $\bar{K}(V_x, V_y) = 1$ ，若 $V_x^2 + V_y^2 < V_{\max}^2$ ，这里 $V_{\max}$ 是透镜系统允许通过的最大空间频率，这个映象传递函数不会与物的传递函数相同，它会缺少某些频率。

如果照明是非相干的，一种相似于方程(27)的关系式适用于表示光强度的分布。

称呼映象强度的福利衰变换为 $\bar{I}_1(V_x, V_y)$ ，物强度的福利衰变换为 $\bar{I}_0(V_x, V_y)$ 及透镜反应函数为 $\bar{L}(V_x, V_y)$

$$\bar{I}_1(V_x, V_y) = \bar{I}_0(V_x, V_y) \bar{L}(V_x, V_y) \quad (28)$$

物到映象平面的变换与方程(27)相似，但适用于强度而不适用于复数振幅。这个频率反应函数 $\bar{L}(V_x, V_y)$ 为光瞳函数 $K(V_x, V_y)$ (见485页，参考文献(1))的自动关连函数所给出。这个规格化的频率对相干的及不相干的照明反应如图10所示。我们能够看出，在不相干照明的情形中，不同的衰减视不同的频率而定。

因为我们已经假定了一个理想的透镜，这个光瞳函数是实数的，并且没有相位的移动。所以，一个正弦物的映象仍是正弦的，频率是

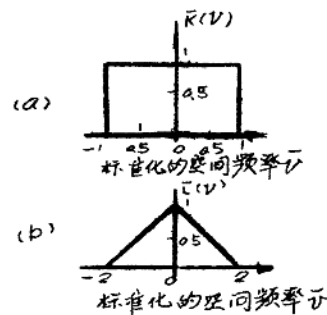


图10·透镜的频率反应 (a) 相干光照明，(b) 不相干光照明。

一样的，但是降低了对比度。这里有一个最大的频率，超过它就不会成象。上面的叙述同时适用于相干的和不相干的照明，其中惟一的差别是在后者情形中，衰减较前者为强。

我们现在可以分析两个光栅重叠在一起的效果。为了简化分析，让我们考察如方程(6)及(13)所示的光栅重叠在一起，假定它们都位于同一平面内。合成的传递函数是

$$F_R(x) = F_1(x) F_2(x) = a^2 + \frac{a^2}{2} \cos \frac{2\pi x}{P} + \frac{a^2}{2} \cos 2\pi \left(\frac{x}{P} + \psi(x) \right) \\ + \frac{a^2}{8} \cos 2\pi \left(\frac{2x}{P} + \psi(x) \right) + \frac{a^2}{8} \cos 2\pi \psi(x) \quad (29)$$

这个合成的传递函数包括相应于两个重叠的光栅的二项，加上两个其它的项具有调制这些映象的复数振幅的效果。如果我们现在假设一个振幅为 E 的平面波前碰撞到这两个重叠的光栅，合成得出的振幅可表示为

$$E_R = E F_R(x) \quad (30)$$

映象平面所接收的强度为

$$I = E^2 \quad (31)$$

如果我们在映象平面内放入一张底片去记录这个强度，这个底片的透过率函数是

$$T(x) = KI(x)^{-\gamma} = k(E_0^2 F_R^2(x))^{-\gamma} \quad (32)$$

这里 γ 是密度对曝光之对数的曲线上直线部分的斜率， k 是一个比例常数。如果我们假设 $\gamma = \frac{1}{2}$ ，则除比例常数之外，底片的透过率函数变成与方程(29)给出的传递函数相同。图11表示用一个微光度计扫描一张摩尔图形而得到的一条摩尔条纹的光强度迹线的记录。图形是用每吋300根线的光栅并放大了250倍来描绘的。方程(29)包含了可以从图11观察到的基本特点，在这情形中载流子是每吋300根线的光栅并且振幅已被调制。眼睛觉察到这个包络线而这个包络线形成了摩尔条纹。这种现象相似于声学及无线电工程中所观察到的击拍

现象。

图 11. 沿着一个摩尔图形的微密度图。

现在让我们来考察这些包络线上的最大振幅的点。周期已由方程 (25) 中的最后一项所给定。每次当

$$\psi(x) = n \quad (33a)$$

我们就得到最大的强度。回忆方程 (24)，最大值对应于位移等于

$$u = n P \quad (33b)$$

最小值对应于位移等于

$$u = \left(\frac{2n+1}{2} \right) P \quad (33c)$$

我们能够看出，摩尔图形的形成相当于使用了一个余弦函数作为一个基本载流子，这个载流子随后被变形所调制，而最后这个调制函数的整数值在载流子通过另一个光栅，一个“流子”滤波器时被检查出来。这个步骤具有产生一个调制包络线的效果。这个包络线可以用肉眼观察而检查出来。

在前面的分析中，我们假设了 $\gamma = \frac{1}{2}$ ，如果 $\gamma \neq \frac{1}{2}$ ，这个合成传递函数会包含较高级的项在内，但所得结论并不会因这些项的出现而有所影响。

我们已经分析了相干光照的情形。如果光照是不相干的，我们将

考虑以透过率代替传递函数。这个最后的结果与以前所得的一个相同，只是不同项的相对强度有所改变。如果这个光栅不是正弦式的，更为高级的分量会进入相应的项中去。如果我们考虑这包络线并略去光栅的分量，强度的表达式变成(2)

$$I(x) = I_0 + I_1 \cos 2\pi \bar{\psi}(x) + I_2 \cos 4\pi \bar{\psi}(x) + I_3 \cos 6\pi \bar{\psi}(x) + \dots \quad (34)$$

一种通常的矢量图，图12，可以用来表示相应于方程(34)的强度分配。 I_0 代表背景的强度，

而常数振幅的矢量 $I_1, I_2, \dots$

表示讯号的分量的振幅。假如在方程(34)中除了基本分量之外其他的都消去，我们便得到(2)、(3)

$$O(x) = 2\pi \bar{\psi}(x) = \arccos \frac{I(x) - I_0}{I_1} \quad (35)$$

这里 $O(x)$ 是矢量 I_1 的相位，定义为从图形的开始到点 x 之间矢量转过的角度。根据方程(24)

$$u(x) = P \frac{O(x)}{2\pi} = P \bar{\psi}(x) \quad (36)$$

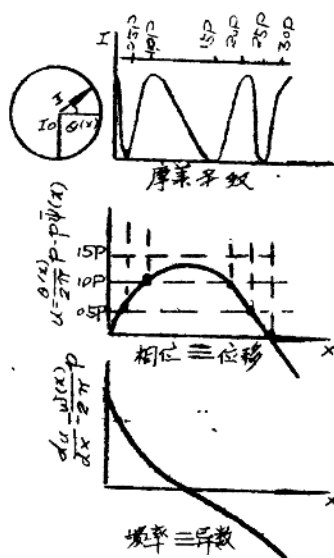


图12. 一个摩尔条纹图的光强度迹线的矢量表示。

我们能够看出，利用了摩尔现象，我们已经能够得到这个调制函数了。这个调制函数乘上了参考光栅的栅距便得到沿着参考光栅的法线方向投射的位移。每当

$$\bar{\psi}(x) = n \quad (37)$$

强度就会是最大。当

$$\bar{\psi}(x) = \frac{2n+1}{2} \quad (38)$$

强度就是最小。