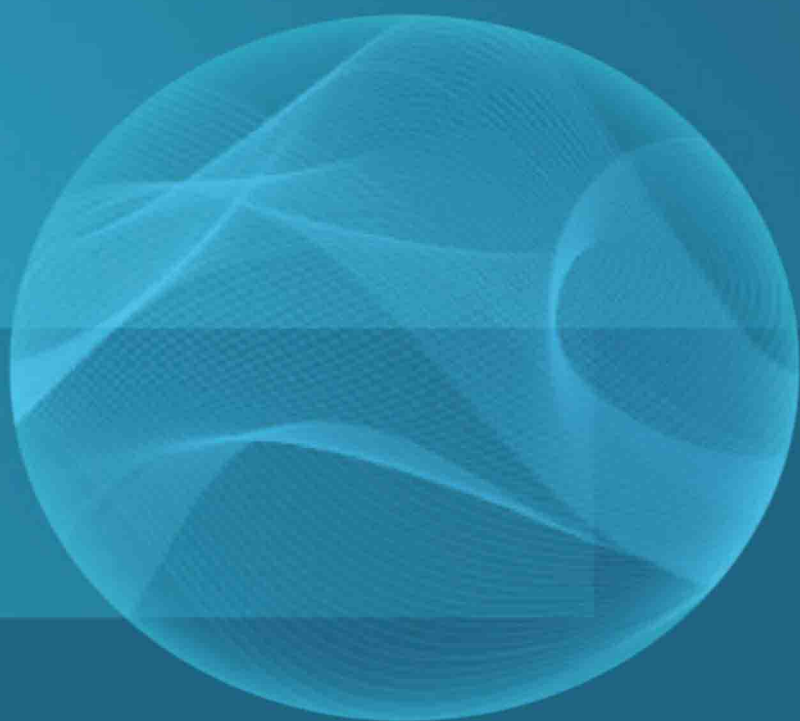


Wei Ji Fen Ji Qi
Ying Yong Jiao Cheng

微积分及其 应用教程

(下册)

主 编 徐苏焦 潘 军
副主编 冉素真 贵竹青



微积分及其应用教程 (下册)

主 编 徐苏焦 潘 军
副主编 冉素真 贵竹青



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分及其应用教程. 下册 / 徐苏焦, 潘军主编.
—杭州: 浙江大学出版社, 2018. 2
ISBN 978-7-308-18000-9
I. ①微… II. ①徐… ②潘… III. ①微积分—高等学校—教材 IV. ①0172
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 030939 号

内容简介

微积分学是现代科学的理论基础, 该课程是培养学生理性思维的重要载体, 是训练学生熟练掌握数学工具的主要手段. 本书以微积分理论为核心内容, 以函数为基本研究对象, 以极限作为贯穿该书理论始终的基本思想.

本书针对应用型本科院校教学需要编写, 编写时注意贯彻如下思想: 在肩负加强对学生数学思想的培养的同时, 更以应用为目的, 重视数学建模思想的应用, 强化了将实际问题转化为数学问题的过程. 全书分上、下两册. 下册的内容包括: 第五章, 多元函数微分学; 第六章, 多元函数积分学; 第七章, 无穷级数.

本书通俗易懂, 例题搭配合理, 可供应用型本科院校、高职高专各专业教学使用, 也可作为成人高校数学教材.

微积分及其应用教程(下册)

徐苏焦 潘 军 主编

责任编辑 王 波

责任校对 陈 宇 刘 郡

封面设计 续设计

出版发行 浙江大学出版社

(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)

(网址: <http://www.zjupress.com>)

排 版 杭州中大图文设计有限公司

印 刷 浙江省邮电印刷股份有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 11.75

字 数 271 千

版 印 次 2018 年 2 月第 1 版 2018 年 2 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-308-18000-9

定 价 38.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行中心联系方式 (0571)88925591; <http://zjdxcbbs.tmall.com>

前 言

进入 21 世纪后,世界各国的高等教育界逐渐形成了一种新的认识,即培养大学生实践能力和创新能力是提高大学生社会职业素养和就业竞争力的重要途径。“应用型本科”是对新型的本科教育和新层次的高职教育相结合的教育模式的探索,是新一轮高等教育发展的历史性选择.应用型本科需要以应用型为办学定位,其发展同时也需要其他各方面协同发展,这当然也包括应用型本科教材这个相当重要的环节.

