Gaodeng Shuxue

# 高等数学

## (上册)

四川大学数学学院高等数学教研室 编

四川大学出版社

Gaodeng Shuxue

# 高等数学

## (上册)

四川大学数学学院高等数学教研室　编

四川大学出版社

# 前　　言

本书是根据普通高等教育大学数学教学大纲以及硕士研究生高等数学考试大纲编写的，并针对当前高等院校的教学实际，重新整理了教材内容，教材具有体系完整、叙述详细、说理浅显、内容透彻、例题和习题全面及便于教学等特点.

全书分上下册.上册为一元函数微积分部分；下册为多元函数微积分部分.具体内容为：上册包括数列极限与数项级数、函数极限与连续性、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及函数项无穷级数；下册包括空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分和曲面积分及微分方程.

鉴于普通初、高级中学数学教学大纲的不断修订，相比于其他同类教材，本书补充了极坐标等内容，并完善了一些初、高中阶段介绍过的概念及相应内容.

由于理工各专业所需要的数学不尽相同，本教材除共同需要的部分外，增加了一些加*号的内容，除了各专业可根据需要自行选用外，也可作为高等数学学习的补充课外参考内容.

本书可作为对大学数学要求较高的高等院校理工科非数学类各专业工科高等数学课程的教材或参考书.

本书由四川大学数学学院高等数学教研室组织编写，参加编写的人员有牛健人、钮海、吕子明、闵心畅、项兆虹、高波等.

本书的出版得益于四川大学数学学院、四川大学出版社及四川大学教务处的关心和帮助，在此谨向他们表示衷心的感谢.

由于水平所限，又兼仓促完稿，本书在内容安排、文字修饰和习题选配等方面还存在许多问题，希望教材使用者及广大读者予以指正.

编　者

**2012 年 6 月**

# 目　录

# 第 1 章　数列极限与数项级数

函数极限理论是近代数学最伟大成就“微积分”的基石，而数列极限则是函数极限理论的基础.

数列极限思想在古代就有比较清楚的论述，比如我国的庄周所著的《庄子》一书的“天下篇”中，记有“一尺之棰，日取其半，万世不竭”；三国时期的刘徽在他的割圆术中提到“割之弥细，所失弥小，割之又割，以至于不可割，则与圆周和体而无所失矣”，这些都是朴素的、典型的数列极限思想.

作为研究函数极限理论的准备，本章将介绍数列的极限理论及其重要应用——无穷数项级数.

## §1.1　数列的极限

在实际生活和经济活动中，很多问题都与数列密切相关，如分期付款、个人投资理财以及人口和资源问题等，而在对这些实际问题运用数列进行分析和解决的过程中，往往需要了解相关数列的变化趋势，而数列极限正是研究数列变化趋势的理论及计算手段.

本节将给出数列极限概念，并讨论一些数列极限存在的简单条件.

### §1.1.1　数列极限的定义

数列及函数是中学熟知的概念，数列本质上是以自然数 $n$ 为自变量的函数 $x_n=f(n)$，当 $n$ 依次取 1，2，3，…，$n$，…时所得的一列函数值 $x_1$，$x_2$，$x_3$，…，$x_n$，…称为无穷数列,简称**数列**. 数列中的各个数称为数列的项，其中第 $n$ 项 $x_n$ 称为数列的**一般项**或**通项**，数列常简记为$\{x_n\}$.

对于一个给定的数列$\{x_n\}$，重要是要了解，当 $n$ 无限增大时(记作 $n\to\infty$)，数列的项的变化趋势，即数列的变化趋势.

例如“一尺之棰，日取其半，万世不竭”，意思是:一尺长的杆第一天截取一半，第二天截取余下的一半，如此继续，每天截取前一天剩余的一半，以至无穷，永无止境.

把每天截取的量按顺序写出来就构成等比数列：

| 日子序号 $n$ | 1 | 2 | 3 | … | $n$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 截取量 $f(n)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | … | $\frac{1}{2^n}$ | … |

当日子序号($n$)无限增大时，对应的截取量$\frac{1}{2^n}$就无限地接近于 0，但又永远不等于 0，正如《庄子》所说:“万世不竭”.

数列种类繁多，当$n\to\infty$时，数列的变化趋势多种多样. 下面通过对几个典型数列的变化趋势分析，归纳数列变化趋势的规律，以此引出数列极限的概念.

(1)数列$\{\frac{n}{n+1}\}$的各项的值随$n$增大而增大，越来越与 1 无限接近.

