高等职业教育基础课程系列教材
GAODENG ZHIYE JIAOYU JICHU KECHENG XILIE JIAOCAI

高等数学

GAODENG SHUXUE

主　编 ○ 尹志平
主　审 ○ 徐福成

西南交通大学出版社

高 等 数 学

主　编　尹志平
主　审　徐福成

西南交通大学出版社
· 成　都 ·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学／尹志平主编. —成都：西南交通大学出版社，2018.9
ISBN 978-7-5643-6411-3

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①尹… Ⅲ. ①高等数学－高等职业教育－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 207326 号

高等数学

主编 尹志平

责任编辑 张宝华
封面设计 何东琳设计工作室

印张：16.25 字数：403千
成品尺寸：185 mm × 260 mm
版次：2018年9月第1版
印次：2018年9月第1次
印刷：成都蓉军广告印务有限责任公司
书号：ISBN 978-7-5643-6411-3

出版发行：西南交通大学出版社
网址：http://www.xnjdcbs.com
地址：四川省成都市二环路北一段111号
西南交通大学创新大厦21楼
邮政编码：610031
发行部电话：028-87600564 028-87600533
定价：39.00元

课件咨询电话：028-87600533
图书如有印装质量问题 本社负责退换

前　言

高等数学是工程类职业院校学生必须学习的课程之一. 高等数学主要培养学生的逻辑思维能力及分析问题解决问题的能力，同时也是学习其他专业课程的基础. 为适应高等职业教育教学改革的需要，全面贯彻“以服务为宗旨，以就业为导向”的办学方针，我们依据教育部制定的高职高专教育高等数学课程教学的基本要求，结合我院专业课的需要及教学实践经验编写了本教材.

本教材内容涵盖了我院各专业课程所需要的高等数学知识，其最大特点是综合考虑了高职院校学生的数学基础和学习能力，增加了“课堂练习”这一环节，它能有效帮助学生即时掌握所学内容及知识点.

本教材由尹志平担任主编，徐福成担任主审，第 1 章函数、极限与连续由周雯编写，第 2 章导数与微分和第 3 章导数的应用由龙微编写，第 4 章不定积分由徐福成编写，第 5 章定积分由冯耀川编写，第 6 章常微分方程和第 7 章第 4、5、6 节空间解析几何部分由尹志平编写，第 7 章第 1、2、3 节向量代数部分由高洁编写，附录 2 超级计算器应用指南由刘世金编写. 本书在编写过程中得到了学院各级领导和各系部专业课老师的大力支持，在此一并表示感谢!

由于编者水平有限，编写时间仓促，书中难免存在一些不足之处，敬请广大读者批评指正.

编　者

2018 年 4 月

目 录

第 1 章

函数、极限与连续

高等数学研究的对象是变量. 函数是描述变量之间依赖关系的，是数学中重要的概念. 极限方法是研究变量的一种基本方法，是学习微积分的基础，高等数学中的许多概念、性质和法则都是通过极限方法来建立的.

本章首先复习函数的相关知识，然后讨论函数的极限和连续.

1.1 函数

1.1.1 函数的概念

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型.

定义 1 设 D 是一个实数集，如果对属于 D 内的每一个 x 按照某个对应法则 f，都有唯一确定的 y 值与它对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y = f(x), x \in D,$$

其中，x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 称为这个函数的定义域；当 x 取遍 D 中的一切实数时，它对应的 y 值组成的集合 M 称为函数的值域.

函数 $y = f(x)$ 在点 $x_0(x_0 \in D)$ 处的函数值记为 $f(x_0), f(x)\big|_{x=x_0}$ 或 $y\big|_{x=x_0}$.

例 1 已知函数 $f(x) = 3x^2 - 4$，求 $f(1), f(x+1), f\left(\dfrac{1}{x}\right), \dfrac{1}{f(x^2)}$.