“微积分”作为应用型本科院校各相关专业学生必修的一门重要的公共基础课程,不仅肩负着为其他后继课程提供强大的运算工具和逻辑基础的职能,还主要承担着培养学生的逻辑推理、抽象思维、分析和解决问题能力的重任,在高素质应用型人才的培养过程中具有不可替代的作用.目前,国内面向本科生的微积分教材种类繁多,但专门面向应用型本科院校的微积分教材为数尚少.事实上,许多应用型本科院校仍在使用国内流行的普通高校的微积分教材,这也为我们加快应用型本科配套教材的建设提供了天然的动力.本书正是在适应新形势发展、夯实应用型本科院校课程教学质量与改革工程的背景下编写的.

浙江海洋大学东海科学技术学院十分重视微积分教材的编写工作,对教材的编写提出了“厚基础、宽应用、分层次”的指导性要求,2014 年组织潘军、徐苏焦、冉素真、贵竹青等教师编写了《微积分及其应用教程》和《微积分及其应用导学》教材.这两本教材在学院内试用一年后,现由浙江大学出版社正式出版.

这两本教材的主要特点是以为经济社会发展培养具有较强的实践能力和创新能力的应用型高级人才服务为宗旨,内容设计注重强化知识基础、降低理论难度、体现分层次教学优化模式、面向学科应用的特点.内容体系设计有弹性,它将微积分相对直观的核心内容安排在本科第一学年进行学习,而将难度相对较大的选学部分(打“*”的内容)放在本科第二学年,通过开展“通识选修课”的形式让学生选学.实践证明,这种分层次教学改革比较适合应用型本科院校的学生求学特征,师生反映良好.

《微积分及其应用教程》分上、下两册,本书为下册,主要内容包括多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数.全书由潘军、徐苏焦主编,冉素真、贵竹青等教师参与了部分编写工作.

借本书出版之机,向关心与支持本书的广大师生与读者表示衷心的感谢!由于水平有限,书中不妥或者错误之处在所难免,恳请广大专家、师生和读者批评指正.

