高等数学

GAODENG SHUXUE

主　编○宿彦莉　沈栩竹

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等职业教育“十三五”规划教材

高等数学

主　编　宿彦莉　沈栩竹
副主编　韩冰冰　苏建华

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书结合作者多年的教学实践经验，在分析调研的基础上，合理整合高等数学知识内容．教材结构简单，内容重点是微积分的计算和应用，特别是利用数学软件 MATLAB 辅助计算，极大地提高了学生利用计算机求解数学问题的能力，充分体现了高职数学教学特色．

本书包括一元微积分、命题逻辑基础、概率论基础、线性代数基础等内容．习题包括 A（基础题）、B（提高题），附录增加计算机及财经专业的相关内容，可供在教学中选取．

本书可作为高职高专信息类和财经类高等数学课程的教材，也可作为读者学习高等数学的自学参考书．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/宿彦莉，沈栩竹主编．—北京：北京理工大学出版社，2019.2（2019.3 重印）

ISBN 978-7-5682-6061-9

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①宿…②沈…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 182667 号

出版发行／北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／（010）68914775（总编室）
（010）82562903（教材售后服务热线）
（010）68948351（其他图书服务热线）
网　　址／http：//www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／
开　　本／787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张／7.25　　　　责任编辑／钟　博
字　　数／175 千字　　　　文案编辑／钟　博
版　　次／2019 年 2 月第 1 版　2019 年 3 月第 2 次印刷　　　　责任校对／周瑞红
定　　价／23.90 元　　　　责任印制／施胜娟

图书出现印装质量问题，请拨打售后服务热线，本社负责调换

前　　言

本书的编写理念是以服务为宗旨，根据专业需要，构建模块化课程体系，并且与时俱进，随时完善模块，以解决出现的新问题．本书吸收了教学改革中的成功经验和一线教师的反馈意见，摒弃陈旧内容及复杂运算，附录增加了 MATLAB 数学软件应用和专业应用案例等．本书具有如下特色：

（1）坚持必需够用的原则，倡导素质教育理念．针对高职学生的特点和为专业课服务的需要，围绕课程目标、教学内容、教学方法、教学评价等新的教学体系，提出加强素质教育、体现以人为本、提高数学文化水平的教学理念．

（2）面向专业需求，关注应用能力．课程体系结构的安排、课程的内容深浅的把握，都服从学生所学专业的需求．关注学生在掌握和应用数学知识时所必需的思维活动，包括对专业技术的数学语言的表达与交流，对后续学习的数学知识的理解与使用．

（3）注重数学知识的整合，实现课程的模块化．改变“知识为本位”的传统教育思想为“能力为本位”的职业教育思想，科学整合课程内容为基础模块、提高模块和专业应用模块，探索构建模块化的高等数学课程体系．按照“提出问题—建立模型—解决问题”的体系实施课堂教学，突出高职数学教学特色．

本书包括一元微积分、命题逻辑基础、概率论基础、线性代数基础等内容以及附录．在授课过程中，教师可根据各专业教学的实际情况，遵循必需够用的原则进行取舍．本书共 8 章，第 1 章～第 5 章由宿彦莉老师编写；第 6 章由苏建华老师编写；第 7 章、第 8 章和 MATLAB 数学软件部分由沈栩竹老师编写；经济应用部分由韩冰冰老师编写．附录 1～3 的编写得到了谷洪彬老师和李树波老师的帮助，在此一并表示感谢．全书由宿彦莉老师统稿．

由于编者水平有限，时间也比较仓促，书中难免有不妥之处，我们衷心希望得到专家、同行和读者的批评指正．

编　者

2018 年 3 月

第 1 章 >>>

极限的计算方法

高等数学的主要研究对象是函数，研究问题的基本工具是极限．本章主要讨论极限的计算方法．

1.1　极限的概念

引例 1.1　战国时代的哲学家庄周所著的《庄子·天下篇》中有一句话："一尺之棰，日取其半，万世不竭"．其意为一根长为一尺的棒，每天截去一半，这样的过程可以无限地进行下去．把每天截后剩下部分的长度记录如下（单位为尺）：第一天剩下$\frac{1}{2}$；第二天剩下$\frac{1}{2^2}$；第三天剩下$\frac{1}{2^3}$；…；第 n 天剩下$\frac{1}{2^n}$. 这样就得到一个数列$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，…，$\frac{1}{2^n}$，或写作$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$.

