



刷百题不如解透一题

赠“2016年全国各地高考数学压轴题的分析与解”电子版

高考数学满分得主 新颖解题方法
教辅与APP连接 多元增值服务

一题一课

高考数学 压轴题的分析与解

GAOKAO SHUXUE
YAZHOUTI DE FENXI YU JIE

兰琦 著

这是一本可以无限拓展的书
扫一扫进入广阔的数学海洋



扫码下载
光子学习APP



打开光子学习
扫描题目二维码



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

一题一课

高考数学压轴题的分析与解

兰 琦 著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

一题一课. 高考数学压轴题的分析与解 / 兰琦著.
—杭州:浙江大学出版社,2016.3(2016.3重印)
ISBN 978-7-308-15653-0

I. ①一… II. ①兰… III. ①中学数学课—高中—题
解—升学参考资料 IV. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 046514 号

一题一课. 高考数学压轴题的分析与解

兰 琦 著

策 划 陈海权(电子信箱:chess332@163.com)
责任编辑 夏晓冬
责任校对 沈国明
封面设计 林智广告
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路148号 邮政编码310007)
(网址: <http://www.zjupress.com>)
排 版 杭州星云光电图文制作有限公司
印 刷 浙江省邮电印刷股份有限公司
开 本 889mm×1194mm 1/16
印 张 14.25
字 数 451千
版 印 次 2016年3月第1版 2016年3月第2次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-15653-0
定 价 29.8元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部联系方式:0571-88925591; <http://zjdxcb.tmall.com>

这是一本可以

无限扩展的书

扫一扫

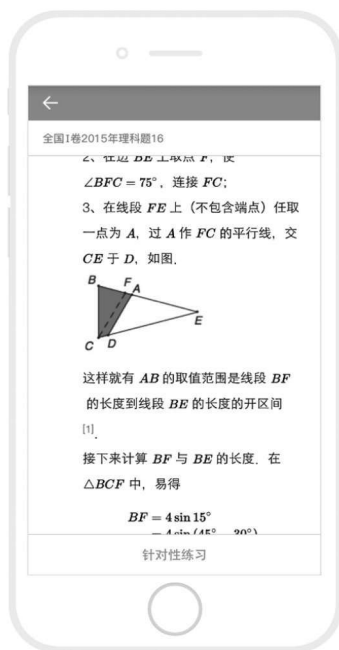
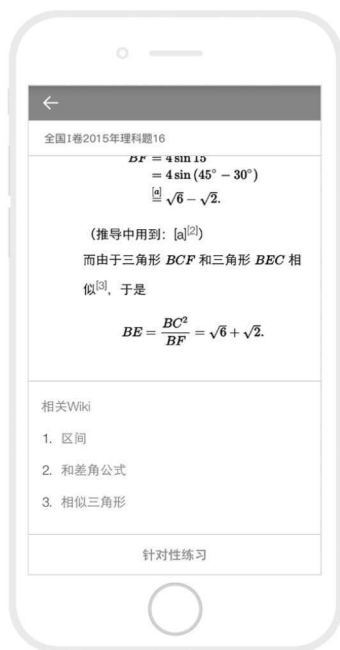
进入广阔的数学海洋



针对高考的 Wiki 帮你掌握解析背后的概念、结论、方法，让解题不再无从入手。

解析动态图，看一眼就会发现原来如此简单。

只看 不练 假把式，针对性练习帮你提高解题能力。



用“光子学习”APP 扫描题干旁二维码即可查看上述内容

免责声明：本书配套二维码扫描软件及延伸服务由北京光量子教育科技有限公司提供。学习中如遇到软件或二维码内容的相关问题，请致电010-82608975，或登录<https://guangzixuexi.com>了解相关资讯，二维码服务相关义务和责任由北京光量子教育科技有限公司承担。

刷百题不如解透一题(压轴题)

解题是学习数学的重要环节,同样也是考查数学学习阶段性成果的重要手段.而高考题,尤其是高考压轴题(选择、填空以及解答题的最后一题)就是非常好的例题与练习题.但是目前针对压轴题的内容大多是东拼西凑的“标准答案”,并没有实质性的见解,这无疑制约了同学们的进阶学习.另外,我的博客的很多读者希望能够将博客中的每日一题出版以方便阅读学习,为此我选定了压轴题方向进行整理.本书就是为基础良好的同学应对压轴题提供有效的范例,并给高中数学教师就高考压轴题的解法提供一些参考.