编 者

2017 年 10 月于舟山

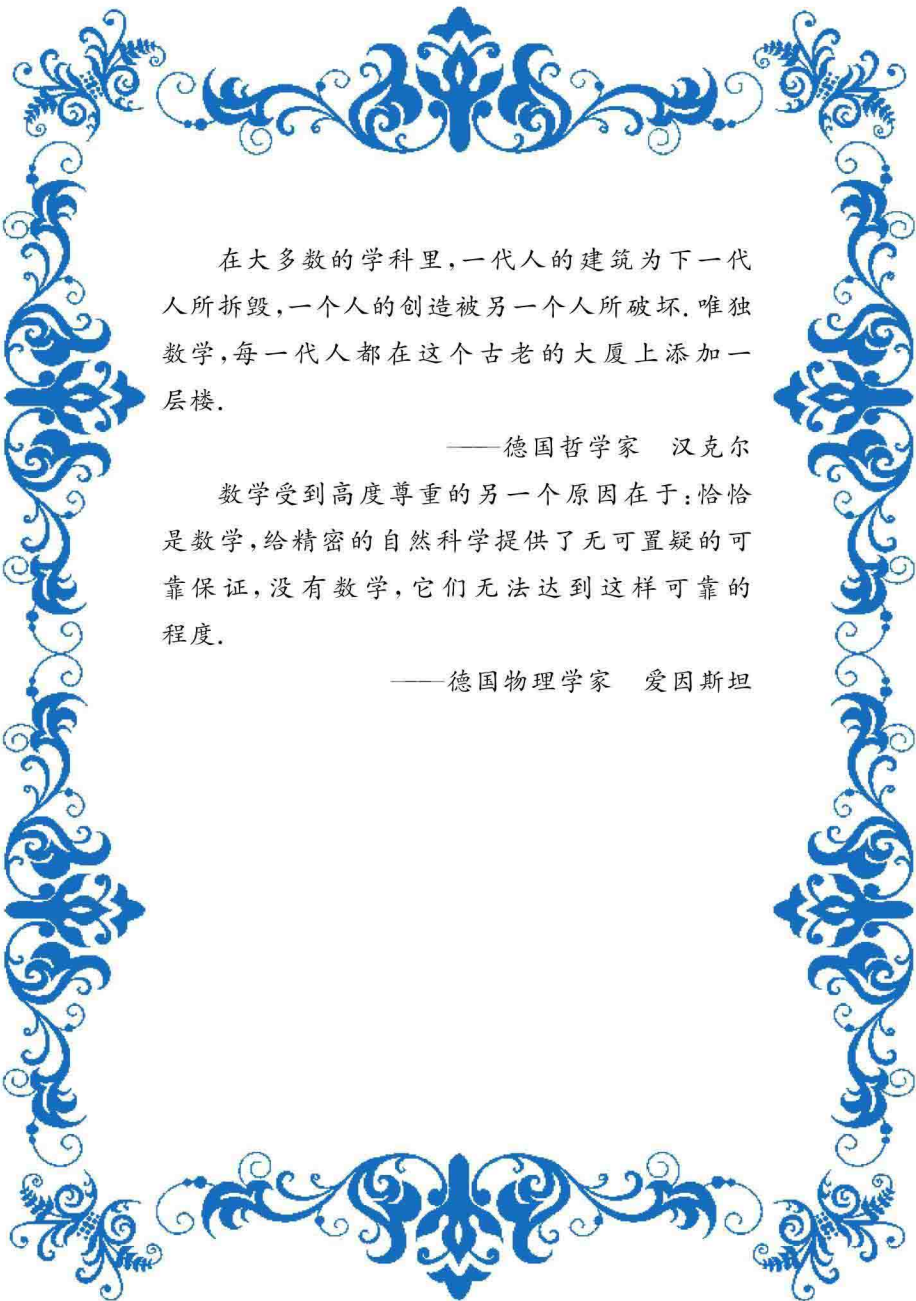
目 录

第 5 章 多元函数微分学	1
5.1 空间解析几何的基本知识	2
5.1.1 空间直角坐标系与空间向量	2
5.1.2 空间曲面与方程	5
5.1.3 空间曲线与方程	8
习 题 5.1	10
5.2 多元函数的极限与连续	11
5.2.1 平面点集	11
5.2.2 二元函数的概念	12
5.2.3 二元函数的极限	14
5.2.4 二元函数的连续性	16
习 题 5.2	18
5.3 偏导数	19
5.3.1 偏导数的概念及其计算	19
5.3.2 偏导数的几何意义及可偏导与连续的关系	22
5.3.3 高阶偏导数	23
习 题 5.3	26
5.4 全微分及其应用	27
5.4.1 全微分的概念	27
5.4.2 二元函数可微的必要条件与充分条件	28
5.4.3 全微分在近似计算中的应用	32
习 题 5.4	33
5.5 多元复合函数的求导法则	34
5.5.1 多元复合函数的求导法则	34
5.5.2 全微分形式的不变性	40
习 题 5.5	41
5.6 隐函数的求导公式	42
5.6.1 由一个方程所确定的隐函数的情形	42
5.6.2 由方程组所确定的隐函数的情形	46

习 题 5.6	49
5.7 多元函数微分学的几何应用	50
5.7.1 空间曲线的切线与法平面	50
5.7.2 曲面的切平面与法线	54
习 题 5.7	57
5.8 方向导数与梯度	58
5.8.1 方向导数	58
5.8.2 梯度	62
习 题 5.8	64
5.9 多元函数的极值及其应用	65
5.9.1 二元函数的极值	65
5.9.2 二元函数最大值与最小值问题	67
5.9.3 多元函数的条件极值与拉格朗日乘数法	69
习 题 5.9	73
复习题 5	74
第 6 章 多元函数积分学	77
6.1 二重积分	78
6.1.1 二重积分的定义与性质	78
6.1.2 直角坐标系下二重积分的计算	80
6.1.3 极坐标下二重积分的计算	83
习 题 6.1	87
6.2 三重积分	88
6.2.1 三重积分的定义与性质	88
6.2.2 直角坐标系下三重积分的计算	88
6.2.3 利用柱面坐标与球面坐标计算三重积分	92
习 题 6.2	95
6.3 曲线积分	96
6.3.1 第一类曲线积分(对弧长的曲线积分)	96
6.3.2 第二类曲线积分(对坐标的曲线积分)	100
习 题 6.3	103
6.4 曲面积分	104
6.4.1 第一类曲面积分(对面积的曲面积分)	104
6.4.2 第二类曲面积分(对坐标的曲面积分)	108
习 题 6.4	112
6.5 格林公式 · 斯托克斯公式 · 高斯公式	113
6.5.1 格林公式	113

