浙大优学
进阶数学

高分之路拾级而上
每日一题百日进阶

光子数学丛书

高中数学进阶教程

GAOZHONG SHUXUE
JINJIE JIAOCHENG

每日一题好题精选

兰 琦◎著

兰琦，光子数学**创始人**，14岁读于**中科大少年班**，
高考数学**满分**，毕业于**清华大学**

每课精选一道题，从破题的思路，图文并茂的讲解到精辟到位的总结，您只要每天花上10分钟认真阅读和思考，一定能在百日获得明显的进步，在高考中取得好成绩。

扫码关注 更多每日一题

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高中数学进阶教程

（每日一题好题精选）

兰 琦 著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学进阶教程.每日一题好题精选/兰琦著.
—杭州:浙江大学出版社,2016.8(2016.11重印)
ISBN 978-7-308-16128-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①兰… Ⅲ.①中学数学课—高中—习题集 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第193100号

高中数学进阶教程(每日一题好题精选)
兰琦 著

策　　划 陈海权(QQ:1010892859)
责任编辑 夏晓冬
责任校对 金佩雯　陈　宇
封面设计 林智广告
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路148号　邮政编码310007)
(网址:http://www.zjupress.com)
排　　版 杭州星云光电图文制作有限公司
印　　刷 杭州杭新印务有限公司
开　　本 889mm×1194mm　1/16
印　　张 7.5
字　　数 211千
版 印 次 2016年8月第1版　2016年11月第3次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-16128-2
定　　价 21.80元

浙江大学出版社发行中心联系方式(0571)88925591;http://zjdxcbs.tmall.com

每日一题百日进阶

做题是学好高中数学的必要手段，很多同学乃至老师每天都会演算大量习题. 但是据我观察，由于做题的方式方法不同，收效大相径庭. 有些同学不断地重复演算已经熟练掌握的习题虚度时日；有些同学浅尝辄止，在看懂答案的层面上徘徊挣扎；有些同学盲目追求一题多解，思考流于形式而未能提炼.

这是为什么呢? 其实很简单，就是因为没有抓住数学学习的特点. 数学严密、灵活而系统，严密性指数学的基础，灵活性指数学的表现形式，而系统性指数学的内在. 因此在做数学习题时需要进行严格的逻辑推理并用符号语言与图形语言准确地表达出来，这样有助于培养严密的数学思维；进而需要注意思考每道题的特点，这样有助于锻炼思路的针对性和灵活性；此外还需要总结隐藏在独立的习题背后的共通的性质，这样有助于形成自己系统的解题途径.

有很多书非常重视数学学习的系统性，在知识梳理和题型归纳方面做了很好的示范. 今年3月份我在另外一个方向上进行了尝试，即通过对近三年高考压轴题的解法梳理与思考总结，为同学有效地做题进行示范，意图培养学生独立思考与总结的能力。这种尝试得到了老师和学生的认可，所撰写的《高考数学压轴题的分析与解》一书长期居于同类图书销售榜首。这种尝试也带来了更多的需求，很多读者提出将我的博客的每日一题出版以便方便阅读，因此我从博客中精选了一百道题，做了精心的加工，部分题目配置了练习形成了本书，相信您只要坚持阅读，定能在百日获得明显的进步，在高考中取得好成绩。

从这本书开始，我将和我的伙伴们一起，完成《高中数学进阶教程》这套书的写作，他们当中不少人水平远在我之上，而且和我教风相近。希望同学们能够通过这套书了解数学学习的一些特点，掌握数学学习的规律，高分之路拾级而上，从而取得长足的进步. 由于作者水平所限，难免会出现一些纰漏甚至错误，还请读者批评指正.