(2)数列$\{(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\}$的各项的值在数 0 两边跳跃，越来越与 0 无限接近.

(3)数列$\{a\}$的各项的值都相同.

(4)数列$\{2n-1\}$的项，随$n$的增大，各项的值越变越大，且无限增大.

(5)数列$\{\frac{1-(-1)^n}{2}\}$的各项的值交互取得 0 与 1 两数，而不是愈益与某一数接近.

显然，当$n\to\infty$时，数列$\{\frac{n}{n+1}\}$,$\{(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\}$及$\{a\}$的项无限接近某个常数，而数列$\{2n-1\}$，$\{\frac{1-(-1)^n}{2}\}$则不然.

倘若对于数列$\{x_n\}$，当$n\to\infty$时，$x_n$ **无限接近**某个常数$A$，则称数列$\{x_n\}$为收敛数列，常数$A$称为数列的极限. 如数列$\{\frac{n}{n+1}\}$，$\{(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\}$及$\{a\}$均是收敛数列，它们的极限分别为 1，0，$a$；数列$\{2n-1\}$，$\{\frac{1-(-1)^n}{2}\}$则不是收敛数列.

利用数学语言，通过考察数列

$$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=\frac{2}{3},\ x_3=\frac{3}{4},\ x_4=\frac{4}{5},\ \cdots,\ x_n=\frac{n}{n+1},\ \cdots$$

的变化，可以进一步理解**无限接近**的意义.

该数列特性如下：

(1)当$n$越来越大时，$x_n$的值越来越与 1 接近，如图 1.1 所示.

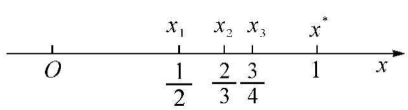


**图 1.1**

(2)如果用足够小的正实数$\varepsilon$作为衡量接近程度的指标，则当$x_n$与 1 的距离$|x_n-1|$小于$\varepsilon$，即$|x_n-1|<\varepsilon$时，就表示$x_n$与 1 在以$\varepsilon$为指标下足够接近；为方便起见，称数集$\{x\,|\,|x-1|<\varepsilon\}$为点$a=1$的$\varepsilon$ **邻域**，记为$U(1,\varepsilon)$，则有：

①若取$\varepsilon=0.1$，则$|x_{10}-1|=\frac{1}{11}<0.1$，$|x_{11}-1|=\frac{1}{12}<0.1$，…，故数列自第 10 项$x_{10}$起的一切项$x_{10}$，$x_{11}$，$x_{12}$，…，$x_n$，…均在邻域$U(1,0.1)$内.

②若取$\varepsilon=0.01$，则$|x_{100}-1|=\frac{1}{101}<0.01$，$|x_{101}-1|=\frac{1}{102}<0.1$，…，故数列自第

100 项 $x_{100}$起的一切项 $x_{100}$，$x_{101}$，$x_{102}$，…，$x_n$，…均在邻域 $U(1, 0.01)$内.

③若取 $\varepsilon=0.001$，数列自第 1000 项 $x_{1000}$起的一切项 $x_{1000}$，$x_{1001}$，$x_{1002}$，…，$x_n$，…均在邻域 $U(1, 0.001)$内.

④若取 $\varepsilon=0.0001$，数列自第 10000 项起，后面一切项 $x_{10000}$，$x_{10001}$，$x_{10002}$，…，$x_n$，…均在邻域 $U(1, 0.0001)$内.

如此推下去，逐渐缩小区间长度，即不论 $\varepsilon$ 是如何小的正数，总可找到一个正整数 $N$，使数列中除了开始的 $N$ 项以外，自第 $N+1$ 项起，后面的一切项

$$x_{N+1}, x_{N+2}, x_{N+3}, \cdots$$

都在点 $a=1$ 的 $\varepsilon$ 邻域 $U(1, \varepsilon)$内.

上述结果表明：存在一类数列$\{x_n\}$，对于任意小的正数 $\varepsilon$，能够找到足够大的正整数 $N$，使数列中自第 $N+1$ 项 $x_{N+1}$起，后面的一切项对应的点与点 $a=1$ 的距离永远小于 $\varepsilon$.