本书包含了全国各地最新高考数学压轴题的分析与解答(2016年相关内容将以电子版形式呈现),并对一些经典问题进行了适当的拓展.此外,在全书最后总结了“破解压轴题有效10招”,每招配备了一定数量的例题与习题以帮助读者更好地掌握这些招数.更重要的是,我和我的伙伴们还制作了可以大大扩展这本书的手机APP,这个手机APP可以让读者获取更多的内容——包括解题中用到的基础知识、动态问题的演示动画以及针对性练习——这些内容会使学习变得更加有效或是有趣.

本书的目的非常纯粹,就是找出各套高考卷中的压轴题,并且展示解决这些问题的尽量简洁优美的思路与方法.我们可以利用碎片化时间,每题单独形成一课学习,在每课学习中跟着一起解透这道题.我相信,只要您坚持学完这些题,可以达到我们最初做这件事的想法和目标:“每题10分钟,高考好成绩”.

和博客中的每日一题一样,我为每道题都精心挑选了一个我认为合适的小标题,让大家学习时感觉不至于压抑——希望您在阅读时能够产生与标题类似的感觉.由于我的水平有限,书中难免出现一些纰漏甚至是错误,请谅解.如果在阅读时发现了任何问题,可以直接向我反馈,我会尽快确认并修正.

我想特别感谢我的爱人欧阳岚,她在身体不适的情况下依然全力支持我的写作.在写作过程中,金叶梅老师提供了很多很棒的想法和建议,光量子公司的同事们对稿件进行了仔细的校对并完成了大部分的线上内容建设工作,谢谢!

最后,感谢您选择并购买了这本书.我忐忑不安地期望这本书对您所提供的知识超过它的售价,并且值得您花上一些时间仔细阅读.

兰琦(2004年高考数学满分,毕业于清华大学计算机系)

邮箱:chiccherry1@163.com

博客地址:<http://lanqi.org>



目 录

全国 I 卷	(1)	第 12 题 分离变量	(21)
第 1 题 独一无二	(1)	全国大纲卷	(23)
第 2 题 两次对称	(1)	第 1 题 两次对称	(23)
第 3 题 滑动的封口	(2)	第 2 题 双对称函数	(23)
第 4 题 隐藏的焦点	(2)	第 3 题 复合函数	(24)
第 5 题 极限引路	(3)	第 4 题 看圆的“张角”	(24)
第 6 题 向量与圆幂	(4)	第 5 题 抛物线遇上圆	(24)
第 7 题 藏形匿影	(5)	第 6 题 平铺直叙	(25)
第 8 题 移形换影	(6)	第 7 题 分离讨论和分离变量	(27)
第 9 题 三视图还原	(7)	安徽卷	(28)
第 10 题 分离变量	(7)	第 1 题 正弦值的估算	(28)
第 11 题 烈火出真金	(8)	第 2 题 望闻问切	(28)
第 12 题 隔空测物	(8)	第 3 题 唯一的实根	(29)
第 13 题 化椭为圆	(9)	第 4 题 从图中来,到图中去	(29)
第 14 题 点动成圆	(9)	第 5 题 双阶乘	(30)
第 15 题 天堑变通途	(10)	第 6 题 寻找垂直	(31)
第 16 题 寻找最小值	(11)	第 7 题 复合函数	(31)
全国 II 卷	(13)	第 8 题 二次分式函数	(32)
第 1 题 火眼金睛识原型	(13)	第 9 题 环环相扣	(33)
第 2 题 奇偶性来帮忙	(13)	第 10 题 随机组合	(33)
第 3 题 直截了当	(14)	第 11 题 “切过”	(34)
第 4 题 公切线	(14)	第 12 题 相似的抛物线	(35)
第 5 题 暗伏的菱形	(15)	第 13 题 归纳复归纳	(36)
第 6 题 值域的长度	(17)	第 14 题 度长絜大	(37)
第 7 题 分离变量	(18)	第 15 题 第一定义	(38)
第 8 题 看圆的“张角”	(19)	北京卷	(39)
第 9 题 追本溯源	(19)	第 1 题 燃油效率	(39)
第 10 题 半通径与焦点弦	(19)	第 2 题 累计里程	(39)
第 11 题 近似估计	(20)	第 3 题 含参分段函数	(40)