解 $f(1) = 3\times 1^2 - 4 = -1$；

$f(x+1) = 3(x+1)^2 - 4 = 3x^2 + 6x - 1$；

$f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 3\times\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 - 4 = \dfrac{3}{x^2} - 4$；

$\dfrac{1}{f(x^2)} = \dfrac{1}{3(x^2)^2 - 4} = \dfrac{1}{3x^4 - 4}$.

由函数的定义可知，当函数的定义域和对应关系确定以后，这个函数也就随之确定. 因此，我们常把函数的定义域和对应关系称为构成函数的两个要素. 当两个函数的定义域和对应关系都相同时，才称这两个函数相同.

例 2 判断下列每组中的两个函数是否是相同函数.

（1）$y = x$ 与 $y = (\sqrt{x})^2$；　　（2）$y = x$ 与 $y = \sqrt[3]{x^3}$；

（3）$y = |x|$ 与 $s = \sqrt{t^2}$.

解 （1）由于 $y = x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，而 $y = (\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $[0, +\infty)$，两者的定义域不同，所以这两个函数不相同.

（2）函数 $y = x$ 与 $y = \sqrt[3]{x^3}$ 的定义域均为 $(-\infty, +\infty)$，且有相同的对应关系，所以它们是相同的函数.

（3）函数 $y = |x|$ 与 $s = \sqrt{t^2}$ 的定义域均为 $(-\infty, +\infty)$，且有相同的对应关系，尽管这两个函数的自变量、因变量所用的字母不同，但它们表示同一个函数.

课堂练习 1

1. 设函数 $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$，求：（1）$f\left(\dfrac{3}{2}\right)$；（2）$f(-0.3)$；（3）$f(2a)$.

2. 判断下列各对函数是否相同，并说明理由：

（1）$f(x)=\dfrac{x}{x}$ 与 $g(x)=1$；　　（2）$f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(x)=(\sqrt{x})^2$；

（3）$f(x)=1$ 与 $f(t)=\sin^2 t+\cos^2 t$.

1.1.2　函数定义域的确定

函数的定义域是确定函数的要素之一，所以，只有在定义域内研究函数才有意义.

在实际问题中，要根据所研究问题的实际意义确定函数的定义域. 例如，在正方形的周长 y 与边长 x 之间的函数关系 $y=4x$ 中，因为正方形的边长为正数，所以函数 $y=4x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$；对于用解析式表示的函数，如果不考虑函数的实际意义，则函数的定义域就是使这个式子有意义的自变量的值的集合.

例 3　求下列函数的定义域，并用区间表示出来：

（1）$y=3x+4$；　　（2）$y=\dfrac{1}{3x+2}$；　　（3）$y=\sqrt{2x-3}$；

（4）$y=\dfrac{\sqrt{4-x}}{x-3}$；　　（5）$f(x)=\dfrac{1}{\ln(2x-1)}$；　　（6）$f(x)=\sqrt{x^2-4}-\arcsin(5-2x)$.

解　（1）对于函数 $y=3x+4$，自变量 x 取任何实数都有意义，所以该函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

（2）对于函数 $y=\dfrac{1}{3x+2}$，由于分式的分母不能为零，所以 $3x+2\neq 0$，即 $x\neq -\dfrac{2}{3}$，因此该函数的定义域为 $\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right)\cup\left(-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.

（3）对于函数 $y=\sqrt{2x-3}$，由于负数不能开偶次方根，所以 $2x-3\geqslant 0$，即 $x\geqslant\dfrac{3}{2}$，因此该函数的定义域为 $\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$.

（4）对于函数 $y=\dfrac{\sqrt{4-x}}{x-3}$，只有当 $4-x\geqslant 0$ 且 $x-3\neq 0$ 时才有意义，由于不等式组 $\begin{cases}4-x\geqslant 0\\ x-3\neq 0\end{cases}$ 的解集为 $\{x\,|\,x\leqslant 4\text{且}x\neq 3\}$，所以该函数的定义域为 $(-\infty,3)\cup(3,4]$.