定义 1.1　自变量为正整数的函数（整标函数）$u_n=f(n)(n=1, 2, 3, \cdots)$，其函数值按自变量 n 由小到大排成一列数 u_1，u_2，u_3，…，u_n…，叫作数列，简称 $\{u_n\}$，数列中的每一个数叫作数列的项，第 n 项 u_n 叫作数列的通项或一般项．

定义 1.2　对于数列 u_n，如果当 n 无限增大时，通项 u_n 无限接近某一确定的常数 A，则称数列以 A 为极限或称数列 $\{u_n\}$ 收敛于 A，记为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$ 或 $u_n\to A(n\to\infty)$，若数列 $\{u_n\}$ 没有极限，则称该数列发散．

通过观察数列在 $n\to\infty$时的变化趋势，求得极限．

例 1.1　求下列数列的极限：

(1) $\{u_n\}=\{c\}$(c 为常数)；(2) $\{u_n\}=\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$；

(3) $\{u_n\}=\{(-1)^{n+1}\}$.

解　(1) $\lim\limits_{n\to\infty}=c$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$；(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$不存在．

定义 1.3　设函数 $f(x)$ 当 $|x|$大于某一正数时有定义，如果当$|x|$无限增大时，函数 $f(x)$ 无限接近某一确定的常数 A，则称 A 为 $x\to\infty$时函数 $f(x)$ 的极限，记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$. 若只当 $x\to+\infty(x\to-\infty)$ 时函数 $f(x)$ 趋近于确定的常数 A，记

为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$（$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$）.

定理 1.1 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$

例 1.2 观察函数的图像求函数的极限（图 1－1）.

（1）$\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$；（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$；（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

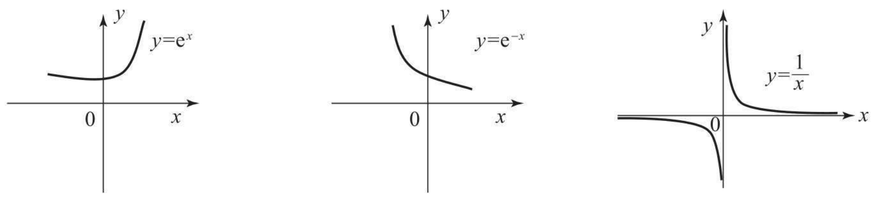

图 1－1

定义 1.4 设 δ 是某个正数，称开区间（$x-\delta$，$x+\delta$）为以 x 为中心，以 δ 为半径的邻域，简称为点 x 的邻域，记为 $N(x,\delta)$，称区间（$x_0-\delta$，x_0）$\cup$（x_0，$x_0+\delta$）为点 x_0 的空心邻域，记为 $N(x_0,\delta)$.

定义 1.5 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一空心邻域 $N(x_0,\delta)$ 内有定义，当自变量 x 在 $N(x_0,\delta)$ 内无限接近 x_0 时相应的函数值无限接近确定的常数 A，则称 A 为 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$（$x\to x_0$）. 若只当 $x\to x_0^+$（$x\to x_0^-$）时函数 $f(x)$ 趋近于确定的常数 A，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 右极限（$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 左极限）.

定理 1.2 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$

例 1.3 设 $f(x)=\begin{cases}-x & x<0\\ 0 & x=0\\ x & x>0\end{cases}$，画出该函数图形并讨论 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 是否存在.

解 由图 1－2 看出，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.

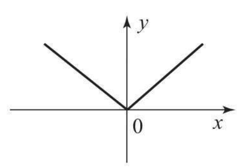

图 1－2

例 1.4 设 $f(x)=\begin{cases}x-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ x+1 & x>0\end{cases}$，画出该函数图形，并讨论 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 是否存在.