对于数列

$$\{x_n\}=\left\{\frac{n}{n+1}\right\},$$

也可叙述为：对于任意小的正数 $\varepsilon$，总可找到一个正整数 $N$，使当一切 $n>N$ 时，不等式 $|x_n-1|<\varepsilon$均成立. 事实上，当 $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$，即 $N$ 为小于$\frac{1}{\varepsilon}-1$ 的最大正整数（记为$\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$，$y=[x]$称为**取整函数**）时，$|x_n-1|=\frac{1}{n+1}<\varepsilon$，因此数 1 称为数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$的极限.

一般地，对于数列$\{x_n\}$有下列定义.

**定义 1**　设有数列$\{x_n\}$，$a$ 是常数. 若对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在一个正整数 $N$，使当一切 $n>N$ 时都有

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

则 $a$ 称为数列$\{x_n\}$**的极限**，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\text{（莱布尼茨记号），或 } x_n\to a\ (n\to\infty)\text{（牛顿记号），}$$

并称**数列**$\{x_n\}$是**收敛**的，不收敛的数列称为是**发散**的.

为了直观描述数列极限，下面给出“数列$\{x_n\}$的极限为 $a$”的几何解释：

将常数 $a$ 及数列 $x_1$，$x_2$，$x_3$，…，$x_n$，…在数轴上用它们的对应点表示出来，再在数轴上作点 $a$ 的 $\varepsilon$ 邻域，即开区间$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$，如图 1.2 所示.

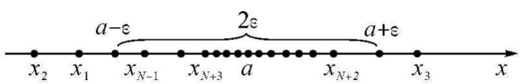


图 1.2

因不定式　$|x_n-a|<\varepsilon$

与不定式　$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$

等价，所以当 $n>N$ 时，所有的点 $x_n$ 均落在开区间$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$内，而只有有限个（至多 $N$ 个）在这区间以外.

为了表示方便，引入记号“$\forall$”（Any 首字母 A 倒过来）表示“对任意给定”或“对每一

个”，记号“$\exists$”(Exist 首字母 E 反过来)表示“存在”，于是数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 用符号可表示为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，当 $n>N$ 时，均有

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

这是数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义.

数列$\{x_n\}$当 $n$ 无限增大时，各项的值越变越大，且无限增大，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty，或 x_n\to+\infty(n\to\infty).$$

用符号可表示为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty\Leftrightarrow\forall G>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，均有

$$x_n>G.$$

利用极限的定义能够在理论上严格确定一些基础数列的收敛性问题.

**例 1**　证明常数数列$\{x_n=C\}$($C$ 是常数)的极限是 $C$，即$\lim\limits_{n\to\infty}C=C$.

**证明**　$\forall\varepsilon>0$，必有 $n\in\mathbf{N}$，有

$$|x_n-C|=|C-C|=0<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}C=C.$$

**例 2**　证明数列$\{(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\}$的极限是 0.

**分析**　根据极限定义，要证明对任意给定的 $\varepsilon>0$，总可找到正整数 $N$，当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-a|=\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

要使这个不等式成立，只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$就行了.

**证明**　$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=[\frac{1}{\varepsilon}]\in\mathbf{N}$ 使 $\forall n>N$，有

$$\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=0.$$

**例 3**　等比数列$\{q^n\}$称为**几何数列**. 证明当$|q|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

**证明**　当 $q=0$ 时，$\forall n\in\mathbf{N}$，$q^n=0$. 这是常数数列，

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0.$$

当 $0<|q|<1$ 时，$\forall\varepsilon>0$(限定 $0<\varepsilon<|q|$)，要使不等式

$$|q^n-0|=|q|^n<\varepsilon$$

成立，解得 $n>\frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$($\lg\varepsilon<0$ 与 $\lg|q|<0$). 取 $N=[\frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}]$. 于是，$\forall\varepsilon>0$，必有 $N=[\frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}]\in\mathbf{N}$，使 $\forall n>N$，有$|q^n-0|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

**例 4**　证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$，$a>0$.

**证明**　(1)当 $a>1$ 时，$\sqrt[n]{a}>1$. $\forall\varepsilon>0(0<\varepsilon<a-1)$，要使不等式

$$|\sqrt[n]{a}-1|=\sqrt[n]{a}-1<\varepsilon$$

成立，解得 $n>\dfrac{\lg a}{\lg(1+\varepsilon)}$. 取 $N=\left[\dfrac{\lg a}{\lg(1+\varepsilon)}\right]$. 于是 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\dfrac{\lg a}{\lg(1+\varepsilon)}\right]\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，均有

$$|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon.$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\quad a>1.$$