（5）对于函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(2x-1)}$，由 $\begin{cases}2x-1>0\\ \ln(2x-1)\neq 0\end{cases}$ 得：$\begin{cases}x>\dfrac{1}{2}\\ x\neq 1\end{cases}$，所以该函数的定义域为 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$.

（6）对于函数 $f(x)=\sqrt{x^2-4}-\arcsin(5-2x)$，由 $\begin{cases}x^2-4\geqslant 0\\ -1\leqslant 5-2x\leqslant 1\end{cases}$ 得：$2\leqslant x\leqslant 3$，所以该函

数的定义域为[2, 3].

课堂练习 2

求下列函数的定义域，并用区间表示出来：

（1）$y=\sqrt{1-2x}$；　　（2）$y=\dfrac{\sqrt{x}}{5x-3}$；

（3）$y=\dfrac{1}{\ln(3-2x)}$；　　（4）$y=\sqrt{4-x^2}+\arccos(3-2x)$.

1.1.3 函数的表示法

表示函数的方法一般有三种：公式法、表格法、图示法. 本书所讨论的函数主要用公式法来表示. 用数学表达式表示函数关系的方法称为公式法（或解析法）.

例如，函数 $y=\sqrt{2x-3}$ 与 $y=\dfrac{1}{3x+2}$ 都是用公式法表示的.

某些函数由于自变量的取值范围不同，对应法则也不同，因此，需要用不同的解析式来表示，这样的函数称为分段函数. 分段函数的定义域是各分段定义区间的并集. 例如，分段函数 $y=\begin{cases}4-x, x\geqslant 0\\ x, \quad x<0\end{cases}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

例 4　确定函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\in[0,2)\\ -x+4, & x\in[2,4)\\ x-4, & x\in[4,6]\end{cases}$ 的定义域，并求 $f(1)$，$f(2)$，$f(5)$ 的值.

解　分段函数的定义域是各分段定义区间的并集，所以该函数的定义域为

$$D=[0,2)\cup[2,4)\cup[4,6]=[0,6].$$

求分段函数的函数值时，先要确定自变量所属的区间，再由对应的解析式求函数值.

因为 $1\in[0,2)$，所以 $f(1)=x|_{x=1}=1$；

因为 $2\in[2,4)$，所以 $f(2)=(-x+4)|_{x=2}=2$；

因为 $5\in[4,6]$，所以 $f(5)=(x-4)|_{x=5}=1$.

课堂练习 3

1. 确定函数 $f(x)=\begin{cases}2x-2, x\in(-3,2]\\ 3x-4, x\in(2,5]\\ 4-x, \quad x\in(5,+\infty)\end{cases}$ 的定义域，并求 $f(-0.6)$，$f(2)$，$f(2.5)$，$f(6)$的值.

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 1\\ 2x-1, & x<1\end{cases}$，求 $f(2)$，$f(1)$，$f(-1)$，$f(a)$，$f(a-2)$的值.

1.1.4　函数的特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$，如果存在正数 M，使得对于任意的 $x \in I$，都有 $|f(x)| \leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界. 如果这样的正数 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 I 上无界.

例 5　判断下列函数是否有界，并说明理由.

（1）$y = \cos x, x \in (-\infty, +\infty)$；　（2）$f(x) = \dfrac{1}{x}$，$x \in (1,3)$；　（3）$y = \dfrac{1}{x}$，$x \in (0,2)$.

解　（1）当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时，$|\cos x| \leqslant 1$，所以函数 $y = \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

（2）当 $x \in (1,3)$ 时，$\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{x} < 1$，即 $\left|\dfrac{1}{x}\right| < 1$，所以 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $(1,3)$ 内有界.