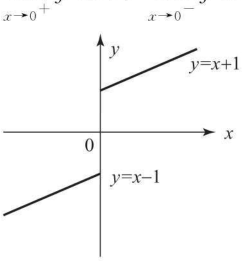

图 1－3

解 函数图形如图 1－3 所示.

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，故 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在.

应用 古印度有一位老人，他临死前对儿子们说："我的遗产只有 19 头牛，你们分了吧！老大分$\dfrac{1}{2}$，老二分$\dfrac{1}{4}$，老三分$\dfrac{1}{5}$."老人说完不久就死了. 既要遵守不准宰牛的教规，又要执行老人的遗嘱，应

该怎样分？3 个儿子都没有想出恰当的办法，他们请教了当时有学问的人，也没有解决．有一天，一位农民牵了一头牛从门前经过，看见了兄弟们唉声叹气，问明原因，思索片刻就说："这个问题很容易解决，把我的牛借给你们，凑成 20 头，老大分$\frac{1}{2}$，应得 10 头，老二分$\frac{1}{4}$，应得 5 头，老三分$\frac{1}{5}$，应得 4 头，余下的一头刚好还给我"．聪明的办法，绝妙的主意，事情就这样圆满地得到了解决．人们曾对这样的分牛方案提出过疑义：老大似乎应得 9.5 头牛，最后怎么分了 10 头牛呢？老二、老三似乎也不应该得那么多头牛．要求学生说明这种分法是正确的．

提示：

19 头牛，老大分$\frac{19}{2}$头，老二分$\frac{19}{4}$头，老三分$\frac{19}{5}$头，$19\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=19\times\frac{19}{20}<19$. 剩 $19\times\left(1-\frac{19}{20}\right)=\frac{19}{20}$（头），继续按照规定比例分，仍剩下$\frac{19}{20}\left(1-\frac{19}{20}\right)=\frac{19}{20^2}$（头）. 再按比例分下去，又剩$\frac{19}{20^3}$头…设老大分到 s_1 头，则 $s_1=\frac{19}{2}+\frac{19}{2}\times\frac{1}{20}+\frac{19}{2}\times\frac{1}{20^2}+\frac{19}{20}\times\frac{1}{20^3}+\cdots=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{19}{2}\left(1-\frac{1}{20^n}\right)}{1-\frac{1}{20}}=\lim\limits_{n\to\infty}10\left(1-\frac{1}{20^n}\right)=10$，说明老大分 10 头牛十分合理．同样，老二、老三所得也合理．

习题 1.1

A.

1. 观察下列函数的变化趋势，写出它们的极限．

(1) $\{u_n\}=\left\{(-1)^n\frac{1}{n}\right\}$；　　(2) $\{u_n\}=\left\{2+\frac{1}{n^2}\right\}$；

(3) $y=2^x(x\to 0)$；　　(4) $y=\frac{2x^2-2}{x-1}(x\to 1)$.

2. 作出下列函数的图像．

(1) $f(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant 0\\ -1 & x<0\end{cases}$；　　(2) $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ x+2 & x>0\end{cases}$.

B.

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x>0\\ x & x\leqslant 0\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2x & 0\leqslant x<1\\ 3-x & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ x+2 & x>0\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

1.2 极限的计算方法

1. 用定义法求极限（见 1.1 节）

2. 用图像法求极限（见 1.1 节）

3. 利用极限的四则运算求极限

设 $\lim f(x)$ 及 $\lim g(x)$ 都存在，则有：

法则 1.1 $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$.

法则 1.2 $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$.

推论 1.1 $\lim[cf(x)]=c\lim f(x)$（c 为常数）.

推论 1.2 $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$.

法则 1.3 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}(\lim g(x)\neq0)$.

说明：(1) 对 $x\to x_0$，$x\to\infty$ 等情形，法则都成立.

(2) 对数列极限法则也成立.

(3) 法则 1.1 和法则 1.2 均可推广至有限个函数的情形.

例 1.5 求 $\lim\limits_{x\to4}(x^2-3x+1)$.