6.5.2 斯托克斯公式	117
6.5.3 高斯公式	118
* 6.5.4 场论初步	120
习 题 6.5	123
6.6 多元函数积分学的应用举例	124
6.6.1 几何学上的应用举例	124
6.6.2 物理学上的应用举例	126
习 题 6.6	130
复习题 6	131
 第 7 章 无穷级数	 135
7.1 常数项级数的概念及其性质	136
7.1.1 常数项级数的概念	136
7.1.2 常数项级数的基本性质	138
7.1.3 正项级数的概念及其收敛的充要条件	140
习 题 7.1	141
7.2 常数项级数的审敛法	143
7.2.1 正项级数审敛法	143
7.2.2 交错级数	146
7.2.3 绝对收敛与条件收敛	148
习 题 7.2	150
7.3 幂级数	151
7.3.1 函数项级数的概念	151
7.3.2 幂级数及其敛散性	152
7.3.3 幂级数的运算与性质	156
习 题 7.3	159
7.4 函数展开成幂级数	160
7.4.1 泰勒级数	160
7.4.2 函数展开成幂级数的方法	162
习 题 7.4	167
7.5 傅里叶级数	168
7.5.1 三角级数与三角函数系的正交性	168
7.5.2 傅里叶级数的收敛定理与函数展开成傅里叶级数	170
7.5.3 正弦级数与余弦级数	172
习 题 7.5	175
复习题 7	176

第5章 多元函数微分学



在大多数的学科里,一代人的建筑为下一代人所拆毁,一个人的创造被另一个人所破坏.唯独数学,每一代人都在这个古老的大厦上添加一层楼.

——德国哲学家 汉克尔

数学受到高度尊重的另一个原因在于:恰恰是数学,给精密的自然科学提供了无可置疑的可靠保证,没有数学,它们无法达到这样可靠的程度.

——德国物理学家 爱因斯坦

本章主要讨论多元函数微分学,它是多元函数微积分学的重要组成部分,是一元函数微分法推广到多元函数的结果.具体内容包括空间解析几何的基本知识、多元函数的极限与连续、偏导数、全微分及其运算法则和多元函数微分法的应用.多元函数的微分学是在一元函数微分学的基础上发展起来的,两者虽有许多相似之处,但从一元函数微分学推广到多元函数微分学会产生许多新的问题,而造成这些问题的根本原因是函数中自变量个数由一个增加为多个.一般而言,一元函数与二元函数之间存在一些本质的区别,而二元函数与二元以上的函数之间则鲜有实质上的差别.为简单起见,本章的大部分内容用来讨论二元函数,但其概念、性质与相关问题的研究方法都可以移植到一般的多元函数.

5.1 空间解析几何的基本知识

空间解析几何学是多元函数微积分学的基础组成部分,它通过引入点和坐标的对应关系,把数学研究的两个基本对象“数”和“形”有机地统一起来,使得人们既可以用代数方法研究解决几何问题,也可以用几何方法解决代数问题.

5.1.1 空间直角坐标系与空间向量

取定空间一定点 O 作为原点,过 O 作三条具有相同的单位长度、两两互相垂直且符合右手法则的数轴,分别记为 x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)、 z 轴(竖轴),统称**坐标轴**(见图 5-1).这样的三条坐标轴构成一个空间直角坐标系,称为 $Oxyz$ **坐标系**,点 O 称为**坐标原点**.

如图 5-2 所示,三条坐标轴中的任意两条确定一个平面,称为**坐标面**.三个坐标面把空间分成八个部分,每一部分叫作**卦限**,含有 x 轴、 y 轴及 z 轴正半轴的那个卦限叫作第一卦限,其他第二、第三、第四卦限在 xOy 面的上方,按逆时针方向确定.在 xOy 面下方与第一至第四卦限相对应的是第五至第八卦限.这八个卦限分别用字母 I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII 表示.

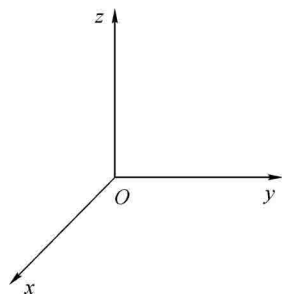


图 5-1

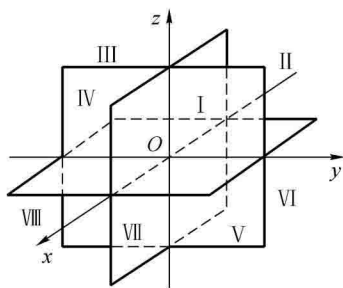


图 5-2

设 a 为空间直角坐标系 $O-xyz$ 中任一向量,不妨假设 a 的起点即为坐标原点 O ,其终点为 $M(x, y, z)$. 过点 M 的垂直于 x 轴、 y 轴、 z 轴的三个平面分别与坐标轴的交点为 A 、 B 、 C ,如图 5-3 所示,则有

$$a = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

假设 $\overrightarrow{OA} = xi$, $\overrightarrow{OB} = yj$, $\overrightarrow{OC} = zk$, 其中 i, j, k 分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正向上的单位向量,则进一步有

$$a = \overrightarrow{OM} = xi + yj + zk.$$

上式称为向量 a 的**坐标分解式**. 显然,空间任意向量 a 与三个有序数 x, y, z 之间存在着一一对应关系. 我们称有序数 x, y, z 为向量 a 的**坐标**,记为 $a = \{x, y, z\}$.