（3）当 $x \in (0,2)$，且 x 无限地趋近于 0 时，函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 的值无限地增大，即不存在确定的正数 M 使 $\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant M$ 成立，所以 $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0,2)$ 内是无界的.

课堂练习 4

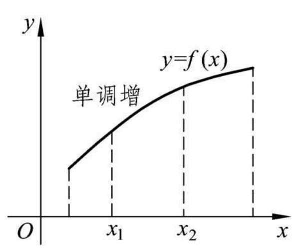
判断下列函数是否有界，并说明理由.

（1）$y = \sin 2x$；　（2）$y = \ln x$；

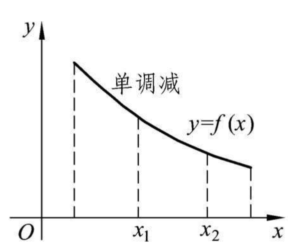
（3）$y = 2^x$，$x \in (2,3)$；　（4）$y = \dfrac{1}{2x-1}$，$x \in (0,2)$.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$，对于区间 I 上的任意两点 x_1, x_2，如果当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的；如果当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的，如图 1.1-1 所示.



（a）单调增



（b）单调减

图 1.1-1　函数的单调性

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数，I 称为单调区间.

例 6　证明函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是单调增加的.

证明　对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$，如果 $x_1 < x_2$，则 $x_1 - x_2 < 0,\ x_1 + x_2 > 0$，那么

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)<0,$$

即

$$f(x_1)<f(x_2).$$

所以函数 $f(x)=x^2$ 在区间$(0,+\infty)$上是单调增加的.

课堂练习 5

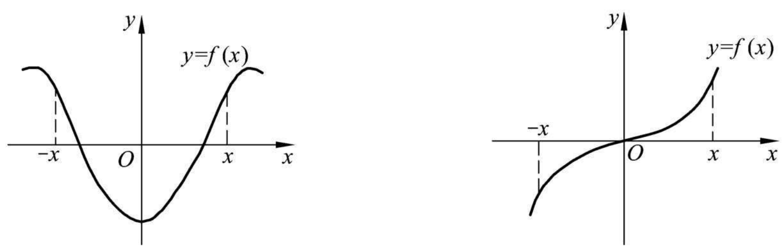
1. 证明函数 $f(x)=x^2$ 在区间$(-\infty,0)$上是单调减少的.
2. 证明函数 $f(x)=2x-1$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上是单调增加的.

3. 函数的奇偶性

设函数$f(x)$的定义域 D 关于坐标原点对称，如果对于任意的 $x\in D$，总有 $f(-x)=f(x)$成立，则称$f(x)$为偶函数；如果对于任意的 $x\in D$，总有 $f(-x)=-f(x)$成立，则称$f(x)$为奇函数.

既不是奇函数又不是偶函数的函数称为非奇非偶函数. 如函数 $f(x)=x^2-x$ 就是非奇非偶函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称；奇函数的图像关于原点对称. 如图 1.1-2 所示.



（a）偶函数的图像　（b）奇函数的图像

图 1.1-2　函数的奇偶性

例 7　证明：

（1）$f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是偶函数；

（2）$f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是奇函数.

证明　（1）对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，

$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x),$$

所以 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是偶函数.

（2）对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，

$$f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x),$$

所以 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是奇函数.

课堂练习 6

1. 证明函数 $f(x)=3x^2+2$ 在区间（$-\infty,+\infty$）上是偶函数.
2. 证明函数 $f(x)=2x^3-3x$ 在区间（$-3,3$）上是奇函数.
3. 判断下列各函数是奇函数、偶函数，还是非奇非偶函数，并说明理由.

（1）$f(x)=\sqrt[3]{x^4}$；　　（2）$f(x)=\sin 2x-3x$；
（3）$f(x)=3$；　　（4）$f(x)=2\sqrt{x}$.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$的定义域为 D，如果存在一个正数 T，使得对于任意的 $x\in D$ 有 $x\pm T\in D$，且 $f(x\pm T)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$为周期函数，T 称为 $f(x)$的周期.

