物理学

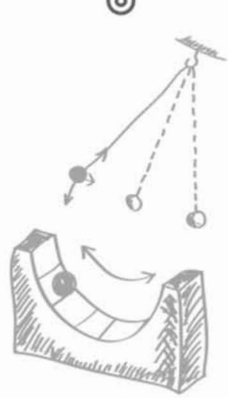
WULIXUE

牟兰娟　李正华／主编

电子科技大学出版社

物理学

WULIXUE



牟兰娟 李正华/主编

电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

物理学 / 牟兰娟，李正华主编．—成都：电子科技大学出版社，2016.8
ISBN 978-7-5647-2696-6

Ⅰ．①物… Ⅱ．①牟… ②李… Ⅲ．①物理学－高等学校－教材 Ⅳ．① O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 175813 号

物 理 学

牟兰娟 李正华 **主编**

出　　版：电子科技大学出版社（成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦 邮编：610051）
策划编辑：罗　雅
责任编辑：罗　雅
主　　页：www.uestcp.con.cn
电子邮箱：uestcp@uestcp.com.cn
发　　行：新华书店经销
印　　刷：四川永先数码印刷有限公司
成品尺寸：185mm×260mm　　印张 14.25　　字数 353 千字
版　　次：2016 年 8 月第 1 版
印　　次：2016 年 8 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5647-2696-6
定　　价：46.00 元

前　言

物理学是研究物质基本结构、相互作用和物质最基本最普遍运动形式及其相互转化规律的学科。它的基本理论渗透到自然科学的各个领域，应用于生产技术的许多部门，是自然科学和工程技术的基础。

全书以物理学的基本概念、定律和方法为核心，在保证物理学知识体系完整的同时，重点突出基础理论，重视物理理论在生产技术中应用知识的介绍，重视以物理学的思想和方法来分析问题、解决问题等综合能力的培养和训练。注重培养学生的综合能力、创新意识和基本技能。力求做到内容新颖、结构合理、概念清楚、实用性强、通俗易懂、前后相关课程有较好的衔接。

如何帮助学生高效率地学好物理是物理教学的核心问题。多年的教学经验告诉我们，提高教学质量必须针对具体的学生调整教学内容和授课方式，配备与授课内容密切相关的教材。所以，虽然优秀的大学物理教材已经汗牛充栋，我们还是组织授课教师定期编写新教材，这不仅因为物理学仍在发展，教学方法不断创新，我们还期望通过编写教材，促进教师加深对教学内容的理解，同时增进对学生的了解。

本书可作为高职高专类工科学生基础物理教育的教材使用，也可作高等师范院校、教育学院、高等师范专科学校教师和学生的参考用书。

由于时间和水平有限，有不妥之处，敬请同行和读者批评、指正。

最后，对本书在编写和出版过程中给予支持和帮助的同志表示衷心的感谢！

编　者

2016年6月

目　　录

第1章　质点运动学

1.1　质点运动的描述

1.1.1　参考系

自然界中所有的物体都在不停地运动，绝对静止不动的物体是没有的。在观察一个物体的位置及位置的变化时，总要选取其他物体作为标准，选取的标准物不同，对物体运动情况的描述也就不同，这就是运动描述的相对性。

为描述物体的运动而选的标准物称为参考系。不同的参考系，对同一物体运动情况的描述是不同的。因此，在讲述物体的运动情况时，必须指明是对什么参考系而言的。参考系的选择是任意的。在讨论地面上物体的运动时，通常选地球作为参考系。

1.1.2　质点

物体都有大小和形状，运动方式又都各不相同。例如，太阳系中，行星除绕自身的轴线自转外，还绕太阳公转；从枪口射出的子弹，它在空中向前飞行的同时，还绕自身的轴转动；有些双原子分子，除了分子的平动、转动外，分子内各个原子还在振动。这些事实都说明，物体的运动情况是十分复杂的。物体的大小、形状、质量也都是千差万别的。

如果我们研究某一物体的运动，可以忽略其大小和形状，或者可以只考虑其平动，那么，我们就可把物体当作是一个有一定质量的点，这样的点通常称为质点。

质点是经过科学抽象而形成的物理模型。把物体当作质点是有条件的、相对的，而不是无条件的、绝对的，因而，对具体情况要做具体分析。例如，研究地球绕太阳公转时，由于地球至太阳的平均距离约为地球半径的 10^4 倍，故地球上各点相对于太阳的运动可以看作是相同的，所以在研究地球公转时，可以把地球当作质点。但是，在研究地球上物体的运动情况时，就不能再把地球当作质点处理了。