兰　琦

邮箱：chiccherry1@163.com

博客地址：http://lanqi.org

目　录

第一章　函　数

第二章　三　角

第三章　向　量

第四章　数　列

第五章　不等式

第六章　代数变形

第七章　直线与圆

第八章　立体几何

第九章　导　数

第十章　圆锥曲线

第十一章　计数与概率

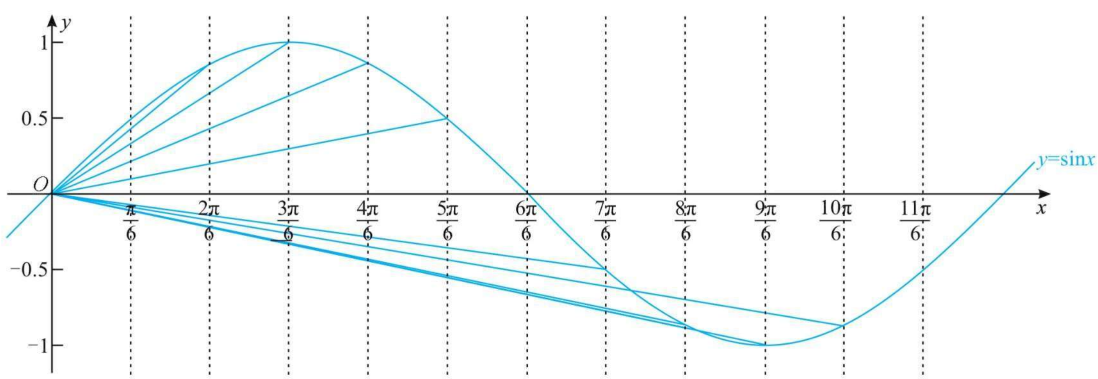
第十二章　组合杂题

第一章　函　数

第 1 课　代数条件的直观化

已知函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，则满足 $f\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)<f\left(\dfrac{n\pi}{6}+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的正整数 n 的最小值为________.

解　将 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 看作是点 $(x,\sin x)$ 与原点 $(0,0)$ 连线的斜率，作如下示意图.



由于

$$\frac{\sin\frac{8\pi}{6}}{\frac{8\pi}{6}}=-\frac{3\sqrt{3}}{8\pi},\frac{\sin\frac{9\pi}{6}}{\frac{9\pi}{6}}=-\frac{2}{3\pi},\frac{\sin\frac{10\pi}{6}}{\frac{10\pi}{6}}=-\frac{3\sqrt{3}}{10\pi},$$

于是可得

$$\frac{\sin\frac{9\pi}{6}}{\frac{9\pi}{6}}<\frac{\sin\frac{8\pi}{6}}{\frac{8\pi}{6}}<\frac{\sin\frac{10\pi}{6}}{\frac{10\pi}{6}},$$

进而所求的最小值为 9.

思考与总结

对于形如 $y=\dfrac{f(x)}{x}$ 的函数，可以将问题转化为研究函数 $y=f(x)$ 图象上的点与原点连线的斜率.

第 2 课　函数方程试题一则

(2008/9 British Mathematical Olympiad, Round 2[a])

求所有的函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，使得对任意 $x,y\in\mathbf{R}$ 有 $f(x^3)+f(y^3)=(x+y)[f(x^2)+f(y^2)-f(xy)]$.

[a]原题描述为：Find all functions f from the real numbers to the real numbers which satisfy

$$f(x^3)+f(y^3)=(x+y)[f(x^2)+f(y^2)-f(xy)]$$

for all the real numbers x and y.

解　令 $y=-x$，可得 $f(-x^3)=-f(x^3)$，于是 $f(x)$ 为奇函数；

令 $y=x$，可得 $f(x^3)=xf(x^2)$，于是

$$xf(x^2)+yf(y^2)=xf(x^2)+xf(y^2)+yf(x^2)+yf(y^2)-(x+y)f(xy),$$

整理得

$$(x+y)f(xy)=xf(y^2)+yf(x^2).$$

分别令 $y=1, y=-1$ 得

$$\begin{cases}(x+1)f(x)=xf(1)+f(x^2),\\(x-1)f(-x)=xf(1)-f(x^2),\end{cases}$$

两式相加即得

$$f(x)=xf(1).$$

思考与总结

这里出现的赋值 $y=\pm x$ 和 $y=\pm 1$ 都是在解函数方程中经常使用的手段.