(2)当 $a=1$ 时，$\forall n\in\mathbf{N}$，$\sqrt[n]{a}=1$. 这是一个常数数列，由例 2，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\quad a=1.$$

(3)当 $0<a<1$ 时，令 $a=\dfrac{1}{b}$，故 $b>1$，有

$$|\sqrt[n]{a}-1|=\left|\frac{1}{\sqrt[n]{b}}-1\right|=\left|\frac{1-\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{b}}\right|<|\sqrt[n]{b}-1|.$$

由(1)知，$\forall\varepsilon>0$，必有 $N=\left[\dfrac{\lg b}{\lg(1+\varepsilon)}\right]=\left[\dfrac{-\lg a}{\lg(1+\varepsilon)}\right]\in\mathbf{N}$，使 $\forall n>N$，有

$$|\sqrt[n]{a}-1|<|\sqrt[n]{b}-1|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\quad 0<a<1.$$

综上讨论，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\quad a>0.$$

## §1.1.2　收敛数列的性质

收敛数列除了其变化趋势具有规律性以外，还满足如下特性：

**定理 1**(唯一性)　若数列$\{x_n\}$的极限存在，则极限是唯一的.

**证明**　设数列$\{x_n\}$有两个不相等的极限值 $a,b$，则对应于 $d=|a-b|>0$，可找到正整数 $N$，使 $n>N$ 时，恒有

$$|x_n-a|<\frac{d}{2},\qquad |x_n-b|<\frac{d}{2},$$

从而$|a-b|=|(a-x_n)-(b-x_n)|\leqslant|a-x_n|+|b-x_n|<d$，这与假设 $d=|a-b|$矛盾.

故$\{x_n\}$不可能同时以两个不相等的数为极限.

**定理 2**(有界性)　若数列$\{x_n\}$有极限，则$\{x_n\}$有界. 即 $\exists M>0$，$\forall n\in\mathbf{N}$，有$|x_n|\leqslant M$.

**证明**　因$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，所以对 $\varepsilon=1$，$\exists N\in\mathbf{N}$，当 $n>N$ 时有

$$|x_n-a|<\varepsilon=1,$$

从而

$$|x_n|=|x_n-a+a|\leqslant|x_n-a|+|a|<1+|a|.$$

令 $M=\max(|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,1+|a|)$，于是，$\forall n\in\mathbf{N}$，有$|x_n|\leqslant M$，即$\{x_n\}$

有界.

但有界数列不一定有极限，如数列

$$1, 0, 1, 0, \cdots, \frac{1-(-1)^n}{2}, \cdots$$

有界，但无极限.

如果数列无界，则数列发散.

**定理 3**(保序性)　若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，且$a>b$，则$\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，有$x_n>y_n$.

**证明**　已知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，且$a>b$. 取$\varepsilon=\frac{a-b}{2}>0$，由极限定义知：

$\exists N_1\in\mathbf{N}$，$\forall n>N_1$，有$|x_n-a|<\frac{a-b}{2}$，从而

$$x_n>a-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}.$$

$\exists N_2\in\mathbf{N}$，$\forall n>N_2$，有$|y_n-b|<\frac{a-b}{2}$，从而

$$y_n<b+\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}.$$

所以，当$n>N=\max(N_1, N_2)$时，有

$$y_n<\frac{a+b}{2}<x_n,$$

即

$$x_n>y_n.$$

**推论 1**　若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且$a>b$(或$a<b$)，则$\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$时，有$x_n>b$(或$x_n<b$).

在定理 3 中取$y_n=b(n=1, 2, 3, \cdots)$即可得出推论 1.

**推论 2**　若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，且$\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$时，有$x_n\geqslant y_n$，则$a\geqslant b$.

**证明**　用反证法. 假设$a<b$，根据定理 3，$\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$时，有$x_n<y_n$成立，这与已知条件$x_n\geqslant y_n$矛盾，因此必有$a\geqslant b$.

特别地，若$x_n\geqslant 0$，且$\{x_n\}$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant 0$.

**推论 3**　若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且$a<0$(或$a>0$)，则$\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，有$x_n<0$(或$x_n>0$).

## §1.1.3　收敛数列的四则运算

数列极限的定义对于理论上严格证明数列收敛与否是必不可少的，但对于数列极限的计算却十分不便，下面的定理开启了一个计算数列极限的方便之门.

**定理 4**　设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，则

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n$，

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n$，

(3)若$b\neq 0$，$y_n\neq 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$.