讨论周期函数时，通常所说的周期是指最小正周期. 例如，$y=\sin x$ 是周期函数，周期 $T=2\pi$.

一般地，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 和 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的周期为 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$； $y=A\tan(\omega x+\varphi)$ 和 $y=A\cot(\omega x+\varphi)$ 的周期为 $T=\dfrac{\pi}{|\omega|}$. 例如，$y=2\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$的周期为 $T=\dfrac{2\pi}{3}$，$y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$的周期为 $T=\pi$， $y=4\tan\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$的周期为 $T=2\pi$.

课堂练习 7

1. 指出下列函数的周期.

（1）$y=\cos x$；　　（2）$y=\tan 3x$；
（3）$y=\cot 2x$；　　（4）$i=30\sin\left(20\pi t+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

2. 试说明 $f(x)=2x$ 不是周期函数.

1.1.5　反函数

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，值域为 M，如果对于集合 M 中的每一个 y 值，都可由关系式 $y=f(x)$确定唯一的 x 值与之对应，从而得到一个定义在集合 M 上的新函数，这个新函数叫作 $y=f(x)$的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$. 反函数的定义域为 M，值域为 D. 对反函数 $x=f^{-1}(y)$来说，原来的函数 $y=f(x)$称为直接函数.

习惯上，函数的自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，所以通常把 $x=f^{-1}(y),y\in M$ 改写成 $y=f^{-1}(x),x\in M$. 显然，反函数的定义域就是直接函数的值域，反函数的值域就是直接函数的定义域.

函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称. 如图 1.1-3 所示.

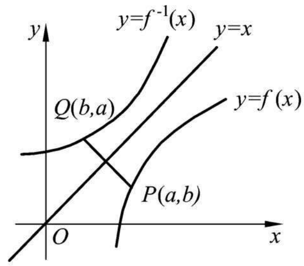


图 1.1-3　反函数的图像

由反函数的定义可得求反函数的步骤：

（1）从 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$；

（2）交换字母 x 与 y 的位置，并注意反函数的定义域为直接函数的值域.

例 8　求下列函数的反函数.

（1） $y=2x+3, x\in(-\infty,+\infty)$；　　（2） $y=2\mathrm{e}^{x}-1, x\in(-\infty,+\infty)$.

解　（1）先从 $y=2x+3$ 解出 x，得 $x=\dfrac{1}{2}(y-3)$. 再交换 x 与 y 的位置，则所求的反函数为 $y=\dfrac{1}{2}(x-3), x\in(-\infty,+\infty)$.

（2）从 $y=2\mathrm{e}^{x}-1$ 解出 x，得 $x=\ln\dfrac{y+1}{2}$. 再交换 x 与 y 的位置，则所求的反函数为 $y=\ln\dfrac{x+1}{2}, x\in(-1,+\infty)$.

课堂练习 8

求下列函数的反函数及反函数的定义域，并在同一坐标系中画出直接函数和它的反函数的图像.

（1） $y=3x+2, x\in(-\infty,+\infty)$；　　（2） $y=3x+2,\ x\in[2,5]$；

（3） $y=\ln(x+1), x\in(-1,+\infty)$；　　（4） $y=\dfrac{2}{x+1}$.

1.1.6　复合函数

如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $u=\varphi(x)$ 的值域或其部分包含在函数 $y=f(u)$的定义域中，显然 y 也是 x 的函数，此函数称为由 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 x 是自变量，u 是中间变量.

例如，$y=\mathrm{e}^{u}, u=2x^{2}$，则 $y=\mathrm{e}^{2x^{2}}$ 是由 $y=\mathrm{e}^{u}$ 与 $u=2x^{2}$ 复合而成的复合函数；而 $y=\ln u$ 与 $u=-x^{2}$ 不能构成一个复合函数，因为 $u=-x^{2}$ 的值域 $(-\infty,0]$，没有包含在函数 $y=\ln u$ 的定义域 $(0,+\infty)$ 中.