解 $\lim\limits_{x\to4}(x^2-3x+1)=\lim\limits_{x\to4}x^2-\lim\limits_{x\to4}3x+\lim\limits_{x\to4}1=5.$

例 1.6 求 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-2}{x^2-5x+3}$.

解 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-2}{x^2-5x+3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to2}(x^3-2)}{\lim\limits_{x\to2}(x^2-5x+3)}=-2.$

例 1.7 求 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$.

解 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to3}1}{\lim\limits_{x\to3}(x+3)}=\dfrac{1}{6}.$

例 1.8 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2-1}{4x^3-x^2+3}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2-1}{4x^3-x^2+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^3}}{4-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^3}}=\dfrac{3}{4}.$

同理可得$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\infty & m<n\\ \dfrac{a_0}{b_0} & m=n\\ 0 & m>n\end{cases}$ $(a_0\neq 0,\ b_0\neq 0)$.

例 1.9　求$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right)$.

解　$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-(1+x+x^2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2+x}{1+x+x^2}=1$.

4. 利用两个重要极限求极限

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

从表 1－1 可以看出，当 x 无限趋于 0 时，$\dfrac{\sin x}{x}$的值无限趋于 1. 实际运用时经常使用它的变量代换形式，即当$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$ 时$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin[\varphi(x)]}{\varphi(x)}=1$.

表 1－1

x（弧度）	±0.5	±0.1	±0.05	±0.04	±0.03	±0.02	±0.01	…	→0
$\dfrac{\sin x}{x}$	0.958 85	0.998 33	0.999 58	0.999 73	0.999 85	0.999 93	0.999 98	…	→1

例 1.10　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=2\times 1=2$.

例 1.11　求$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=1$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$（e 是无理数，其值为 2.718 28…）

观察表 1－2、表 1－3，设 $u=\dfrac{1}{x}$，则 $x\to\infty$时 $u\to 0$，$\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=\mathrm{e}$.

表 1－2

x	−10	−1 000	−100 000	−1 000 000	…	→−∞

$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2.867 97	2.719 64	2.718 30	2.718 28	…	e

表 1-3

x	10	1 000	100 000	1 000 000	…	$\to+\infty$
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2.593 74	2.716 92	2.718 27	2.718 28	…	e

例 1.12 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$；(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$；(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2}=\mathrm{e}^{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\right]^{\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\left(-\dfrac{1}{x}\right)\right)^{(-x)(-1)}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\left(-\dfrac{1}{x}\right)\right)^{(-x)}\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}$.

5. 利用无穷小求极限

定义 1.6 如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的极限为零，则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时无穷小量，简称无穷小，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$）.

说明：(1) 不要把无穷小量与很小的数混为一谈. 无穷小表达的是量的变化状态，而不是量的大小，零是唯一可作为无穷小的常数.

(2) 当 $x\to x_0^{+}$，$x\to x_0^{-}$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 可得相应的无穷小的定义.

无穷小的性质如下：

性质 1.1 有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

性质 1.2 有限个无穷小的乘积仍是无穷小.

性质 1.3 有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小.

推论 1.3 常数与无穷小的乘积仍是无穷小.

定义 1.7 如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时 $|f(x)|$ 无限增大，则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷大量，简称无穷大，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$）.

函数、极限与无穷小的关系：在自变量的同一变化过程 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）中，具有极限的函数等于它的极限与一个无穷小之和；反之，如果函数可表示为常数与无穷小之和，那么该常数就是这个函数的极限.

例 1.13 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}$；(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$；(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x^2+x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{2x-3}=0$，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}=\infty$.

（2）$x\to\infty$ 时，$|\sin x|\leqslant 1$，故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+(x+1)}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x}\right)=0+0=0$.

定义 1.8　若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\,(c\neq 0)$，则称 β 与 α 是同阶无穷小，特别的，$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$ 时称 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$.

定理 1.3　设 $\alpha\sim\alpha$，$\beta\sim\beta$，且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}=\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$.

常用的等价无穷小如下：

$x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x$.

