

转型发展系列教材

高等数学及其应用 (上)

GAODENG SHUXUE JI QI YINGYONG

主 编：胡 成 刘 洋 吴田峰
副主编：殷 勇 冉 菁 李 鑫



山东科技大学出版社

转型发展系列教材

高等数学及其应用

(上)

主 编 胡 成 刘 洋 吴田峰

副主编 殷 勇 冉 菁 李 鑫

西南交通大学出版社

· 成 都 ·

图书在版编目 (C I P) 数据

高等数学及其应用. 上 / 胡成, 刘洋, 吴田峰主编
—成都: 西南交通大学出版社, 2018.9 (2019.5 重印)
转型发展系列教材
ISBN 978-7-5643-6458-8

I. ①高... II. ①胡... ②刘... ③吴... III. ①高等数
学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 222588 号

转型发展系列教材

高等数学及其应用

(上)

主编 胡成 刘洋 吴田峰

责任编辑 孟秀芝

封面设计 严春艳

出版发行 西南交通大学出版社
(四川省成都市金牛区二环路北一段 111 号
西南交通大学创新大厦 21 楼)

邮政编码 610031

发行部电话 028-87600564 028-87600533

网址 <http://www.xnjdcbs.com>

印刷 四川森林印务有限责任公司

成品尺寸 185 mm × 260 mm

印张 13.5

字数 334 千

版次 2018 年 9 月第 1 版

印次 2019 年 5 月第 2 次

定价 35.00 元

书号 ISBN 978-7-5643-6458-8

课件咨询电话: 028-87600533

图书如有印装质量问题 本社负责退换

版权所有 盗版必究 举报电话: 028-87600562

转型发展系列教材编委会

顾 问 蒋葛夫

主 任 汪辉武

执行主编 蔡玉波 陈叶梅 贾志永 王 彦

总 序

教育部、国家发展改革委、财政部《关于引导部分地方普通本科高校向应用型转变的指导意见》指出：

“当前，我国已经建成了世界上最大规模的高等教育体系，为现代化建设作出了巨大贡献。但随着经济发展进入新常态，人才供给与需求关系深刻变化，面对经济结构深刻调整、产业升级加快步伐、社会文化建设不断推进特别是创新驱动发展战略的实施，高等教育结构性矛盾更加突出，同质化倾向严重，毕业生就业难和就业质量低的问题仍未有效缓解，生产服务一线紧缺的应用型、复合型、创新型人才培养机制尚未完全建立，人才培养结构和质量尚不适应经济结构调整和产业升级的要求。”

“贯彻党中央、国务院重大决策，主动适应我国经济发展新常态，主动融入产业转型升级和创新驱动发展，坚持试点引领、示范推动，转变发展理念，增强改革动力，强化评价引导，推动转型发展高校把办学思路真正转到服务地方经济社会发展上来，转到产教融合校企合作上来，转到培养应用型技术技能人才上来，转到增强学生就业创业能力上来，全面提高学校服务区域经济社会发展和创新驱动发展的能力。”

高校转型的核心是人才培养模式，因为应用型人才和学术型人才是有所不同的。应用型技术技能型人才培养模式，就是要建立以提高实践能力为引领的人才培养流程，建立产教融合、协同育人的人才培养模式，实现专业链与产业链、课程内容与职业标准、教学过程与生产过程对接。

应用型技术技能型人才培养模式的实施，必然要求进行相应的课程改革，我们编写的“转型发展系列教材”就是为了适应转型发展的课程改革需要而推出的。

希望教育集团下属的院校，都是以培养应用型技术技能型人才为职责使命的，人才培养目标与国家大力推动的转型发展的要求高度契合。在办学过程中，围绕培养应用型技术技能型人才，教师们在不同的课程教学中进行了卓有成效的探索与实践。为此，我们将经过教学实践检验的、较成熟的讲义陆续整理出版。一来与兄弟院校共同分享这些教改成果，二来希望兄弟院校对于其中的不足之处进行指正。