若非零向量 a 与 x 轴、 y 轴、 z 轴正向之间的夹角为 α, β, γ (见图 5-4), 我们称 α, β, γ 为向量 a 的**方向角**, $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 叫作向量 a 的**方向余弦**. 设 $a = \{x, y, z\}$, 则有

$$\cos\alpha = \frac{x}{|a|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|a|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|a|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

不难发现,向量 a 的方向余弦满足关系式

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

且

$$e_a = \frac{a}{|a|} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}.$$

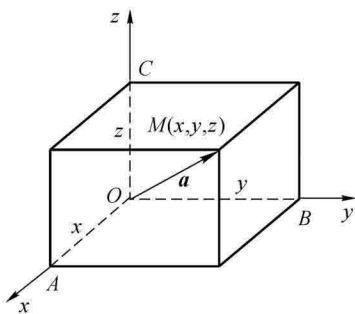


图 5-3

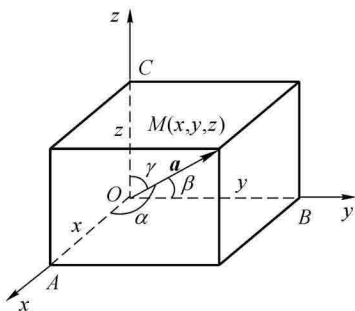


图 5-4

与 a 同方向的单位向量就是以向量 a 的方向余弦为坐标的向量.

例 5.1 已知两点 $M_1(2, 2, \sqrt{2})$ 与 $M_2(1, 3, 0)$, 求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 向量 $\overrightarrow{M_1M_2} = \{1-2, 3-2, 0-\sqrt{2}\} = \{-1, 1, -\sqrt{2}\}$, 故

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2;$$

方向余弦 $\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \cos\beta = \frac{1}{2}, \cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2};$

方向角 $\alpha = \frac{2\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{3}, \gamma = \frac{3\pi}{4}.$

下面,我们简单介绍在许多实际问题中经常遇到的两种向量运算:数量积与向量积.

向量 a 和 b 的模与它们的夹角 $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ 的余弦的乘积,称为两个向量 a 与 b 的**数量**

积,记作 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$,即

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta.$$

向量 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ 的充分必要条件是 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

若向量 $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$, 求出它们的对应坐标乘积之和即得到两向量数量积的坐标表达式为

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

由于 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$, 故两个非零向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的夹角余弦的表达式为

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

例 5.2 已知三点 $M(1, 1, 1)$ 、 $A(2, 2, 1)$ 和 $B(2, 1, 2)$, 求 $\angle AMB$.

解 作向量 $\overrightarrow{MA}$ 及 $\overrightarrow{MB}$, $\angle AMB$ 就是向量 $\overrightarrow{MA}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 的夹角, 因为

$$\overrightarrow{MA} = \{1, 1, 0\}, \overrightarrow{MB} = \{1, 0, 1\},$$

故

$$|\overrightarrow{MA}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}, |\overrightarrow{MB}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

且

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 1 = 1,$$

$$\text{得 } \cos \angle AMB = \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}| |\overrightarrow{MB}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } \angle AMB = \frac{\pi}{3}.$$

两个向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的**向量积**是一个向量, 它的模为 $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$ (其中 θ 是 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的夹角); 它的方向垂直于向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 所决定的平面 (既垂直于 $\mathbf{a}$, 又垂直于 $\mathbf{b}$), 其指向按右手法则从 $\mathbf{a}$ 转向 $\mathbf{b}$ 来确定 (见图 5-5), 向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的向量积记作 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

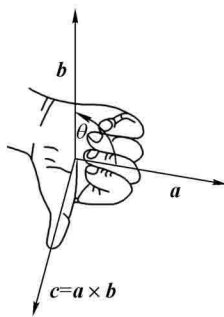


图 5-5

你知道 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 的模的几何意义吗?

向量积满足下列运算律:

(1) 反交换律 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$;

(2) 分配律 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$;

(3) 结合律 $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b})$ (λ 是任意自然数).