例 1.14　求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$；（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x^3+3x}$.

解　（1）当 $x\to 0$ 时，$\tan 2x\sim 2x$，$\sin 5x\sim 5x$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}=\dfrac{2x}{5x}=\dfrac{2}{5}$.

（2）当 $x\to 0$ 时，$\sin 3x\sim 3x$，$x^3+3x\sim x^3+3x$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x^3+3x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x^3+3x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{x^2+3}=1.$$

6. 利用函数的连续性求极限

定义 1.8　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一领域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

定理 1.4　设函数 $y=f(u)$ 在 u_0 处连续，函数 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 处连续，且 $u_0=\varphi(x_0)$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处连续.

结论：$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\varphi(x_0)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$.

例 1.15　求 $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}$.

解　$\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}}=\sqrt{\dfrac{1}{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

例 1.16　求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)$.

解　$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)=\ln\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}2\cos 2x=\ln\left[2\cos\left(2\times\dfrac{\pi}{6}\right)\right]=\ln 1=0$.

7. 利用洛必达法则求极限

1）导数（derivative）

引例 1.2 设一质点作变速直线运动，以数轴表示质点运动的直线，在运动过程中，质点在数轴上的位置 s 与时间 t 的函数关系为 $s=s(t)$，如图 1－4 所示求质点在 t_0 时刻的瞬时速度 $v(t_0)$.

解 设在 t_0 时刻质点的位置为 $s(t_0)$，在 $t_0+\Delta t$ 时刻质点的位置为 $s(t_0+\Delta t)$，于是在 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内，质点所经过的路程为 $\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$，则在 Δt 时间的平均速度为 $\bar{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$. 令 $\Delta t\to 0$，$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 的极限若存在，则此极限称为质点在 t_0 时刻的瞬时速度，即 $v(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$，变速直线运动在时刻 t_0 的瞬时速度反映了路程 s 对时刻 t 变化的快慢程度，因此，速度 $v(t_0)$ 又称为路程 $s(t)$ 在时刻 t_0 的变化率.

定义 1.9 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量在 x_0 处有增量 Δx 时，相应的函数有增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x)$，如果 $\Delta x\to 0$ 时极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记作 $y'\big|_{x=x_0}$，即 $y'\big|_{x=x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，也可记作 $f'(x_0)$，$\dfrac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_0}$ 或 $\dfrac{df(x)}{dx}\bigg|_{x=x_0}$. 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有导数，就说函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，如果上式的极限不存在，就说函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处不可导. 由左、右极限可以得到左导数 $f'(x_0-0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，右导数 $f'(x_0+0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

定义 1.10 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内的每一点都可导，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，记作 y'. 即 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$，也可记作 $f'(x)$，$\dfrac{dy}{dx}$ 或 $\dfrac{df(x)}{dx}$.

定理 1.5 $f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'(x_0-0)=f'(x_0+0)$.

例 1.17 利用定义求 $y=x^2$ 在点 $(1,1)$ 处的导数.

解 (1) 求增量：$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\,\Delta x+(\Delta x)^2$.

(2) 算比值：$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2x\,\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$.

(3) 取极限：$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2x$.

(4) $y'\big|_{x=1}=2\times 1=2$.

常用公式如下：

(1) $c'=0$；　(2) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$；

(3) $(\sin x)'=\cos x$；　(4) $(\cos x)'=-\sin x$；

(5) $(\tan x)'=\sec^2 x$；　(6) $(\cot x)'=-\csc^2 x$；

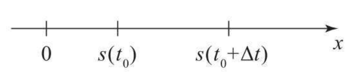

图 1－4

(7) $(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$；　(8) $(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$；

(9) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$；　(10) $(e^x)' = e^x$；

(11) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$；　(12) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$；

(13) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；　(14) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

(15) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$；　(16) $(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

2. 洛必达法则

定理 1.6　设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足条件：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty\right)$；

(2) 在点 x_0 的某邻域内（点 x_0 可除外）$f'(x)$，$g'(x)$ 都存在且 $g'(x) \neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在或为$\infty$，则$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

说明：(1) 当 $x \to x_0$ 改为 $x \to \infty$时定理仍成立.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$仍是“$\dfrac{0}{0}$”$\left(“\dfrac{\infty}{\infty}”\right)$型（$f'(x)$，$g'(x)$ 仍满足条件），则

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$不存在，不表明$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$不存在.