* **证明**　(1)只证明求和的运算.

因$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in\mathbf{N}$，$\forall n>N_1$，有

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

同时$\exists N_2\in\mathbf{N}$，$\forall n>N_2$，有

$$|y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

$\exists N\in\max\{N_1, N_2\}$，$\forall n>N$，同时有

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是，$\forall n>N$，有

$$|(x_n+y_n)-(a+b)|\leqslant|x_n-a|+|y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=a+b=\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}y_n.$$

同理可证

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n-\lim_{n\to\infty}y_n.$$

(2)因$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由定理 2 知$\{x_n\}$有界，即$\exists M_1\in\mathbf{N}$，使$|x_n|\leqslant M_1$.

令$M=\max\{M_1, |b|\}$，因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，故$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in\mathbf{N}$，$\forall n>N_1$，有

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2M}.$$

同时$\exists N_2\in\mathbf{N}$，$\forall n>N_2$，有

$$|y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2M}.$$

令$N=\max(N_1, N_2)$，$\forall n>N$，有

$$\begin{aligned}|x_n\cdot y_n-a\cdot b|&=|x_n\cdot y_n-x_n\cdot b+x_n\cdot b-a\cdot b|\\&\leqslant|x_n||y_n-b|+|b||x_n-a|\\&<M\frac{\varepsilon}{2M}+M\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon.\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=a\cdot b=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}y_n.$$

(3)由(2)只要证$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{y_n}=\dfrac{1}{b}$.

对于$\dfrac{|b|}{2}>0$，由$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，$\exists N_1\in\mathbf{N}$，$\forall n>N_1$，有

$$|b|-|y_n|\leqslant|y_n-b|<\frac{|b|}{2},$$

得

$$\frac{|b|}{2}\leqslant|y_n|.$$

仍由$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_2\in\mathbf{N}$，$\forall n>N_2$，有

$$|y_n-b|<\frac{|b|^2}{2}\varepsilon.$$

取$N=\max\{N_1, N_2\}$，$\forall n>N$，有

$$\left|\frac{1}{y_n}-\frac{1}{b}\right|=\left|\frac{y_n-b}{y_n\cdot b}\right|\leqslant\frac{2|y_n-b|}{|b|^2}<\frac{2}{|b|^2}\cdot\frac{|b|^2}{2}\varepsilon=\varepsilon.$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}=\frac{1}{b}.$$

由(2)得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\frac{1}{y_n}=a\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{b}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}.$$

**推论 4** 定理 4 的(1)、(2)都可推广至有限多个收敛的数列.

**推论 5** $\lim\limits_{n\to\infty}(Cx_n)=C\lim\limits_{n\to\infty}x_n$($C$为常数).

**推论 6** $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^k=(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)^k$($k$为正整数).

**例 5** 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-1}{2^n}$.

**解** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-1}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{2^n})=\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=1-0=1.$

**例 6** 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-5n+1}{2n^2+1}$.

**解**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-5n+1}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2})}{\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n^2})}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{3}{2}.$$

## §1.1.4 数列收剑的判别法

当难于求出数列的极限值时，其极限是否存在是应当首先考虑的问题，只有肯定了它的存在，再设法计算才有意义. 数学理论中，极限的存在问题有着重要的地位. 下面介绍两个判定数列极限存在的准则，这两个准则是根据数列的特点对其收敛作出定性的结论.

**准则Ⅰ**(夹逼定理)

设$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$是三个数列，若

(1) $\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，有$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，

则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

* **证明**　因$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in\mathbf{N}$，$\forall n>N_1$，有

$$|y_n-a|<\varepsilon,$$

即

$$a-\varepsilon<y_n<a+\varepsilon.$$

又因$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，对上面的$\varepsilon>0$，$\exists N_2\in\mathbf{N}$，$\forall n>N_2$，有

$$|z_n-a|<\varepsilon,$$

即

$$a-\varepsilon<z_n<a+\varepsilon.$$

$\exists N_0=\max(N_1,N_2,N)$，$\forall n>N_0$，有

$$a-\varepsilon<y_n\leqslant x_n\leqslant z_n<a+\varepsilon,$$

或$\forall n>N_0$，有

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

**例 7**　证明$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$存在，并求其极限值.

**证明**　令$x_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，其项数为$n$，在$n$增大时，它的项数也随之增加，故不能用逐项求极限的办法. 在$x_n$的各项中，以首项最大，末项最小，故有

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}},$$

即

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant x_n\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

令$y_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$，$z_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$，则有

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1.$$

因$\{y_n\}$与$\{z_n\}$有相同的极限，由准则Ⅰ得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

在讨论准则Ⅱ前，先介绍数集的上下确界概念.