第4题	成绩排名	(40)
第5题	泰勒展开	(41)
第6题	唯一的零点	(42)
第7题	周期数列	(42)
第8题	定比点差	(43)
第9题	势均力敌	(44)
第10题	爆米花	(44)
第11题	以形驭数	(45)
第12题	爱日惜力	(45)
第13题	单刀直入	(46)
第14题	逐步调整	(47)
第15题	梅开三度	(48)
重庆卷		(50)
第1题	垂心与通径	(50)
第2题	规划区域	(50)
第3题	角平分线	(51)
第4题	两个负根	(51)
第5题	大棱锥与小棱锥	(52)
第6题	第一定义	(52)
第7题	重新估计	(54)
第8题	暗藏杀机	(55)
第9题	“何”不出图	(56)
第10题	恰到好处	(56)
第11题	如约而至	(56)
第12题	按部就班	(57)
第13题	故弄玄虚	(57)
第14题	漩涡风暴	(58)
福建卷		(60)
第1题	明察秋毫	(60)
第2题	充分? 必要?	(60)
第3题	奇偶校验	(61)
第4题	翻云覆雨	(61)
第5题	张角与圆内外	(62)
第6题	拨云见日	(62)
第7题	瓮中捉鳖	(63)
第8题	展开式记法	(65)
第9题	折线椭圆	(66)
第10题	真相只有一个	(66)
第11题	双曲线的等积性质	(67)
第12题	岿然不动	(68)
第13题	得寸进尺	(69)
广东卷		(70)
第1题	平起平坐	(70)
第2题	构造与计数	(70)
第3题	二项分布	(71)
第4题	等比数列	(71)
第5题	残缺的圆	(71)
第6题	阿贝尔求和	(72)
第7题	分段函数的零点	(73)
第8题	直击要害	(74)
第9题	共轭复数	(75)
第10题	数列的互补性	(75)
第11题	蒙日圆	(76)
第12题	过五关斩六将	(77)
第13题	查漏补缺	(78)
湖北卷		(80)
第1题	层峦叠嶂	(80)
第2题	斗转星移	(80)
第3题	阿波罗尼斯圆	(81)
第4题	最大值的最小值	(81)
第5题	椭圆规	(82)
第6题	扰乱视听	(83)
第7题	卡尔曼不等式	(84)
第8题	愚公移山,精卫填海	(85)
第9题	困盖与圆周率	(86)
第10题	均值函数	(86)
第11题	阿波罗尼斯圆	(87)
第12题	一而二,二而三	(87)



第 13 题 沙场秋点兵	(88)	第 2 题 分离变量	(117)
湖南卷	(90)	第 3 题 凡事预则立	(117)
第 1 题 分步加工	(90)	第 4 题 倒转乾坤	(118)
第 2 题 流星赶月	(91)	第 5 题 清君侧,靖国难	(121)
第 3 题 最近的距离	(92)	山东卷	(123)
第 4 题 隐藏的直角	(92)	第 1 题 函数的迭代	(123)
第 5 题 曲线的包络线	(94)	第 2 题 垂心与焦点	(124)
第 6 题 无独有偶	(96)	第 3 题 平移渐近线	(124)
第 7 题 斗转星移	(96)	第 4 题 椭圆变成圆	(125)
第 8 题 红叶一先	(97)	第 5 题 最小值的最大值	(126)
第 9 题 无巧不成书	(97)	第 6 题 分析端点	(127)
第 10 题 流连忘返	(98)	第 7 题 鱼龙混杂	(128)
第 11 题 太极生两仪	(99)	第 8 题 首尾相连	(128)
第 12 题 尽在掌握	(100)	第 9 题 “对称函数”	(129)
江苏卷	(102)	第 10 题 亦步亦趋	(129)
第 1 题 函数的叠加	(102)	第 11 题 分离变量	(130)
第 2 题 好多数量积	(102)	第 12 题 椭圆的“垂径定理”	(130)
第 3 题 反解不等式	(103)	第 13 题 抛物线的性质	(131)
第 4 题 论函数是怎样炼成的	(104)	第 14 题 一波三折	(133)
第 5 题 齐次变形	(105)	陕西卷	(134)
第 6 题 暗藏勾股	(105)	第 1 题 最佳拍档	(134)
第 7 题 一决高下	(106)	第 2 题 复数与概率	(134)
第 8 题 探索与发现	(107)	第 3 题 折戟沉沙	(135)
江西卷	(109)	第 4 题 恒等式的发现	(135)
第 1 题 台球桌上的几何	(109)	第 5 题 椭圆的中点弦	(136)
第 2 题 两兔傍地走	(110)	第 6 题 化齐次联立	(137)
第 3 题 借刀杀人	(110)	第 7 题 一分高下	(137)
第 4 题 狐假虎威	(111)	第 8 题 数列的界估计	(139)
第 5 题 第二定义	(111)	第 9 题 飞行轨迹	(140)
第 6 题 按部就班	(112)	第 10 题 过渡曲线	(140)
第 7 题 平分秋色	(113)	第 11 题 欧拉公式	(140)
第 8 题 八九不离十	(114)	第 12 题 狗尾续貂	(141)
辽宁卷	(116)	第 13 题 一箭双雕	(142)
第 1 题 值域长度	(116)	第 14 题 迭代函数	(143)