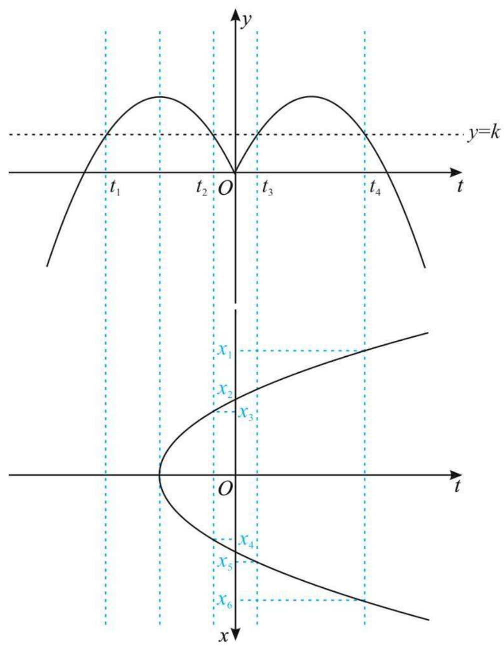
第 3 课　复合函数的"组合图象"

讨论关于 x 的方程 $(x^2-1)^2-2|x^2-1|+k=0$ 的根的个数.

解　原方程的根的个数即函数 $y=-(x^2-1)^2+2|x^2-1|$ 的图象与直线 $y=k$ 的交点个数. 我们无法画出第一个函数的草图,因此需要借助复合函数将其分解为两个较为简单的函数

$$y=-t^2+2|t|, t=x^2-1,$$

然后组合在一起,如图.



通过两个函数的草图,可以利用函数 $y=-t^2+2|t|$ 的图象由 k 确定对应的 t 的分布. 问题的复杂性在于不同的 t 对应的 x 的值的个数可能是不一样的,这需要利用函数 $t=x^2-1$ 的图象来确定.

事实上,当 $t>-1$ 时,每个 t 对应 2 个 x;当 $t=-1$ 时,每个 t 对应 1 个 x;当 $t<-1$ 时,每个 t 对应 0 个 x.

例如,如果直线 $y=k$ 与函数 $y=-t^2+2|t|$ 的图象的交点横坐标落在区间 $(-\infty,-1)$ 上,那么这种交点(如 t_1)是找不到对应的 x 的;而如果直线 $y=k$ 与函数 $y=-t^2+2|t|$ 的图象的交点横坐标落在区间 $(-1,+\infty)$ 上,那么每个交点(如 t_2)都可以找到两个 x 的值与之对应(也就是方程的两个不同的根).

因此不难得到答案,原方程根的个数:当 $k<0$ 时,有 2 个;当 $k=0$ 时,有 4 个;当 $0<k<1$ 时,有 6 个;当 $k=1$ 时,有 3 个;当 $k>1$ 时,有 0 个.

思考与总结

将组成复合函数的两个函数的图象"拼接"起来,有助于提高函数图象的直观性和可读性.

第 4 课　好一个分段函数

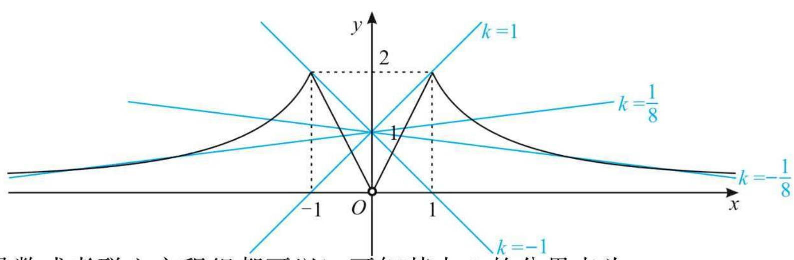
讨论关于 x 的方程 $\left|x+\frac{1}{x}\right|-\left|x-\frac{1}{x}\right|=kx+1$ 的根的个数.

解　原方程的根的个数即函数 $y=\left|x+\frac{1}{x}\right|-\left|x-\frac{1}{x}\right|$ 的图象与直线 $y=kx+1$ 的交点个数. 利用处理包含绝对值的函数的零点分段讨论法,不难将函数化简为

$$y=\begin{cases}-\dfrac{2}{x}, & x<-1,\\ -2x, & -1\leqslant x<0,\\ 2x, & 0<x\leqslant 1,\\ \dfrac{2}{x}, & x>1.\end{cases}$$

进而画出函数的草图.