这里考虑的数集$E$是非空的，有上界的. 即数集$E$中至少包含一个数，并且存在常数$M$，使对一切$x\in E$都有$x\leqslant M$. 这样的$M$，称为$E$的一个**上界**. 有上界的数集，其上界显然不是唯一的，其中上界中的最小者（如果存在）称为数集的**上确界**.

* **定义 2**　设有非空数集$E$，如$\exists\beta\in\mathbf{R}$，且

(1) $\forall x\in E$，有$x\leqslant\beta$，

(2) $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_0\in E$，有$\beta-\varepsilon<x_0$，

则称$\beta$是数集$E$的**上确界**，记为

$$\beta=\sup E\text{①} \text{ 或 } \beta=\sup_{x\in E}\{x\}.$$

条件(1)说明 $\beta$ 是数集 $E$ 的一个上界，条件(2)则说明小于 $\beta$ 的任何数都不是 $E$ 的上界，即 $\beta$ 是 $E$ 的最小上界.

如果非空数集 $E$ 有下界，即存在常数 $m$，使对一切 $x\in E$ 都有 $x\geqslant m$. 这样的 $m$，称为 $E$ 的一个**下界**. 有下界的数集，其下界不唯一，把下界中的最大者(如果存在)称为数集的**下确界**.

* **定义 3** 设有非空数集 $E$，如 $\exists\alpha\in\mathbf{R}$，且

(1) $\forall x\in E$，有 $x\geqslant\alpha$，

(2) $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_0\in E$，有 $x_0<\alpha+\varepsilon$，

则称 $\alpha$ 是数集 $E$ 的**下确界**，记为

$$\alpha=\inf E\text{②} \text{ 或 } \alpha=\inf_{x\in E}\{x\}.$$

条件(1)说明 $\alpha$ 是数集 $E$ 的一个下界，条件(2)说明大于 $\alpha$ 的任何数都不是 $E$ 的下界，即 $\alpha$ 是 $E$ 的最大下界.

由此立即得到上(下)确界的唯一性定理.

* **定理 5**(确界唯一性) 若数集有上(下)确界，则它的上(下)确界是唯一的.

并不是任何数集都有上下确界. 对任何有限数集来说，最大数就是它的上确界，最小数就是它的下确界. 但是一个无限数集，就不一定存在上下确界. 例如，对于正整数列$\{n\}$，显然不存在适合上确界条件(1)的数 $\beta$. 而负整数列$\{-n\}$也不存在适合下确界条件(1)的数 $\alpha$. 那么怎样的数列才有上确界或下确界呢？给出定理 6 作为公理承认下来，并用它的结论证明准则Ⅱ。

* **定理 6**(确界存在性) 有上(下)界的非空数集，必有上(下)确界.

**定义 4** 如果数列$\{x_n\}$的项满足

$$x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\cdots,$$

则称这一数列是**单调增加数列**；如果数列$\{x_n\}$的项满足

$$x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant x_{n+1}\geqslant\cdots,$$

则称这一数列是**单调减少数列**. 这两种数列统称**单调数列**.

**准则Ⅱ** 单调有界数列必有极限.

* **证明** 只讨论单调增加有上界的数列.

因$\{x_n\}$是有界数列，则这些 $x_n$ 构成的数集 $E$ 是有上界的且是非空的. 由上确界存在定理，数列$\{x_n\}$存在上确界 $\beta=\sup\{x_n\}$. 由上确界的定义有：① $x_n\leqslant\beta(n=1,2,3,\cdots)$. ② 对任意给定的 $\varepsilon>0$，在$\{x_n\}$中至少有一数 $x_N$，使 $x_N>\beta-\varepsilon$. 由于$\{x_n\}$是单调增加数列，因此当 $n>N$ 时，有 $x_N\leqslant x_n$，从而 $x_n>\beta-\varepsilon$. 也即是说，当 $n>N$ 时，有

$$0\leqslant\beta-x_n<\varepsilon,$$

故得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\beta.$$

这里不仅证明了单调增加有上界数列的极限存在，并且知极限就是它的上确界.

① sup 是 supermum 的缩写.

② inf 是 infirmum 的缩写.