第 15 题	拨乱反正	(144)
上海卷		
第 1 题	身份识别	(146)
第 2 题	位差和	(146)
第 3 题	割线的极限	(147)
第 4 题	暗伏的正方形	(147)
第 5 题	配钥匙	(149)
第 6 题	相关数列	(150)
第 7 题	牵一发而动全身	(151)
第 8 题	一叶知秋	(151)
第 9 题	技压群雄	(152)
第 10 题	楚河汉界	(152)
第 11 题	画龙点睛	(153)
四川卷		
第 1 题	抛物线的点差法	(156)
第 2 题	全称与特称	(156)
第 3 题	二童一马	(157)
第 4 题	知其一,不知其二	(159)
第 5 题	以点代面	(161)
第 6 题	有界函数	(162)
第 7 题	椭圆的“垂径定理”	(162)
第 8 题	奇异的规划	(164)
天津卷		
第 1 题	对称性来帮忙	(166)
第 2 题	相关向量	(166)
第 3 题	遍地开花	(167)
第 4 题	以形驭数	(167)
第 5 题	腾挪忽灵	(169)
第 6 题	以直代曲	(170)
第 7 题	稳扎稳打	(171)
第 8 题	咫尺天涯	(171)
第 9 题	分离变量	(172)

第 10 题	坠入椭圆的圆	(173)
第 11 题	如来掌心	(173)
第 12 题	极值点偏移	(174)
第 13 题	三进制	(176)
浙江卷		
第 1 题	中线折叠	(177)
第 2 题	确凿无疑	(177)
第 3 题	向量的几何意义	(178)
第 4 题	无独有偶	(178)
第 5 题	椭圆与圆	(179)
第 6 题	夹缝中求面积	(180)
第 7 题	辅助数列	(181)
第 8 题	处理参数	(182)
第 9 题	函数的位移和	(183)
第 10 题	瞄准射击	(184)
第 11 题	举一反三	(185)
第 12 题	公切线段	(185)
第 13 题	函数的极差	(186)
第 14 题	运筹帷幄	(189)

2016 年全国各地高考数学压轴题的分析与解

		(190)
附录:破解压轴题有效 10 招		
第 1 招	分离变量法	(191)
第 2 招	向量的换底公式	(193)
第 3 招	三次函数的性质	(194)
第 4 招	迭代函数法	(200)
第 5 招	焦半径公式	(203)
第 6 招	抛物线的性质	(205)
第 7 招	有心二次曲线的“垂径定理”	(208)
第 8 招	仿射变换	(211)
第 9 招	定比点差法	(215)
第 10 招	圆锥曲线的切线方程	(218)

全国 I 卷

第 1 题 独一无二

(2015 年理科题 12) 设函数 $f(x) = e^x(2x-1) - ax + a$, 其中 $a < 1$, 若存在唯一的整数 x_0 , 使得 $f(x_0) < 0$, 则 a 的取值范围是()

- A. $[-\frac{3}{2e}, 1)$ B. $[-\frac{3}{2e}, \frac{3}{4})$ C. $[\frac{3}{2e}, \frac{3}{4})$ D. $[\frac{3}{2e}, 1)$

【分析】 考虑将含参不等式

$$e^x(2x-1) - ax + a < 0$$

分离^①为

$$e^x(2x-1) < a(x-1),$$

这样题意即曲线 $g(x) = e^x(2x-1)$ 在过定点 $(1, 0)$ 且斜率为 a 的直线 $y = a(x-1)$ 下方的部分在 x 轴上的投影只包含唯一整数.

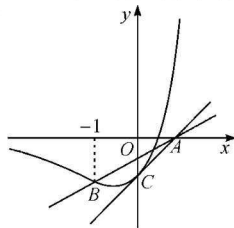
由于 $g(x)$ 的导函数为

$$g'(x) = e^x(2x+1),$$

于是 $g(x)$ 在 $x = -\frac{1}{2}$ 处取得极小值 $-\frac{2}{\sqrt{e}}$, 如图所示. 结合图象可知, 符合题意的唯一整数为 0.

设 $B(-1, g(-1)), C(0, g(0))$, 则 a 的取值范围为从直线 AB 的斜率到直线 AC 斜率的左闭右开区间, 即 $[\frac{3}{2e}, 1)$.

【解答】 D



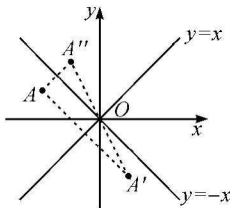
第 1 题图

第 2 题 两次对称

(2015 年文科题 12) 设函数 $y = f(x)$ 的图象与 $y = 2^{x+a}$ 的图象关于直线 $y = -x$ 对称, 且 $f(-2) + f(-4) = 1$, 则 a 等于()

- A. -1 B. 1 C. 2 D. 4

【分析】 一个点关于直线 $y = -x$ 的对称点可以看作是該点先关于直线 $y = x$ 对称, 再关于原点对称的结果, 如图所示.