让我们携起手来，努力增强转型发展的历史使命感，大力培养应用型技术技能型人才，使其成为产业转型升级的“助推器”、促进就业的“稳定器”、人才红利的“催化器”！

汪辉武

2016年6月

前 言

高等数学一直是高等院校最重要的公共基础课之一，它作为大多数专业课程所必要的知识基础，在自然科学和社会科学领域中都具有广泛的应用。

本书是根据独立学院学生的特点，为迎合独立学院学生的知识基础和实用性的要求，由西南交通大学希望学院的骨干教师联合编写的。本书在系统阐述高等数学的基本概念、基本思想和基本方法的基础上，进一步结合独立学院学生的数学基础和专业课需求，本着简单实用的原则，删减了一些理论性较强且较复杂的内容，注重对基本概念的介绍和讲解，省略了许多定理的证明和推导，增加了很多应用性的例题和习题。

本教材是对高等数学与数学实验、数学建模有机结合的教学方式的尝试，推动传统教学方式与多媒体现代教育技术的融合。在每个章节最后都设置了数学实验与数学建模的有关内容，以加强对学生实践能力的培养。本书以 MATLAB 软件为工具，通过操作，学生可以在计算机上完成大部分微积分学的基本运算，并能解决一些简单的数学建模问题。

本书包括高等数学预备知识、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用等内容。其中，第 1 章由赵威、卢道燕老师编写，第 2 章由苗成双、赵婷老师编写，第 3 章由程东平老师编写，第 4 章由殷勇老师编写，第 5 章由李鑫老师编写，第 6 章由冉菁老师编写，第 7 章由郭伦众、陈鑫老师编写。西南交通大学的胡成教授负责统稿整理工作，刘洋老师负责校对工作。

由于编者水平有限，书中难免存在不足之处，敬请专家、同行及读者批评指正。

编 者

2018 年 7 月

目 录

第 1 章 高等数学预备知识	1
1.1 函 数	1
习题 1.1	12
1.2 数学建模及其应用	13
1.3 MATLAB 基础与函数绘图	19
第 2 章 极限与连续	24
2.1 数列的极限	24
习题 2.1	28
2.2 函数的极限	29
习题 2.2	33
2.3 无穷小量与无穷大量	33
习题 2.3	35
2.4 极限四则运算	35
习题 2.4	38
2.5 极限存在准则、两个重要极限	38
习题 2.5	42
2.6 无穷小的比较	43
习题 2.6	45
2.7 函数的连续性与间断点	45
习题 2.7	49
2.8 连续函数的运算与初等函数的连续性	50
习题 2.8	52
2.9 闭区间上连续函数的性质	53

习题 2.9	54
2.10 数学实验：极限的计算	55
第 3 章 导数与微分	57
3.1 导数的概念	57
习题 3.1	63
3.2 求导法则与导数的基本公式	64
习题 3.2	69
3.3 高阶导数	70
习题 3.3	73
3.4 隐函数的导数、由参数方程所确定的函数的导数	73
习题 3.4	75
3.5 函数的微分	76
习题 3.5	80
3.6 数学实验：导数的计算	81
第 4 章 微分中值定理与导数的应用	82
4.1 函数的极值、最值和临界点	82
习题 4.1	86
4.2 微分中值定理	86
习题 4.2	91
4.3 函数的单调性和极值	92
习题 4.3	96
4.4 曲线的凹凸性和函数图形的描绘	97
习题 4.4	104
4.5 未定式和洛必达法则	104
习题 4.5	110
4.6 泰勒公式	111
习题 4.6	117
4.7 平面曲线的曲率	118
习题 4.7	123
4.8 最优化问题	124