这三个运算规律可由向量积定义导出, 证明从略.

若向量 $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$, 我们可以得到这两个向量的向量积的坐标表达式为

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}.$$

上式也可写成如下行列式的形式

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

例 5.3 设 $\mathbf{a} = \{1, 3, -1\}$, $\mathbf{b} = \{2, -1, 3\}$, 计算 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

解 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 8\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}.$

5.1.2 空间曲面与方程

设在空间直角坐标系中曲面 Σ 与方程 $F(x, y, z) = 0$ 满足下述关系:

- (1) 曲面 Σ 上任一点的坐标都满足方程 $F(x, y, z) = 0$;
- (2) 不在曲面 Σ 上的点的坐标都不满足方程 $F(x, y, z) = 0$.

那么, 方程 $F(x, y, z) = 0$ 就称为 **曲面 Σ 的方程**, 而曲面 Σ 称为 **方程 $F(x, y, z) = 0$ 的图形** (见图 5-6).

下面我们主要介绍多元微积分学中常用到的几种空间曲面: 球面、平面和二次曲面.

例 5.4 求球心在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 半径为 R 的球面方程 (见图 5-7).

解 在球面上任意取一点 $M(x, y, z)$, 则有 $|\overrightarrow{M_0M}| = R$. 由两点间的距离公式, 得

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} &= R, \\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 &= R^2. \end{aligned} \quad (5-1)$$

即
方程(5-1)就是球心在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 半径为 R 的球面方程. 特别地, 若球心在坐标原点, 则球面方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

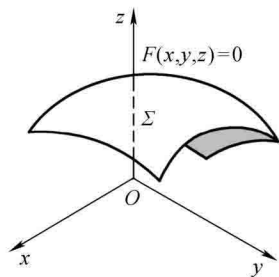


图 5-6

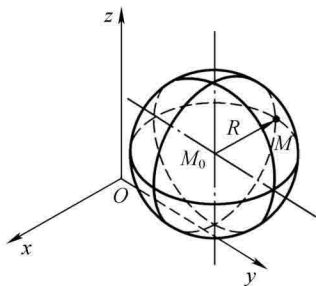


图 5-7

我们知道, 当平面 π 过定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 且已知该平面的一个法向量 $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ 时, 平面 π 的位置就完全确定了. 于是, 设 $M(x, y, z)$ 是平面 π 上的任一点, 因为 $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$, 即 $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$, 所以

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0. \quad (5-2)$$

方程(5-2)为 **平面的点法式方程**. 由于平面的点法式方程(5-2)可以化为如下三元一次方程

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (5-3)$$

其中 $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$. 我们把方程(5-3)称为**平面的一般式方程**.

例 5.5 求过点 $(-1, 0, 3)$, 且以 $\mathbf{n} = \{2, -1, 4\}$ 为法向量的平面的方程.

解 根据平面的点法式方程(5-2), 所求平面的方程为

$$2(x+1) - (y-0) + 4(z-3) = 0,$$

即

$$2x - y + 4z - 10 = 0.$$

例 5.6 已知平面上的三点 $M_1(1, 1, 1)$ 、 $M_2(3, -2, 1)$ 及 $M_3(5, 3, 2)$, 求此平面的方程.

解 取平面的一个法向量

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 16\mathbf{k},$$

根据平面的点法式方程(5-2), 所求平面的方程为

$$-3(x-1) - 2(y-1) + 16(z-1) = 0,$$

即

$$3x + 2y - 16z + 11 = 0.$$

在空间直角坐标系中, 我们把三元二次方程所表示的曲面叫作**二次曲面**. 下面我们介绍几种主要的二次曲面的几何形状.

1. 椭球面

方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0) \quad (5-4)$$

所表示的曲面叫作**椭球面**(见图 5-8), 其中 a, b, c 叫作**椭球面的半轴**.

2. 椭圆锥面

方程

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad (a > 0, b > 0) \quad (5-5)$$

所表示的曲面叫作**椭圆锥面**(见图 5-9).

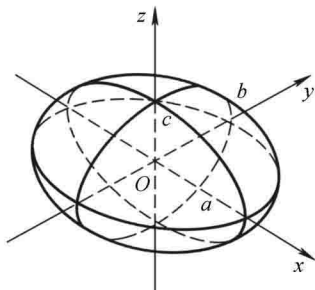


图 5-8

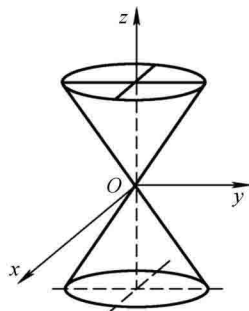


图 5-9

3. 双曲面

方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0) \quad (5-6)$$

所表示的曲面叫作单叶双曲面(见图 5-10).