其他类型未定式：(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right)(\infty - \infty)$；(2) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x\,(0 \cdot \infty)$.

例 1.18　求$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$.

解　$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2}{1} = 3$.

例 1.19　求$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{2x} = \dfrac{1}{2}$.

例 1.20　求 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$.

解　$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x}{e^x} = 2 \cdot \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$.

例 1.21　求 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln^2 x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2\ln x}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x}{x}=2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0.$

习题 1.2

A.

求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}(5x^3-1)$；　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x-2}{x^3-1}$；　(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-9}{x-3}$；　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-1}{3x^2-2x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{x}$；　(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{\sin4x}$；　(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$；　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)^x$；

(9) $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}$；　(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$；　(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$；　(12) $\lim\limits_{x\to2}\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-4}}$；

(13) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$；　(14) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin3x}{\tan5x}$；　(15) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}$；　(16) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$.

B.

求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$；　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$；　(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$；　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}x\tan\dfrac{1}{x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$；　(6) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x-1}$；　(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+x^2}}$；　(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sin3x}$；

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{2x}$；　(10) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$；　(11) $\lim\limits_{x\to0}x\cot2x$；

(12) $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

第 2 章 >>>

导数及微分的计算方法

高等数学的主要内容是微积分，微分学是微积分的重要组成部分，导数与微分是微分学的两个基本概念．导数是表示函数相对于自变量的变化快慢程度，微分是自变量作微小变化时，计算相应函数改变量Δy．导数是研究函数的增量与自变量的增量之比的极限．在已有极限的基础上，本章主要讨论导数与微分的计算方法．

2.1 导数的计算方法

1. 定义法（见第 1 章）

2. 公式法（见第 1 章）

3. 函数的和、差、积、商求导法则

设函数 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$ 在点 x 处均可导，则有

$(u\pm v)'=u'\pm v'$；

$(uv)'=u'v+uv'$；

$(cv)'=cv'$（c 为任意常数）；

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq 0)$；

$(u+v-w)'=u'+v'-w'$；

$(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$；

$\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^2}$.

4. 复合函数的求导法则

（1）复合函数的定义．如果对于函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，函数 $\varphi(x)$ 的值全部或部分包含在函数 $f(u)$ 的定义域内，那么 y 通过 u 的联系成为 x 的函数，把 y 叫作 x 的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 叫作中间变量．

例 2.1 试求函数 $y=u^2$ 与 $u=\cos x$ 构成的复合函数．

解 将 $u=\cos x$ 代入 $y=u^2$ 中，即得所求的复合函数 $y=\cos^2 x$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

例 2.2 指出下列复合函数的结构：

（1）$y=(3x+5)^8$；（2）$y=\sqrt{\log_a(\sin x+3^x)}$；（3）$y=5^{\cot\frac{1}{x}}$.

解 （1）$y=u^8$，$u=3x+5$.

（2）$y=\sqrt{u}$，$u=\log_a v$，$v=\sin x+3^x$.

（3）$y=5^u$，$u=\cot v$，$v=\dfrac{1}{x}$.

（2）复合函数的求导，设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可导，$f(u)$ 在对应点 $u=\varphi(x)$ 处可导，则 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x 处可导，且$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

例 2.3 设 $y=(ax+b)^n$，求 y'_x.

解 设 $u=ax+b$，则 $y=u^n$，$y'_x=y'_u\cdot u'_x$. $y'_x=nu^{n-1}\cdot a=na(ax+b)^{n-1}$.

例 2.4 求下列函数的导数：

（1）$y=\sin^2 x$；（2）$y=(1+x^2)^5$；（3）$y=\ln\cos x$.