第 2 题图



① 详见附录“第 1 招 分离变量法”.



于是函数 $y=f(x)$ 的解析式等价于

$$-x=2^{-y+a}, \text{ 即 } y=a-\log_2(-x).$$

根据题意, 有 $a-\log_2(-(-2))+a-\log_2(-(-4))=1$,

解得 $a=2$.

【解答】 C

第3题 滑动的封口

(2015 年理科题 16) 在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle A=\angle B=\angle C=75^\circ$, $BC=2$, 则 AB 的取值范围是_____.

【分析】 先设法作出符合题意的图形.

1. 作两底角为 75° , 且底边长为 2 的等腰 $\triangle EBC$;

2. 在边 BE 上取点 F , 使 $\angle BFC=75^\circ$, 连接 FC ;

3. 在线段 FE 上(不包含端点)任取一点为 A , 过 A 作 FC 的平行线, 交 CE 于 D , 如图所示.

这样就有 AB 的取值范围是线段 BF 的长度到线段 BE 的长度的开区间.

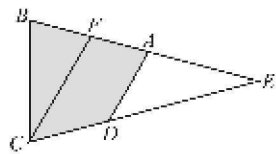
接下来计算 BF 与 BE 的长度. 在 $\triangle BCF$ 中, 易得

$$BF=4\sin 15^\circ=4\sin(45^\circ-30^\circ)=\sqrt{6}-\sqrt{2}.$$

而由于 $\triangle BCF$ 和 $\triangle BEC$ 相似, 于是

$$BE=\frac{BC^2}{BF}=\sqrt{6}+\sqrt{2}.$$

【解答】 $(\sqrt{6}-\sqrt{2}, \sqrt{6}+\sqrt{2})$



第3题图

第4题 隐藏的焦点

(2015 年文科题 16) 已知 F 是双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$ 的右焦点, P 是双曲线 C 的左支上一点, $A(0, 6\sqrt{6})$. 当 $\triangle APF$ 周长最小时, 该三角形的面积为_____.

【分析】 $\triangle APF$ 中 AF 的边长固定, 因此只需要考虑 $PA+PF$ 的最小值. 记 F' 为双曲线的左焦点, 注意到双曲线左支上的点 P 满足

$$PF-PF'=2a,$$

其中 a 为双曲线的实半轴长, 于是

$$PA+PF=PA+PF'+2a \geq AF'+2a,$$

因此, 当点 P 位于线段 AF' 与双曲线左支的交点位置时, $\triangle APF$ 的周长最小, 如图所示.

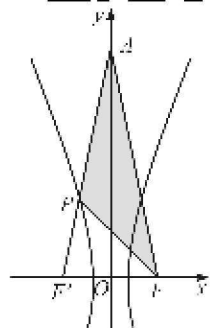
此时直线 AF' 的方程为

$$AF': y=2\sqrt{6}(x+3),$$

与双曲线方程联立解得 $x=-7$ (舍) 或 $x=-2$. 于是 P 点坐标为 $P(-2, 2\sqrt{6})$. 因此, 此时 $\triangle APF$ 的面积为

$$\frac{1}{2} \cdot FF' \cdot (y_A - y_P) = 12\sqrt{6}.$$

【解答】 $12\sqrt{6}$



第4题图



第 5 题 极限引路

(2015 年理科题 20) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C: y = \frac{x^2}{4}$ 与直线 $l: y = kx + a (a > 0)$ 交于 M, N 两点.

(1) 当 $k=0$ 时, 分别求 C 在点 M 和 N 处的切线方程;

(2) y 轴上是否存在点 P , 使得当 k 变动时, 总有 $\angle OPM = \angle OPN$? 说明理由.

【分析】 第(1)小题为常规问题, 难点在于第(2)小题. 反向思考问题. 若这样的定点 P 存在, 那么过点 P 作斜率互为相反数的两条直线, 分别与抛物线交于 A, B 与 C, D , 设 A, C 的纵坐标相同, B, D 的纵坐标相同, 那么直线 AD 与 BC 过定点 $(0, a)$. 此时取极限情形, 过点 P 引抛物线的两条切线, 那么对应的切点弦所在的直线^①与 y 轴的交点应为 $(0, a)$, 如图所示.



设点 P 的坐标为 $(0, t)$, 那么其对应的切点弦方程为

$$\frac{y+t}{2} = \frac{0 \cdot x}{4},$$

即 $y = -t$, 因此 $t = -a$. 接下来尝试证明即可.