方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0) \quad (5-7)$$

所表示的曲面叫作双叶双曲面(见图 5-11).

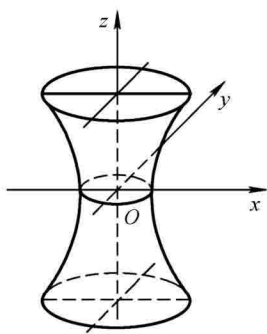


图 5-10

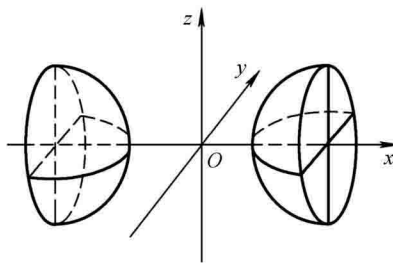


图 5-11

4. 抛物面

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z \quad (p, q \text{ 同号}) \quad (5-8)$$

所表示的曲面叫作椭圆抛物面(见图 5-12).

5. 双曲抛物面

方程

$$-\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z \quad (p, q \text{ 同号}) \quad (5-9)$$

所表示的曲面叫作双曲抛物面或马鞍面(见图 5-13).

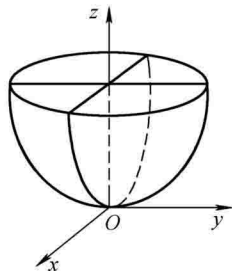


图 5-12

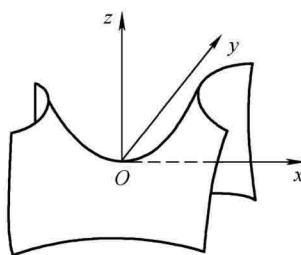


图 5-13

我们可以利用截痕法讨论上述二次曲面的几何形状(参见《微积分及其应用导学》第 5.1 节).

5.1.3 空间曲线与方程

下面我们主要介绍多元微积分学中常用到的几种空间曲线:直线、投影曲线和螺旋线.

我们知道,空间任一直线 L 都可看作两平面的交线(见图 5-14). 设平面 π_1, π_2 的方程分别为 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, 则直线 L 上任一点的坐标应满足方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \quad (5-10)$$

方程组(5-10)叫作**空间直线的一般式方程**.

又若一个非零向量 $s=\{m, n, p\}$ 与一条已知直线平行, 我们把这个向量叫作这条直线的**方向向量**. 设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为直线 l 上的一已知点, 不妨设点 $M(x, y, z)$ 是直线 l 上的任一点, 则向量 $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$ 与直线 l 的方向向量 $s=\{m, n, p\}$ 平行(见图 5-15), 于是有

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \quad (5-11)$$

我们把方程(5-11)叫作**空间直线的对称式或点向式方程**.

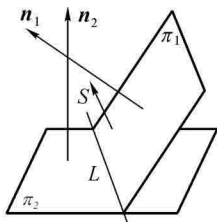


图 5-14

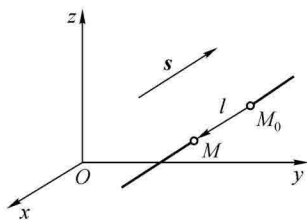


图 5-15

例 5.7 将直线 $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}$ 化为对称式方程.

解 先求出直线上的一点 (x_0, y_0, z_0) . 不妨取 $z_0=0$, 代入直线方程得

$$\begin{cases} x-2y-4=0, \\ 3x+2y-4=0. \end{cases}$$

解得 $x_0=2, y_0=-1$, 即 $(2, -1, 0)$ 是所给直线上的一点.

下面再求直线的方向向量. 由于两平面的交线与这两平面的法向量 $n_1=\{1, -2, 3\}$, $n_2=\{3, 2, -5\}$ 都垂直, 所以可取直线的方向向量为

$$s=n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 2(2i+7j+4k).$$

因此,所给直线的对称式方程为

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}.$$

我们仿照空间直线的一般式方程的原理,空间曲线可看作两个相交曲面的交线. 设

$$F(x, y, z) = 0 \text{ 和 } G(x, y, z) = 0$$

是两个相交曲面的方程,它们相交于曲线 C (见图 5-16), 则点 $M(x, y, z)$ 在曲线 C 上当且仅当点 M 的坐标满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (5-12)$$

因此,曲线可以用上述方程组来表示. 方程组(5-12)叫作**空间曲线 C 的一般式方程**.