应当指出，把物体视为质点这种抽象的研究方法，在实践上和理论上都有重要意义。当我们所研究的运动物体不能视为质点时，可把整个物体看成是由许多质点组成的，弄清这些质点的运动，可以弄清楚整个物体的运动。所以，研究质点的运动是研究物体运动的基础。

1.2 运动的描述

1.2.1 位置矢量

如图 1－1 所示，质点的位置可用直角坐标的三个分量 (x,y,z) 来确定，也可以用不依赖具体坐标系的矢量来表示，即由坐标原点 O 向 P 点作有向线段$\overrightarrow{OP}$，并记作 $\vec{r}$，$\vec{r}$ 就是定量刻画质点所在空间位置的位置矢量（Position vector），简称位矢。参考本书附录 A，请读者验证，位置矢量满足线性代数定义的矢量性质。

位矢 $\vec{r}$ 与它在坐标轴上的分量（x，y，z）是一一对应的，分量又称投影量。如公式（1－1）所示，以 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ 是分别表示 z,y,z 轴方向上的单位矢量，则

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{1-1}$$

矢量 $\vec{r}$ 的大小与分量的关系为

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1-2}$$

由位矢与各坐标轴 x,y,z 的夹角 α、β、γ，可以完全确定位矢的方向。位矢的三个分量与它的方向余弦的关系是

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \quad \cos\beta = \frac{y}{r} \quad \cos\gamma = \frac{z}{r} \tag{1-3}$$

一般来讲，位置矢量或者它的直角坐标分量（x,y,z）都是时间 t 的函数，即

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t) \tag{1-4}$$

或者

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \tag{1-5}$$

式（1－4）和式（1－5）都称为质点的运动方程，前者是运动方程的标量形式，后者为矢量形式。显然，质点运动方程的标量形式和矢量形式等效描述质点的位置随时间改变的过程和具体方式。

质点在空间连续经过的各点连成的曲线称为质点运动的轨迹，表示质点运动轨迹的方程称为轨迹方程。运动轨迹不涉及时间，如果消除方程（1－4）中的时间参数 t，就得到质点的轨迹方程，即

$$f(x,y,z) = 0 \tag{1-6}$$

例如，在太阳参考系中，地球的运动轨迹是一个椭圆。读者可以尝试以太阳为坐标原点建立直角坐标系，写出地球运动的轨迹方程。

1.2.2 位移

在一段时间内质点位矢的增量（我们规定增量是末量减去初量）称为它在该段时间内的位移（displacement）。两个矢量加减运算的结果仍然是一个矢量，所以位移也常常称为位移矢量。如图 1－1 所示，在某时刻 t，质点位于 A 点，其位矢为产。在 $t+\Delta t$ 时刻，质

点移动到了 B 点，其位矢记为 $\vec{r}_B$，则质点在 Δt 时间内的位移为

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \tag{1-7}$$

Δr 是由 A 点指向 B 点的矢量。在直角坐标系中

$$\Delta\vec{r} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k} \tag{1-8}$$

其中，各分量的增量分别为

$$\Delta x = x_B - x_A \quad \Delta y = y_B - y_A \quad \Delta z = z_B - z_A \tag{1-9}$$

图 1－1 中矢量商的长度表示位移的大小

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

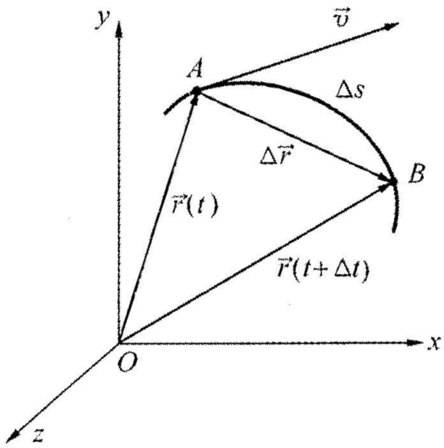


图 1－1　位移与速度

1.2.3　速率和速度

在日常生活中，人们习惯用“速度”（velocity）的大小来描述物体运动的快慢，但这并不是物理学中严格定义的速度矢量，而是速率（speed）。质点运动经历的路程 Δs 与所用的时间 Δt 的比值就是它在该时段内的平均速率，即 $\bar{v}$