另一方面,直线 $y=kx+1$ 恒过定点 $(0,1)$,如图.



经计算(利用导数或者联立方程组都可以),可知其中 k 的分界点为

$$-1,-\frac{1}{8},0,\frac{1}{8},1,$$

因此梳理出答案,根的个数为

$$\begin{cases}1, k\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty),\\ 2, k\in\{-1,1\},\\ 3, k\in\left(-1,-\dfrac{1}{8}\right)\cup\left(\dfrac{1}{8},1\right),\\ 4, k\in\left\{-\dfrac{1}{8},0,\dfrac{1}{8}\right\},\\ 5, k\in\left(-\dfrac{1}{8},0\right)\cup\left(0,\dfrac{1}{8}\right).\end{cases}$$

思考与总结

半分离变量法是介于全分离和不分离之间的方法,可以减轻全分离时出现复杂函数的压力,但同时也会带来一些隐患.(如对函数图象的凹凸性的要求)

第 5 课　构造函数

已知函数 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$，其中 a,b,c,d 为实常数，$f(x)$ 的图象经过 $A\left(2,\frac{1}{2}\right)$，$B\left(3,\frac{1}{3}\right)$，$C\left(4,\frac{1}{4}\right)$ 三点，求 $f(1)+f(5)$ 的值.

解　令 $g(x)=xf(x)-1$，则 $x=2,3,4$ 是其零点，且 $g(x)$ 是一个五次多项式函数. 于是

$$xf(x)-1=(x-2)(x-3)(x-4)(x^2+px+q).$$

令 $x=0$ 可得

$$q=\frac{1}{24}.$$

分别令 $x=1,5$ 可得

$$f(1)-1=-6(1+p+q),5f(5)-1=6(25+5p+q),$$

进而可得

$$f(1)=-6p-6q-5,f(5)=6p+\frac{6}{5}q+30+\frac{1}{5},$$

两式相加，将 q 的值代入，有

$$f(1)+f(5)=25.$$

思考与总结

对于多项式 $f(x)$，如果 $x=a$ 是它的零点，那么 $f(x)$ 必然有因式 $(x-a)$，可以利用它迅速确定多项式的解析式.

练习　构造二次函数 $f(x)$，使 $f(a)=bc$，$f(b)=ca$，$f(c)=ab$，其中 a,b,c 为互不相等的实数.

答案　$f(x)=x^2-(a+b+c)x+(ab+bc+ca)$.

第 6 课　二阶不动点

(2013 年四川卷理科数学第 10 题改)

设函数 $f(x)=\sqrt{e^x+x-a}(a\in\mathbf{R})$. 若曲线 $y=\sin x$ 上存在点 (x_0,y_0) 使得 $f(f(y_0))=y_0$,则 a 的取值范围是________.

解　对于函数 $y=f(x)$,方程 $f(x)=x$ 的根称为函数 $f(x)$ 的(一阶)不动点;方程 $f(f(x))=x$ 的根称为函数 $f(x)$ 的二阶不动点. 当然,我们也可以以此类推定义 n 阶不动点. 有以下引理:

思考与总结

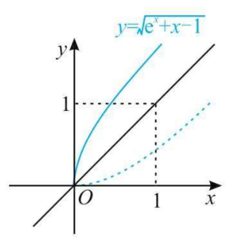
方程 $f(f(x))=x$ 的解为曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $x=f(y)$(这两条曲线关于直线 $y=x$ 对称)的交点的横坐标. 进一步,如果 $f(x)$ 单调递增,那么方程 $f(f(x))=x$ 的解为曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=x$ 的交点的横坐标.