习题 4.8	129
4.9 数学实验：导数的应用	130
第 5 章 不定积分	133
5.1 不定积分的概念与性质	133
习题 5.1	138
5.2 换元积分法	139
习题 5.2	147
5.3 分部积分法	148
习题 5.3	151
5.4 有理函数积分法	151
习题 5.4	154
5.5 数学实验：不定积分的计算	155
第 6 章 定积分	157
6.1 定积分的概念与性质	157
习题 6.1	163
6.2 牛顿-莱布尼兹公式	163
习题 6.2	167
6.3 定积分的积分方法	168
习题 6.3	172
6.4 广义积分	173
习题 6.4	176
6.5 数学实验：定积分的计算	176
第 7 章 定积分的应用	178
7.1 定积分的元素法	178
7.2 定积分在几何中的应用	179
习题 7.2	190
7.3 定积分在物理学中的应用	192
习题 7.3	194
7.4 定积分在经济学中的应用	195

习题 7.4.....	197
7.5 微积分在数学建模中的应用.....	198
习题 7.5.....	201
7.6 数学实验：定积分的几何应用.....	201
参考文献.....	204

第 1 章 高等数学预备知识

函数是现代数学最基本的概念之一. 它不仅是初等数学学习的主要内容, 也是高等数学研究的主要对象. 微积分学是研究函数关系的一门数学学科. 极限方法是微积分学的基本方法, 微积分学中的许多概念都是在极限概念的基础上建立的. 连续性是函数的重要性态, 微积分学是以连续函数作为主要研究对象的.

本章在中学数学学习内容的基础上, 进一步增加了函数的有关内容, 为学生的学习微积分打下基础.

1.1 函 数

在客观世界中, 一切事物都在运动变化着. 在某一变化过程中始终保持不变的量称为**常量**, 在这一过程中不断变化, 可以取不同值的量称为**变量**. 变量的变化并不是孤立的, 一些变量之间相互依赖、遵循着一定的规律. 函数就是用来描述这种依赖关系的.

1.1.1 函数及其特性

1. 映射的概念

(1) 映射.

定义 1.1 设 A 、 B 是两个非空集合, 如果存在一个法则 f , 使得对 A 中的每个元素 a , 按法则 f , 在 B 中有唯一确定的元素 b 与之对应, 则称 f 为从 A 到 B 的**映射**, 记作

$$f: A \rightarrow B.$$

其中, b 称为元素 a 在映射 f 下的**象**, 记作 $b = f(a)$; a 称为 b 关于映射 f 的**原象**. 集合 A 中所有元素的象的集合称为映射 f 的**值域**, 记作 $f(A)$.

注: ① 对于 A 中不同的元素, 在 B 中不一定有不同的象.

② B 中每个元素都有原象 (即**满射**), 且集合 A 中不同的元素在集合 B 中都有不同的象 (即**单射**), 则称映射 f 建立了集合 A 和集合 B 之间的一个**一一对应关系**, 也称 f 是 A 到 B 上的**一一映射**.

(2) 复合映射.

定义 1.2 设有两个映射 $g: X \rightarrow Y_1$, $f: Y_2 \rightarrow Z$, 其中 $Y_1 \subset Y_2$, 则由映射 g 和 f 可以定出一个从 X 到 Z 的对应法则, 它将每个 $x \in X$ 映成 $f[g(x)] \in Z$. 显然, 这个对应法则确定了一

个从 X 到 Z 的映射, 这个映射称为映射 g 和 f 构成的**复合映射**, 记作 $f \cdot g$, 即

$$f \cdot g: X \rightarrow Z,$$

$$f \cdot g(x) = f[g(x)], x \in X.$$

注: 由复合映射的定义可知, 映射 g 和 f 构成复合映射的条件是: g 的值域必须包含在 f 的定义域内, 否则不能构成复合映射. 由此可以知道, 映射 g 和 f 的复合是有顺序的. $f \cdot g$ 有意义并不表示 $g \cdot f$ 也有意义; 即使 $f \cdot g$ 与 $g \cdot f$ 都有意义, 复合映射 $f \cdot g$ 与 $g \cdot f$ 也不一定相同.