【解答】 (1) 当 $k=0$ 时, 点 M, N 的横坐标为 $\pm 2\sqrt{a}$, 进一步可得所求的切线方程为

$$y = \pm \sqrt{a}x - a.$$

(2) 存在, 点 P 的坐标为 $(0, -a)$, 证明如下:

设 $M\left(x_1, \frac{x_1^2}{4}\right), N\left(x_2, \frac{x_2^2}{4}\right)$. 联立直线与抛物线方程有

$$x^2 - 4kx - 4a = 0,$$

于是

$$x_1 + x_2 = 4k, x_1 x_2 = -4a.$$

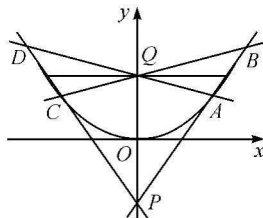
此时, 直线 PM 的斜率为

$$\frac{\frac{x_1^2}{4} - (-a)}{x_1 - 0} = \frac{x_1}{4} + \frac{a}{x_1}.$$

同理, 直线 PN 的斜率为 $\frac{x_2}{4} + \frac{a}{x_2}$, 这两条直线的斜率之和为

$$\frac{x_1 + x_2}{4} + \frac{a(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} = 0,$$

因此, 直线 PM 与直线 PN 关于 y 轴对称, 也就有 $\angle OPM = \angle OPN$, 且与 k 的取值无关.



第 5 题图

^① 详见附录“第 10 招 圆锥曲线的切线方程”.



第6题 向量与圆幂

(2015年文科题20) 已知过点 $A(0,1)$ 且斜率为 k 的直线 l 与圆 $C: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ 交于 M, N 两点.

(1) 求 k 的取值范围;

(2) 若 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 12$, 其中 O 为坐标原点, 求 $|MN|$.

【分析】 第(1)小题为常规的直线与圆的位置关系问题, 可以通过比较圆心到直线的距离与半径的大小关系加以解决. 第(2)小题中的向量均以 O 为起点, 应当转化起点①后再处理, 其中的关键在于如何有效地表达 A, M, N 三点共线, 因此选择 A 为起点, 利用圆幂定理即可解决.

【解答】 (1) 圆 C 的圆心 $C(2,3)$ 到直线 $l: y=kx+1$ 的距离为

$$\frac{|2k-2|}{\sqrt{1+k^2}} < 1,$$

解得

$$\frac{4-\sqrt{7}}{3} < k < \frac{4+\sqrt{7}}{3}.$$

(2) 根据题意,

$$(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AO}) \cdot (\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AO}) = 12,$$

即

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AO} \cdot (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AO} = 12.$$

由圆幂定理得

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = AC^2 - r^2 = 7,$$

其中 r 表示圆 C 的半径.

取弦 MN 的中点 P , 则

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AP},$$

于是可得

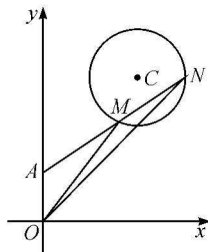
$$7 - \overrightarrow{AO} \cdot 2\overrightarrow{AP} + 1 = 12,$$

化简得

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AP} = -2,$$

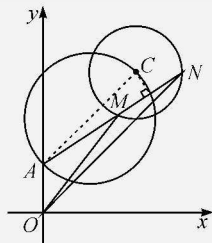
从而 $y_P = 3$.

因此, 易知 P 点即圆 C 的圆心, 进而 MN 为圆 C 的直径, 所求长度为 2.



第6题图

【拓展】 本题数据很特殊, 因此可以直接判断出 P 点的位置. 事实上, 弦 MN 的中点形成的轨迹是以线段 AC 为直径的圆在圆 C 内的部分, 如图所示. 因此, 如果 P 点的纵坐标经过计算后不是 3, 在上述的轨迹上找到纵坐标符合题意的位置即可.



第6题拓展图

① 详见附录“第2招 向量的换底公式”.



第 7 题 藏形匿影

(2015 年理科题 21) 已知函数 $f(x)=x^3+ax+\frac{1}{4}$, $g(x)=-\ln x$.

(1) 当 a 为何值时, x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线?

(2) 用 $\min\{m, n\}$ 表示 m, n 中的最小值, 设函数 $h(x)=\min\{f(x), g(x)\} (x>0)$, 讨论 $h(x)$ 零点的个数.

【分析】 第(1)小题是常规问题, 重点是第(2)小题.

注意到函数 $g(x)=-\ln x$ 在 $0<x<1$ 时函数值为正数, 在 $x=1$ 时函数值为零, 在 $x>1$ 时函数值为负数. 因此, 只需要分析函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上的零点个数, 以及在 $x=1$ 处的函数值正负即可. 也就是说, $g(x)$ 的唯一任务就是掩盖只需要研究含参三次函数 $f(x)$ 的形状的事实. 此题的难点在于解题者容易陷入对 $\min$ 函数的思维定式中, 盲目地比较 $f(x)$ 与 $g(x)$ 函数值的大小.