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1-10}$$

平均速率还不足以描述质点每时每刻运动的快慢。我们可以按照微积分的思想，考虑 Δt 趋于零时 $\bar{v}$ 的极限情况。显然，无限短时间段的初始时刻 t 和末了时刻 $t+\Delta t$ 两者合而为一，无限短时间段中的平均速率可以定义为质点在该时刻 t 的瞬时速率（简称速率），即

$$v(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1-11}$$

质点运动的路程 Δs 和它的速率都不涉及质点运动的方向。质点位移 $\Delta\vec{r}$ 才是物理学中所需要的力学量，它能够更完整地描述质点的运动状态。类似地，质点位移 $\Delta\vec{r}$ 产与时间间隔 Δt 的比值称为质点在这段时间内的平均速度，以 $\bar{v}$ 表示，即

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \tag{1-12}$$

显然，平均速度 $\bar{\vec{v}}$ 也是矢量，它的方向就是位移的方向。

在质点运动快慢和方向不断改变的情况下，平均速度还不能描述质点运动的细致特征。为此我们需要考虑时间间隔 $\Delta t \to 0$ 时平均速度的极限值，它将准确地描述 t 时刻质点的瞬时速度

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{1-13}$$

即速度是位矢对时间的一阶导数。速度是矢量，其方向就是 Δt 趋近于零时 $\overrightarrow{\Delta r}$ 的方向。如图 1－1 所示，通过 A 点时速度的方向就是质点运动轨迹在该点的切线方向。

将式（1－1）代入式（1－13），由于 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ 为常矢量，可得

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \tag{1-14}$$

质点的瞬时速度沿 x, y, z 坐标轴的三个分量都是代数量，且

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{1-15}$$

速度的大小可表示为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \tag{1-16}$$

如果长度和时间分别以米和秒为单位，则速率和速度的单位都是米/秒（m/s）。

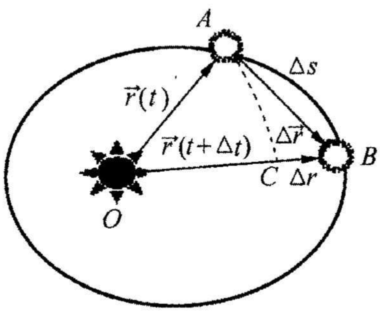


图 1－2　Δs、$|\Delta \vec{r}|$ 和 Δr 的区别

必须指出，位移矢量 $\Delta \vec{r}$ 的大小 $|\Delta \vec{r}|$ 不能写成 Δr，我们定义 $\Delta r = r(t+\Delta t) - r(t)$，它是位矢的模的增量。因而一般来讲，$v \neq \frac{dr}{dt}$。如图 1－2 所示，地球绕太阳做椭圆运动，$t$ 时刻位于 A 点，$t+\Delta t$ 时刻运动至 B 点，则 $\overset{\frown}{AB}$ 为路程 Δs，$\overline{AB}$ 为位移大小。以太阳为圆心，以 $|\vec{r}(t)|$ 为半径画圆弧交 OB 于 C 点，则 CB 为位矢模的增量 Δr。

$$\Delta s > |\Delta \vec{r}| > \Delta r$$

另外，请读者自行证明：虽然平均速度的大小通常都小于同一运动过程的平均速率，

但是瞬时速度的大小却严格等于该时刻的瞬时速率。

表 1－1 给出了一些实际运动过程速度大小的典型值，建议读者自己扩充这些数据，以加深对运动世界的直觉认识。

表 1－1　一些实际运动过程速度大小的典型值（单位：m/s）

真空中的光速	2.99792458×10^{8}
北京正负电子对撞机中的电子	99.999998% 光速
原子中电子绕核运动	约 10^{6}
太阳绕银河系中心的运动	3.0×10^{5}
地球公转	3.0×10^{4}
人造地球卫星	7.9×10^{3}
现代歼击机（最大）	约 9×10^{2}
步枪子弹离开枪口时	约 7×10^{2}
地球赤道上一点自转速率	4.6×10^{2}
空气分子热运动的平均速率（0℃）	4.5×10^{2}
空气中的声速（0℃）	3.3×10^{2}
机动赛车（最大）	1.5×10^{2}
猎豹	2.8×10
人百米跑世界纪录	1.205×10
大陆板块移动	约 10^{-9}