(3) 逆映射.

定义 1.3 设有映射 $f: A \rightarrow B$, 如果存在映射 $g: B \rightarrow A$, 使得

$$g \cdot f = IA, f \cdot g = IB.$$

其中, IA, IB 分别是 A 与 B 上的**恒等映射**, 则称 g 为 f 的**逆映射**.

逆映射, 用较为通俗但不太严格的语言来表述, 就是:

设有映射 $f: A \rightarrow B$, 若存在映射 $g: B \rightarrow A$, 使得: ① 先执行 f , 再执行 g , 执行的结果是 $gf: A \rightarrow A$, 即 gf 等于 A 上的恒等映射; ② 先执行 g , 再执行 f , 执行的结果是 $fg: B \rightarrow B$, 即 fg 等于 B 上的恒等映射, 则 g 叫作 f 的逆映射.

2. 函数的概念

(1) 函数的定义.

定义 1.4 设数集 $D \subset M$, 则称映射 $f: D \rightarrow M$ 为定义在 D 上的**函数**, 记作

$$y = f(x), x \in D.$$

其中, x 叫作**自变量**, y 叫作**因变量**. x 的取值范围 D 称为**函数的定义域**, 而数集

$$M = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y = f(x)$ 的**值域**. 当 $x = x_0$ 时, 与 x_0 相对应的 y 值称为**函数值**, 记作 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$.

注: ① D, M 均为非空数集.

② 映射 f 只能是一对一映射或多对一映射.

③ 定义域 D 、值域 M 、对应法则 f 统称函数的三要素.

(2) 函数的表示方式.

函数的表示方式一般有: 解析法 (也称公式法)、图像法、表格法.

例 1 某食品厂生产果奶和纯净水, 每天可生产果奶 2000 瓶或纯净水 3000 瓶. 已知生产一瓶果奶的成本为 1.8 元, 可获利润 0.3 元; 生产一瓶纯净水的成本为 0.4 元, 可获利润 0.05 元. 该厂每月最多支出成本 6 万元. 若每月按 30 天计算, 问该食品厂应如何安排生产, 才能使利润最大. 设食品厂每月有 x ($0 \leq x \leq 30$) 天生产果奶, 请写出关于利润的解析式.

解 依题意, 每月有 $(30-x)$ 天生产纯净水. 生产果奶的成本为 $2000x \times 1.8$ 元, 利润为 $2000x \times 0.3$ 元; 生产纯净水的成本为 $3000 \cdot (30-x) \times 0.4$ 元, 利润为 $3000 \cdot (30-x) \times 0.05$ 元. 从而有

总成本 $C(x) = 2000x \times 1.8 + 3000 \cdot (30 - x) \times 0.4 = 2400x + 36\,000$,

总利润 $L(x) = 2000x \times 0.3 + 3000 \cdot (30 - x) \times 0.05 = 450x + 4500$.

例 2 某气象站用自动温度记录仪记下某日气温的变化, 如图 1.1 所示. 这时用图像法表示一昼夜里温度 $T(^{\circ}\text{C})$ 与时间 $t(\text{h})$ 之间的对应关系.

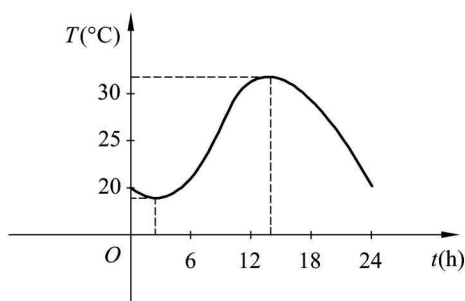


图 1.1

例 3 某商店的运动服销售价格 p (元) 与尺码 S (cm) 之间的关系, 如表 1.1 所示.