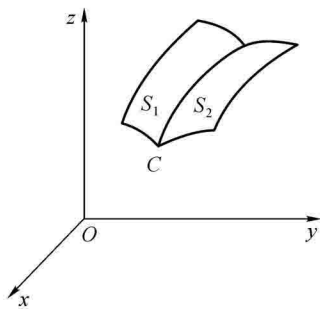


图 5-16

例 5.8 如图 5-17 所示,求半球面 $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z^2 = 3(x^2+y^2)$ 的交线在 xOy 面上的投影曲线的方程.

解 将 $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ 代入 $z^2 = 3(x^2+y^2)$, 消去变量 z , 变形得 $x^2+y^2=1$. 容易看出,这就是交线关于 xOy 面的投影柱面,因此交线在 xOy 面上的投影方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=0. \end{cases}$$

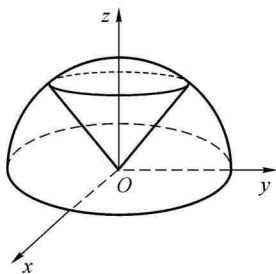


图 5-17

例 5.9 空间一动点 M 在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上以角速度 ω 绕 z 轴旋转,同时又以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升(其中 ω, v 都是常数),则动点 M 的轨迹称为**螺旋线**,试建立其参数方程.

解 取时间 t 为参数. 设当 $t=0$ 时,动点位于 x 轴上的点 $A(a, 0, 0)$ 处. 经过时间 t , 动点由 A 运动到 $M(x, y, z)$, 如图 5-18 所示. 显然,点 M 在 xOy 平面上的投影为 $M'(x, y, 0)$. 由于动点在圆柱面上以角速度 ω 绕 z 轴旋转,所以经过时间 t , $\angle AOM' = \omega t$, 从而

$$x = |\overrightarrow{OM'}| \cos \angle AOM' = a \cos(\omega t),$$

$$y = |\overrightarrow{OM'}| \sin \angle AOM' = a \sin(\omega t).$$

又因动点同时以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升,所以

$$z = |\overrightarrow{MM'}| = vt.$$

因此,螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a \cos(\omega t), \\ y = a \sin(\omega t), \\ z = vt. \end{cases} \quad (5-13)$$

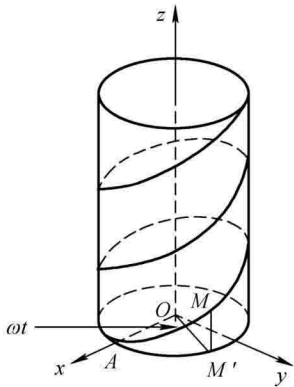


图 5-18

除了时间 t 之外,也可以用其他变量作参数.例如令 $\theta = \omega t$ 为参数,并记 $b = \frac{v}{\omega}$,则螺旋线的参数方程也可写为

$$\begin{cases} x = a \cos \theta, \\ y = a \sin \theta, \\ z = b \theta. \end{cases} \quad (5-14)$$

螺旋线是实践中常用的曲线,如螺栓的螺纹就是这种曲线.

习 题 5.1

1. 试指出下列空间曲面的名称:

(1) $y = 3x^2$;

(2) $x^2 + 3y^2 + z^2 = 2$;

(3) $2x^2 - y^2 - 2z^2 = 1$.

2. 设向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 与 x 轴和 y 轴的夹角分别为 $\frac{\pi}{3}$ 、 $\frac{\pi}{4}$, 且 $|\overrightarrow{P_1P_2}| = 2$, 如果点 P_1 的坐标为 $(1, 0, 3)$, 求点 P_2 的坐标.

3. 方程组 $\begin{cases} z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}, \\ (x-a)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ 表示怎样的曲线?

4. 画出下列曲线在第一卦限内的图形:

(1) $\begin{cases} x = 2, \\ y = 1; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \\ x = y; \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x^2 + z^2 = R^2, \\ x^2 + y^2 = R^2. \end{cases}$

5. 求两平面 $x - y + 2z - 3 = 0$ 和 $2x + y + z - 4 = 0$ 的夹角.

6. 求直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z+3}{1}$ 和 $L_2: \frac{x}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{-1}$ 的夹角.

7. 求直线 $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z}{3}$ 与平面 $2x - y - 2z + 1 = 0$ 的交点.

8. 设平面方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是平面外的一点, 求点 P_0 到该平面的距离 d .



习题 5.1 详解