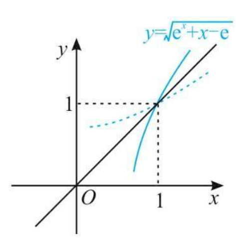
引理的证明　若 $f(x)$ 单调递增,假设 $x=x_0$ 是方程 $f(f(x))=x$ 的解. 若 $f(x_0)>x_0$,则由于 $f(x)$ 单调递增,因此 $f(f(x_0))>f(x_0)>x_0$,矛盾;若 $f(x_0)<x_0$,则由于 $f(x)$ 单调递增,因此 $f(f(x_0))<f(x_0)<x_0$,矛盾;因此 $f(x_0)=x_0$. 引理成立.

回到本题　由于 $f(x)$ 单调递增,于是等价于 $f(x)$ 的图象与直线 $y=x$ 在 $[0,1]$ 上有公共点,即 $\sqrt{e^x+x-a}=x$ 在 $[0,1]$ 上有解,于是有

$$a=e^x-x^2+x,x\in[0,1]$$

记 $g(x)=e^x-x^2+x,x\in[0,1]$,则 $g'(x)=e^x-2x+1>0$,所以 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增,从而有 $a\in[g(0),g(1)]=[1,e]$,即 a 的取值范围是 $[1,e]$. 如图是当 a 分别取 1 和 e 时,对应的 $y=f(x)$ 与 $x=f(y)$ 的图象.





练习　已知函数 $f(x)=|x^2-ax|-2$,且函数 $y=f(x+2)$ 是偶函数.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 设函数 $y=g(x)$,集合 $M=\{x\mid g(x)-x=0\}$,集合 $N=\{x\mid g(g(x))-x=0\}$.

(i) 证明:$M\subseteq N$;

(ii) 如果 $g(x)=f(|x|)$,集合 $P=\{x\mid g(g(x))-x=0\text{ 且 }|x|\leqslant 2\}$,那么集合 P 中的元素个数为________.

答案　(1)$a=4$;　(2)(i) 略;(ii)5 个.

第 7 课　n 阶周期点

已知函数 $f(x)$ 的定义域和值域都为 $[0,1]$，$f_1(x)=f(x)$，$f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$，称方程 $f_n(x)=x$ 的解为 $f(x)$ 的 n 阶周期点. 函数 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2},\\ 2-2x, & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1\end{cases}$ 的 n 阶周期点的个数为________.

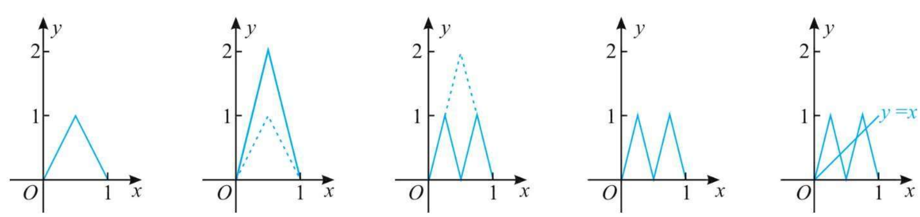
解　注意从映射的角度分析函数

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2},\\ 2-2x, & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1,\end{cases}$$

也即

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant 2x\leqslant 1,\\ 2-2x, & 1<2x\leqslant 2,\end{cases}$$

这就意味着函数 $f(x)$ 实际上是通过以下一系列的操作：首先将参与运算的 x 扩大到原来的两倍，然后不超过 1 的部分保持不变，超过 1 的部分作关于 1（因为和为 2）的对称，如图.



考虑函数图象和直线 $y=x$ 的交点，易得函数 $f(x)$ 的 n 阶周期点的个数为 2^n 个.

思考与总结

将代数运算和对应的图象变换联系起来，可以更好地理解解析式. 本题可以看作“兰州拉面”的数学模型.

练习　已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(x+2)=f(x)$，当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=1-2\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$，则 $f(f(x))=\dfrac{5}{4(x-1)}$ 在区间 $[-1,3]$ 内的所有不相等实根之和为________.

答案　6.