1.3　速度加速度

描述质点运动快慢和运动方向的物理量是速度 $\boldsymbol{\nu}$ 。质点的位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 。和发生这段位移所经历的时间 Δt 的比，称为质点在这段时间内的平均速度 $\bar{\boldsymbol{\nu}}$，

$$\bar{\boldsymbol{\nu}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1－17}$$

平均速度是矢量，它的方向与位移的方向一致。平均速度只是质点在 Δt 时间内位置的平均变化率。为了反映质点在某一瞬时的运动情况，还需引入瞬时速度的概念。瞬时速度 $\boldsymbol{\nu}$ 定义为

$$\boldsymbol{\nu} = \lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1－18}$$

速度也是一个矢量。用 Δs 表示质点在 t 时间内沿轨迹所经过的路程，那么当 $\Delta t\to0$ 时，$|\Delta\boldsymbol{r}|$ 和 Δs 趋于一致。于是有

$$\nu = |\boldsymbol{\nu}| = \lim_{\Delta t\to0}\frac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} \tag{1－19}$$

即速率等于质点所经过路程对时间的变化率。质点运动经过的路程 S，可通过速率对时间

的积分得到，即

$$S = \int_0^t v\mathrm{d}t \tag{1-20}$$

在一般情况下，质点的速度也是随时间变化的，为了描述速度的变化情况，需要引入加速度的概念。设质点在时刻 t 和 $t+\Delta t$ 的速度分别为 $\boldsymbol{v}_A$ 和 $\boldsymbol{v}_B$ ，在 Δt 时间内的速度增量为

$$\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A$$

则定义在这段时间内的平均加速度为

$$\bar{a} = \frac{\boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{1-21}$$

同理，质点在时刻 t 的瞬时加速度（简称加速度）$\boldsymbol{a}$ 定义为

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{1-22}$$

加速度是描述速度变化的物理量，也是一个矢量。如果速度的大小和方向都保持不变，则加速度为零；反之，不论速度大小或方向有变化，加速度就不为零。

在讨论质点的曲线运动时，常将加速度 $\boldsymbol{a}$ 分解成两个分量，一个沿曲线的切线方向，称为切向加速度 $\boldsymbol{a}_t$，一个沿曲线的法向方向，称为法向加速度 $\boldsymbol{a}_n$，即

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n \tag{1-23}$$

因而有

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \tag{1-24}$$

切向加速度 a_t的作用是改变速度的大小，而法向加速度的作用是改变速度的方向。显而易见，在 $a_n=0$，而 $a_t \neq 0$ 时，质点做变速直线运动；在 $a_t=0$，而 $a_n \neq 0$ 时，质点做匀速率曲线运动。

可以证明，a_t和 a_n的数值为

$$\left\{\begin{aligned} a_t &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ a_n &= \frac{v^2}{\rho} \end{aligned}\right\} \tag{1-25}$$

式中，ρ 为质点所在点曲线的曲率半径。

在国际单位制（SI）中，速度的单位为米/秒（$\mathrm{m \cdot s^{-1}}$），加速度的单位为米/秒^2（$\mathrm{m \cdot s^{-2}}$）。

如果质点做匀速直线运动，质点速率 v 为常量，则由式（1－20）可得

$$S = vt \tag{1-26}$$

如果质点做匀变速直线运动，质点加速度为常量，则对式（1－24）积分可得

$$v = v_0 + at \tag{1-27}$$

将上式代入式（1－20），并积分得

$$S = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{1-28}$$

由上二式消去参数 t，可得

$$v^2 - v_0^2 = 2aS \tag{1-29}$$

1.4　时间和空间的测量

物理学是一门实验科学，必须对各种物理量进行测量。测量的结果包括所得的数值及所用的单位（unit）两部分。例如，我们说某人的身高为“1.85 米”，这里“米”就是计量的单位，“1.85”则是以米为单位测量此人的身高所得的数值。但定量确定质点的位置和运动速度需要用到长度和时间两个基本的物理量。