课堂练习 9

1. 将下列函数组成复合函数.

（1）$y=u^2, u=\cos x$；　　（2）$y=2^u, u=3x^2+2$.

2. 指出下列函数是怎样复合而成的.

（1）$y=\sqrt{3x^2-2x}$；　　（2）$y=\sin^3(2x^2-4)$.

1.1.7　初等函数

1. 基本初等函数

常数函数：$y=C$.

幂函数：$y=x^\alpha$ (α 为常数).

指数函数：$y=a^x$ ($a>0$，$a\neq1$，a 为常数).

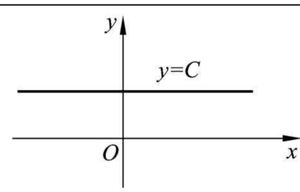
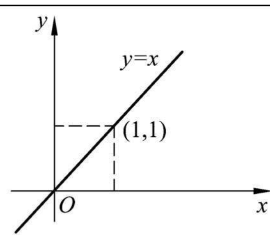
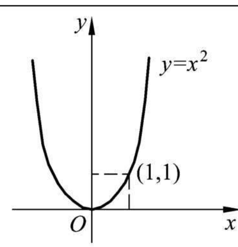
对数函数：$y=\log_a x$ ($a>0$，$a\neq1$，a 为常数).

三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$.

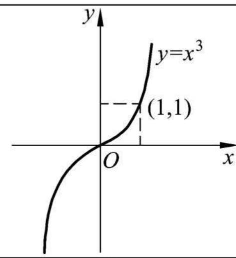
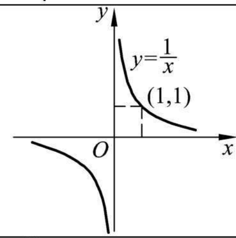
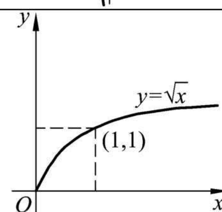
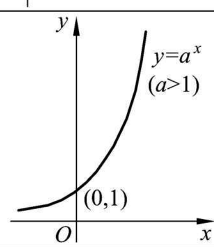
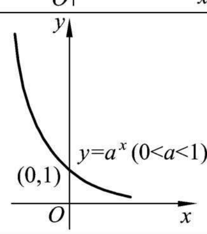
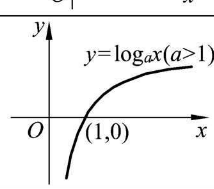
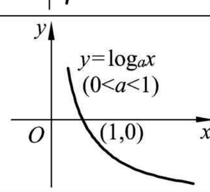
反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\text{arccot}\,x$.

这六种函数统称为基本初等函数，表 1.1 列出了基本初等函数的定义域、值域、图像和特性.

表 1.1

类别	函数	定义域与值域	图像	特性
常数函数	$y=C$	$x\in(-\infty,+\infty)$，$y=C$		有界函数；偶函数；周期函数
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数；单调增函数
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in[0,+\infty)$		偶函数；在 $(-\infty,0]$ 内单调减，在 $[0,+\infty)$ 内单调增

续表

类别	函数	定义域与值域	图像	特性
幂函数	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$， $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数； 单调增函数
	$y=\dfrac{1}{x}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$， $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数； 单调减函数
	$y=\sqrt{x}$	$x\in[0,+\infty)$， $y\in[0,+\infty)$		单调增函数
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$， $y\in(0,+\infty)$		过点$(0,1)$， 单调增函数
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$， $y\in(0,+\infty)$		过点$(0,1)$， 单调减函数
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$， $y\in(-\infty,+\infty)$		过点$(1,0)$， 单调增函数
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$， $y\in(-\infty,+\infty)$		过点$(1,0)$， 单调减函数