【解答】 (1) 根据已知, $f'(x)=3x^2+a$. 若 x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线, 设切点横坐标为 t , 则有

$$\begin{cases} f(t)=0, \\ f'(t)=0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} t^3+at+\frac{1}{4}=0, \\ 3t^2+a=0, \\ t=\frac{1}{2}, a=-\frac{3}{4}. \end{cases}$$

解得

所以, 当 $a=-\frac{3}{4}$ 时, x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线.

(2) 先分析 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上的零点个数. 这些零点均为函数 $h(x)$ 的零点.

由于方程 $x^3+ax+\frac{1}{4}=0$, 即

$$-a=x^2+\frac{1}{4x},$$

因此, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上的零点个数, 即直线 $y=-a$ 与函数 $\varphi(x)=x^2+\frac{1}{4x} (0<x<1)$ 图象的交点个数.

函数 $\varphi(x)$ 的导函数为

$$\varphi'(x)=\frac{8x^3-1}{4x^2},$$

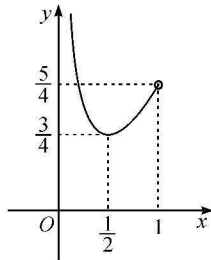
因此, $\varphi(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递减, 在 $x=\frac{1}{2}$ 处取得极小值 $\frac{3}{4}$, 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上单调递增,

如图所示.

因此, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上的零点个数是

$$\begin{cases} 0, -a < \frac{3}{4}, \\ 1, -a \geq \frac{5}{4} \text{ 或 } -a = \frac{3}{4}, \\ 2, \frac{3}{4} < -a < \frac{5}{4}, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 0, a > -\frac{3}{4}, \\ 1, a \leq -\frac{5}{4} \text{ 或 } a = -\frac{3}{4}, \\ 2, -\frac{5}{4} < a < -\frac{3}{4}. \end{cases}$$

接下来分析 $x=1$ 是否为函数 $h(x)$ 的零点.



第 7 题图



由于 $f(1) = a + \frac{5}{4}$, 于是, 当 $a \geq -\frac{5}{4}$ 时, $x=1$ 是函数 $h(x)$ 的零点; 当 $a < -\frac{5}{4}$ 时, $x=1$ 不是函数 $h(x)$ 的零点.

综上, 函数 $h(x)$ 的零点个数为

$$\begin{cases} 1, a < -\frac{5}{4} \text{ 或 } a > -\frac{3}{4}, \\ 2, a = -\frac{5}{4} \text{ 或 } a = -\frac{3}{4}, \\ 3, -\frac{5}{4} < a < -\frac{3}{4}. \end{cases}$$

第 8 题 移形换影

(2015 年文科题 21) 设函数 $f(x) = e^{2x} - a \ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的零点个数;

(2) 证明: 当 $a > 0$ 时, $f(x) \geq 2a + a \ln \frac{2}{a}$.

【分析】 第(1)小题是常规的通过分析单调性确定函数零点个数的问题. 第(2)小题是一个典型的极值点无法直接用参数表示, 因此需要转换消元策略的问题.

【解答】 (1) $f(x)$ 的导函数为

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot (2xe^{2x} - a), x > 0.$$

记函数 $g(x) = 2xe^{2x} - a$, 则 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 其值域为 $(-a, +\infty)$.

当 $a \leq 0$ 时, $g(x) > 0$, 因此, $f'(x)$ 的零点个数为 0;

当 $a > 0$ 时, $g(x)$ 的值域包含 0, 且 $g(x)$ 单调递增, 因此 $g(x)$ 有唯一零点, 进而 $f'(x)$ 的零点个数为 1.

(2) 利用(1)中得到的结论可得, $f(x)$ 有极小值点, 同时也是最小值点, 为方程

$$2xe^{2x} - a = 0$$

的实根, 记为 m . 该实根无法直接用 a 表示, 因此将 a 用 m 进行消元, 即

$$a = 2me^{2m}.$$

由于函数 $f(x)$ 的最小值为

$$f(m) = e^{2m} - a \ln m,$$

因此, 只需要证明

$$e^{2m} - a \ln m \geq 2a + a \ln \frac{2}{a},$$

即

$$e^{2m} - 2me^{2m} \cdot \ln m \geq 4me^{2m} + 2me^{2m} \cdot \ln \frac{2}{2me^{2m}},$$

也即

$$e^{2m} \cdot (2m - 1)^2 \geq 0,$$

这显然成立. 因此, 原不等式得证.