第 8 课　构造映射比大小

(2011 年浙江卷理科数学第 10 题)

设 a,b,c 为实数,$f(x)=(x+a)(x^2+bx+c)$,$g(x)=(ax+1)(cx^2+bx+1)$. 记集合 $S=\{x \mid f(x)=0, x\in \mathbf{R}\}$,集合 $T=\{x \mid g(x)=0, x\in \mathbf{R}\}$,若 Card($S$),Card($T$) 分别表示集合 S,T 的元素个数,则下列结论不可能的是 (　　)

A. $\text{Card}(S)=1$ 且 $\text{Card}(T)=0$　　B. $\text{Card}(S)=1$ 且 $\text{Card}(T)=1$

C. $\text{Card}(S)=2$ 且 $\text{Card}(T)=2$　　D. $\text{Card}(S)=2$ 且 $\text{Card}(T)=3$

解　注意到

$$g(x)=\begin{cases} x^3\left(\dfrac{1}{x}+a\right)\left(\dfrac{1}{x^2}+b\cdot\dfrac{1}{x}+c\right), & x\neq 0, \\ 1, & x=0, \end{cases}$$

即

$$g(x)=\begin{cases} x^3 f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0, \\ 1, & x=0, \end{cases}$$

于是

$$T=\left\{\dfrac{1}{x}\,\middle|\, x\in S \text{ 且 } x\neq 0\right\},$$

于是 $\text{Card}(T)\leqslant \text{Card}(S)$,且 Card($T$) 最多比 Card($S$) 小 1(取决于 S 中是否包含 0),于是选 D.

接下来给出选项 A,B,C 的构造:

A. $f(x)=x^3, a=b=c=0$

B. $f(x)=(x-1)^3, a=-1, b=-2, c=1$

C. $f(x)=(x-1)(x-2)^2, a=-1, b=-4, c=4$

思考与总结

对于有限集合 A 和 B 而言,如果能构造从 A 到 B 的单射,那么就有 $\text{Card}(A)\leqslant \text{Card}(B)$;如果能构造从 A 到 B 的满射,那么就有 $\text{Card}(A)\geqslant \text{Card}(B)$.

第 9 课　抽象函数

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且满足：

①$f(1)=2$；

②$\forall x,y\in\mathbf{R}, f(x+y+1)=f(x-y+1)-f(x)f(y)$；

③$f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递增.

(1) 求 $f(0), f(-1)$ 的值；

(2) 求 $f(x)$ 的零点；

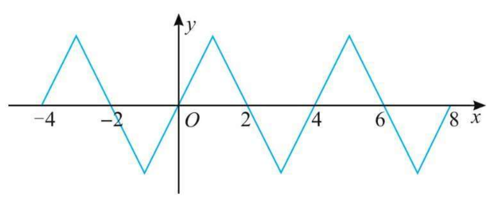
(3) 解不等式 $f(x)>1$.

解　(1) 在 ② 中，令 $x=1$ 得 $f(y+2)=f(2-y)-2f(y)$，令 $y=1$ 得 $f(x+2)=-f(x)$，于是可得

$$f(x+2)=-f(x), f(-x)=-f(x).$$

由此可得 $f(0)=0, f(-1)=-2$.

(2) 由函数 $f(x)$ 为奇函数，且为周期函数，结合 ③ 有函数的草图如下：



因此函数 $f(x)$ 的零点为 $x=2k, k\in\mathbf{Z}$，证明从略.

(3) 令 $y=-x$ 有

$$f(2x+1)+f^2(x)=2,$$

若存在 $m\in(0,1)$，使得 $f(m)=1$，则 $f(2m+1)=1$. 于是由函数的周期性与单调性，有

$$2m+1=m+4k \text{ 或 } 2m+1=2-m+4k,$$

其中 $k\in\mathbf{Z}$. 不难解得 $m=\frac{1}{3}$，经验证有 $f\left(\frac{1}{3}\right)=1$，因此所求不等式的解集为

$$\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\left(\frac{1}{3}+4k, \frac{5}{3}+4k\right), k\in\mathbf{Z}.$$

思考与总结

对于抽象函数问题，一般先通过试探得到一些初步成果（特殊位置的函数值以及奇偶性），然后逐步展开研究. 而对于函数不等式，找出函数值对应的自变量的值往往是解题的关键.