1.4.1　时间的测量及时标

时间是用来确定一系列事件发生前后关系的物理量。在现实生活中，时间的单位有年月日等多种，而在物理学中则常常以“秒（second）”为单位来测量时间。过去曾规定平均太阳日的 1/86 400 为 1 秒，这是基于地球自转周期作为时间计量基准。由于地球自转逐渐变慢，平均太阳日逐渐增长，为了提测量精度，1967 年重新定义的时间计量基准是：1 秒的长度等于铯 133 原子基态两个超精细能级之间跃迁相对应的辐射周期的 9 192 631 770 倍。宇宙间各种物理过程的时标跨越了 43 ~ 44 个数量级，见表 1 - 2。

表 1 - 2　物质世界的时标　　（单位：s）

宇宙的年龄（大爆炸理论得出的结果）	约 10^{18}
地球的年龄	1.2×10^{17}
恐龙灭绝至今	约 10^{15}
猿人出现至今	约 10^{12}
万里长城年龄	7×10^{10}
人的平均寿命	2.2×10^{9}
地球公转周期（1 年）	3.2×10^{7}
地球自转周期（1 年）	8.6×10^{4}
自由中子寿命	8.9×10^{2}
人的脉搏周期	约 0.9
说话声波周期	约 1×10^{-3}
超快速摄影曝光时间	约 10^{-4}
无线电广播电磁波周期、μ 子寿命	约 1×10^{-6}
$\pi^{\pm}$ 介子寿命	约 10^{-8}
可见光波的周期	约 2×10^{-15}
粒子最短寿命	约 10^{-25}

1.4.2　长度的测量及尺度

长度用于确定空间中两点之间的距离：千米、尺和米等都是现实生活中常用的长度单

位。在物理学研究中，常常采用“米（meter）”为长度的单位。

历史上“米”曾被定义为通过巴黎的子午线从北极到赤道之间长度的千万分之一。后来把保存在巴黎国际度量局中的铂铱合金棒在0℃时两条刻线间的距离规定为1m。1983年国际计量大会通过了更加精确可靠的标准：光在真空中在1/299 792 458秒时间内传播的距离规定为1m。目前在物理学研究的领域中，空间尺度跨越了42个数量级，见表1－3。

表1－3　某些长度的数量级　　（单位：m）

目前可观测到的宇宙半径（哈勃2004）	约1×10^{-26}（132亿光年）
银河系的直径	7.6×10^{20}
地球到最近恒星（比邻星）的距离	4.0×10^{16}
地球轨道平均半径	1.496×10^{11}
太阳半径	6.96×10^{8}
地球半径	6.4×10^{6}
珠穆朗玛峰高度（2005年10月测量）	$8.844\ 43\times10^{3}$
红杉树最大高度	约10^{2}
人的身高	约1.7
昆虫的长度	约10^{-2}
人的红细胞直径	7.5×10^{-6}
病毒半径，可见光波波长	约6×10^{-7}
原子半径	约1×10^{-10}
质子半径	约1×10^{-15}

1.5　自然坐标系、切向加速度和法向加速度

1.5.1　自然坐标系下的速度和加速度

在研究质点的平面曲线运动时，有时也采用自然坐标系（Natural coordinates）。在质点运动轨道上任取一个点作为自然坐标系的原点O，在运动质点上沿轨道的切线方向和法线方向建立两个相互垂直的坐标轴。切向坐标轴的方向指向质点前进的方向，其单位矢量用e_t表示，规定法向坐标轴的方向指向曲线的凹侧，其单位矢量用e_n来表示，运动质点在轨道上某一点的坐标用距离原点O的路程S表示，这样的坐标系称为自然坐标系，如图1－3所示。

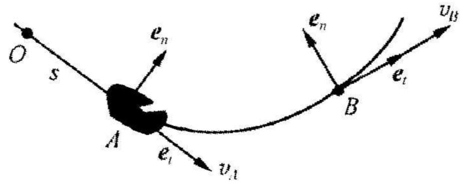


图1－3　在自然坐标系中研究质点的平面曲线运动

1. 速度

运动质点的位置坐标随时间 t 的变化规律可表示为

$$s=s(t) \tag{1-30}$$

这就是自然坐标系中质点的运动方程。

因为质点运动的速度总沿轨道切线方向，所以在自然坐标系中速度矢量可表示为

$$\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{e}_t \tag{1-31}$$

2. 加速度

一般来说，质点做曲线运动时，不仅速度的方向要改变，而且速度的大小也会改变，根据加速度的定义有

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(v\boldsymbol{e}_t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t+v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}t} \tag{1-32}$$