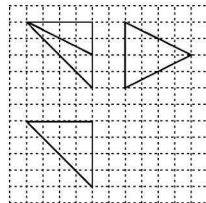




第 9 题 三视图还原

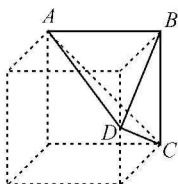
(2014 年理科题 12) 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 实线画出的是某多面体的三视图, 则该多面体的各条棱中, 最长的棱的长度为 ()

- A. $6\sqrt{2}$
B. $4\sqrt{2}$
C. 6
D. 4



第 9 题图(1)

【分析】 在正方体中还原直观图, 如图所示.



第 9 题图(2)

显然有 $AC > CD = BD > AB = BC$, 因此只需要比较 AC 与 AD 的大小. 事实上, $AC = 4\sqrt{2}$, 而 $AD = 6$, 因此最长的棱为 AD , 长度为 6.

【解答】 C



第 10 题 分离变量

(2014 年文科题 12) 已知函数 $f(x) = ax^3 - 3x^2 + 1$, 若 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0 , 且 $x_0 > 0$, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -2)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(2, +\infty)$ D. $(-\infty, -1)$

【分析】 函数 $f(x)$ 中的 a 与 x 很容易分离到等号两边, 可以考虑使用分离变量的方式处理零点问题. 显然 $x=0$ 不是函数 $f(x)$ 的零点, 因此以下讨论中默认 $x \neq 0$.

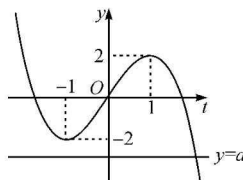
将方程 $ax^3 - 3x^2 + 1 = 0$ 变形为

$$a = -\frac{1}{x^3} + \frac{3}{x},$$

令 $t = \frac{1}{x}$, 则 $a = -t^3 + 3t$. 因此问题即函数 $g(t) = -t^3 + 3t$ 的图象与直线 $y = a$ 有且只有一个公共点, 且该公共点的横坐标大于 0.

如图, 作出函数 $g(t)$ 的图象, 可得 a 的取值范围是 $(-\infty, -2)$.

【解答】 A



第 10 题图





第 11 题 烈火出真金

(2014 年理科题 16) 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 的角 A, B, C 的对边, $a=2$, 且 $(2+b)(\sin A - \sin B) = (c-b)\sin C$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为_____.

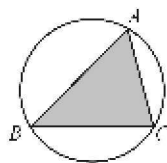
【分析】 由已知条件结合正弦定理可得

$$(a+b)(a-b) = (c-b)c,$$

整理得 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$, 从而由余弦定理可得 $A = \frac{\pi}{3}$.

由于 $\triangle ABC$ 的边 BC 所对的角 A 为定角 $\frac{\pi}{3}$, 因此 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径是定值. 作 $\triangle ABC$ 的外接圆, 固定点 B, C , 则点 A 在优弧 BC 上运动 (不包含端点), 以 BC 为底边考虑 $\triangle ABC$ 的面积, 当点 A 平分优弧 BC 时 BC 边上的高最大, 因此三角形面积取得最大值. 此时, 三角形为正三角形, 面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 = \sqrt{3}$.

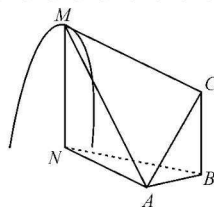
【解答】 $\sqrt{3}$



第 11 题图

第 12 题 隔空测物

(2014 年文科题 16) 如图, 为测量山高 MN , 选择 A 和另一座山的山顶 C 为测量观测点. 从 A 点测得 M 点的仰角 $\angle MAN = 60^\circ$, C 点的仰角 $\angle CAB = 45^\circ$ 以及 $\angle MAC = 75^\circ$; 从 C 点测得 $\angle MCA = 60^\circ$. 已知山高 $BC = 100\text{m}$, 则山高 $MN =$ _____ m.



第 12 题图

【分析】 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $BC=100$, $\angle CAB=45^\circ$, 可得 $AC=100\sqrt{2}$.

在 $\triangle MAC$ 中, $\angle MCA=60^\circ$, $\angle MAC=75^\circ$, $AC=100\sqrt{2}$. 应用正弦定理, 有

$$\frac{MA}{\sin \angle MCA} = \frac{AC}{\sin \angle AMC},$$

解得 $MA=100\sqrt{3}$.

在 $\text{Rt}\triangle MNA$ 中, $MA=100\sqrt{3}$, $\angle MAN=60^\circ$, 可以解得

$$MN = \frac{\sqrt{3}}{2} MA = 150.$$

所以, 山高 MN 为 150m .

【解答】 150