解 （1）设 $u=\sin x$，$y=u^2$，$y'_x=y'_u\cdot u'_x=2u\cdot\cos x=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$.

（2）设 $u=1+x^2$，$y=u^5$，$y'_x=y'_u\cdot u'_x=5u^4\cdot 2x=10x(1+x^2)^4$.

（3）设 $u=\cos x$，$y=\ln u$. $y'_x=y'_u\cdot u'_x=\dfrac{1}{u}(-\sin x)=-\dfrac{\sin x}{\cos x}=-\tan x$.

5. 隐函数和参数式函数的求导

前面所研究的函数都可表示为 $y=f(x)$ 的形式，其表达方式的特点是，因变量、自变量分列在等号的两边，用这种方式表达的函数称为显函数，但在实际中很多函数是以含有 x，y 的方程 $F(x, y)=0$ 的形式来表示的，这样的函数称为隐函数．下面通过具体的例子说明这种方法．

例 2.5 求由方程 $x^2+y^2=25$ 所确定的隐函数的导数 y'_x.

解 将方程两边同时对 x 求导数，注意到 y 是 x 的函数，y^2 是 x 的复合函数，于是有 $(x^2)'+(y^2)'=(25)'$，即 $2x+2yy'_x=0$ 所以 $y'_x=-\dfrac{x}{y}$.

若参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=f(t)\end{cases}$确定了 y 关于 x 的函数，其中 $\varphi(t)$，$f(t)$ 都可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，t 为参数，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{f'(t)}{\varphi'(t)}.$$

例 2.6 求由参数方程$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t\end{cases}$确定的函数的导数．

解 因为$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-a\sin t$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=b\cos t$，所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\cot t.$$

6. 二阶导数

定义 2.7　函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍是 x 的可导函数时，则称 $y'=f'(x)$ 的导数为函数 $y=f(x)$ 的二阶导数，记作 y''，$f''(x)$，$\frac{d^2y}{dx^2}$或$\frac{d^2f(x)}{dx^2}$.

说明：(1) 函数 $f(x)$ 的 $(n-1)$ 阶导数的导数称为 $f(x)$ 的 n 阶导数.

(2) 二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数．相应的，把 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 称作一阶导数.

7. 高阶导数的运算

由高阶导数的定义可知，求函数的高阶导数只要连续运用求导的方法逐次求导，无须建立新的运算法则.

例 2.8　求下列函数的二阶导数：

(1) $y=2x^2+\ln x$；(2) $y=e^{2x-1}$.

解　(1) $y'=4x+\frac{1}{x}$，$y''=(y')'=4-\frac{1}{x^2}$.

(2) $y'=2e^{2x-1}$，$y''=(y')'=4e^{2x-1}$.

习题 2.1

A.

1. 求下列函数的导数.

(1) $y=2x^3-5x^2+3x-7$；(2) $y=x^2(2+\sqrt{x})$；(3) $y=x^2\cos x$.

2. 求下列复合函数的导数.

(1) $y=(3x^2+1)^{10}$；(2) $y=2\sin 3x$；(3) $y=\lg(1-2x)$.

3. 求下列隐函数的导数 y'_x.

(1) $xy-e^x-e^y=0$；(2) $y=\cos(x+y)$.

4. 求由参数方程$\begin{cases}x=2e^t,\\ y=e^{-t}\end{cases}$所确定的函数的导数.

5. 求下列函数的二阶导数.

(1) $y=2x^2+\ln x$；(2) $y=x\cos x$；(3) 已知：$f(x)=x^2+3x+2$，求 $f''(1)$.

B.

1. 求下列函数的导数.

(1) $y=x\tan x-2\sec x$；(2) $y=2x^2+\ln x$；(3) $y=3x^2-\frac{2}{x^2}+5$.

2. 求下列复合函数的导数.

(1) $y=\sin^2(2x-1)$；(2) $y=\sqrt{\cos x^2}$；(3) $y=\sin 5x\cdot\cos 3x$.

3. 求下列隐函数的导数 y'_x.

(1) $y=x+\frac{1}{2}\ln y$；(2) $x=y+\arctan y$.