从式（1－32）可以看出，加速度 $\boldsymbol{a}$ 具有两个分量，式中第一项 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t$，是由于速度大小变化而引起的，其方向为 $\boldsymbol{e}_t$的方向，即与速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向相同，因此，此项加速度分矢量称为切向加速度，用 $\boldsymbol{a}_t$表示，有

$$\boldsymbol{a}_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t \tag{1-33}$$

下面讨论式（1－32）中的第二项 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}t}$。如图 1－4 所示，质点在出时间内沿曲线经历的路程为一段弧线，该处的曲率半径为 ρ，相应的曲率中心为 O。当时间间隔 Δt 很小时，曲线上的路程 Δs 可以看成半径为 ρ 的一段圆弧长度，单位矢量 $\boldsymbol{e}_t$在 t 到 $t+\Delta t$ 时间内的增量为 $\Delta\boldsymbol{e}_t=\boldsymbol{e}_t(t+\Delta t)-\boldsymbol{e}_t(t)$，表示了质点运动方向在 Δt 时间内的变化，当 $\Delta t\to 0$ 时，如图 1－5 所示。

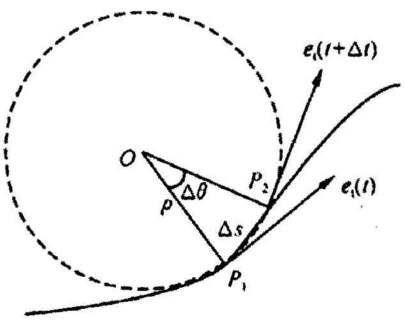


图 1－4　切向单位矢量 $\boldsymbol{e}_t$的方向随时间的变化

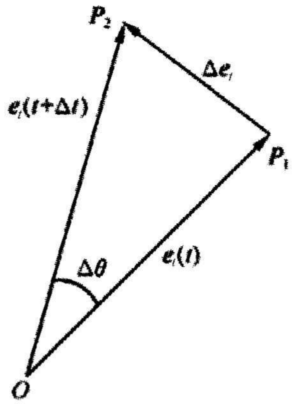


图 1-5　当 $\Delta t \to 0$ 时，Δe_t 的方向变化趋势

$\Delta\theta \to 0$，P_2点趋近于 P_1 点，所以有

$$|\Delta e_t| = |e_t|\Delta\theta = \Delta\theta$$

此时 Δe_t 的方向趋向于 e_t 的垂直方向，即法线 e_n 的方向，以上的分析用数学式可表示为

$$\frac{\mathrm{d}e_t}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta e_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}e_n \tag{1-34}$$

又因为 $\Delta\theta = \dfrac{\Delta s}{\rho}$，代入式（1-34）可得

$$\frac{\mathrm{d}e_t}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\rho\Delta t}e_n = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}e_n = \frac{v}{\rho}e_n \tag{1-35}$$

故式（1-32）中第二项可表示为

$$v\frac{\mathrm{d}e_t}{\mathrm{d}t} = \frac{v^2}{\rho}e_n \tag{1-36}$$

称为法向加速度，用 a_n 表示，有

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}e_n \tag{1-37}$$

综上所述，质点的加速度 a 可表示为

$$a = a_t + a_n = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}e_t + \frac{v^2}{\rho}e_n \tag{1-38}$$

质点在平面曲线运动中的加速度等于质点的切向加速度与法向加速度的矢量和。加速度大小为

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} \tag{1-39}$$

加速度的方向与切线方向夹角 θ 为

$$\tan\theta = \frac{a_n}{a_t} \tag{1-40}$$

切向加速度 a_t 反映了速度大小的变化；法向加速度 a_n 反映了速度方向的变化。

例 1　汽车在半径为 400m 的圆弧弯道上减速行驶，设在某一时刻，汽车的速率为 $10\mathrm{m \cdot s^{-1}}$，切向加速度的大小为 $0.2\mathrm{m \cdot s^{-2}}$。求汽车的法向加速度和总加速度的大小和