表 1.1

尺码 S	85	90	95	100	105	110	115	120
价格 p	120	126	132	138	144	150	156	162

这是用表格法表示的函数关系, 其定义域是 $D = \{85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120\}$.

(3) 函数相等的概念.

给定两个函数, 如果它们的定义域和对应法则相同, 那么它们就是相同的函数, 这与自变量和因变量用什么字母表示无关.

例如, $y = 2\lg x$ 和 $y = \lg x^2$ 不表示同一个函数, 因为 $y = 2\lg x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 而 $y = \lg x^2$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 两者定义域不同.

3. 复合函数

定义 1.5 给定函数 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, 如果函数 $u = \varphi(x)$ 的值域包含在函数 $y = f(u)$ 的定义域内, 则称函数 $y = f[\varphi(x)]$ 是由 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 复合而成的函数, 简称复合函数, 其中 u 叫作中间变量.

复合函数可以由两个函数复合而成, 也可以由多个函数复合而成.

例 4 写出下列函数的复合函数.

(1) $y = \ln u$, $u = x^2 + 1$;

(2) $y = \sqrt{u}$, $u = \sin x + 1$.

解 (1) $y = \ln u = \ln(x^2 + 1)$;

(2) $y = \sqrt{u} = \sqrt{\sin x + 1}$.

注: 不是任意两个函数都可以构成一个复合函数. 例如, $y = \sqrt{u}$ 和 $u = 1 + 2x$ 就不能构成复合函数, 因为 $y = \sqrt{u}$ 的定义域 $D = [0, +\infty)$, $u = 1 + 2x$ 的值域 $\mathbf{R}$, $u = 1 + 2x$ 的值域不包含在 $y = \sqrt{u}$ 的定义域内.

为了研究函数的需要,有时我们要将一个复合函数分解成若干个基本初等函数或简单函数,这里的**简单函数**是指由基本初等函数经有限次四则运算所得的函数.其分解方法是“由外到里,逐层分解”.

例 5 指出下列函数是由哪些基本初等函数或简单函数复合而成的:

$$(1) y = \cos^2 x; \quad (2) y = (x-1)^5; \quad (3) y = 3 \ln(\sin x^2).$$

解 (1) $y = \cos^2 x$ 是由 $y = u^2$, $u = \cos x$ 复合而成的;

(2) $y = (x-1)^5$ 是由 $y = u^5$, $u = x-1$ 复合而成的;

(3) $y = 3 \ln(\tan x^2)$ 是由 $y = 3 \ln u$, $u = \tan v$, $v = x^2$ 复合而成的.

4. 反函数

定义 1.6 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 A , 值域是 B , 且 f 是单射, 则对每一个 $y \in B$ 都存在唯一 $x \in A$, 使得 $y = f(x)$. 定义函数

$$f^{-1}: B \rightarrow A, f^{-1}(y) = x,$$

函数 $x = f^{-1}(y)$ 叫作函数 $y = f(x)$ 的**反函数**. 相对于反函数 $x = f^{-1}(y)$ 来说, 原来的函数 $y = f(x)$ 叫作**直接函数**.

函数 $x = f^{-1}(y)$ 中, 自变量是 y , 因变量是 x . 而习惯上, 函数的自变量用 x 表示, 因变量用 y 表示, 所以反函数通常表示为

$$y = f^{-1}(x).$$

性质:

(1) 直接函数与它的反函数的图像关于直线 $y = x$ 对称.

(2) 函数存在反函数的重要条件是函数的定义域与值域一一映射.

(3) 严格增(减)的函数一定有严格增(减)的反函数(反函数存在定理).

(4) 反函数是相互的, 且具有唯一性.

(5) 直接函数的定义域、值域分别与它的反函数的值域、定义域对应, 且直接函数与它的反函数的对应法则互逆(三反).

(6) 原函数一旦确定, 反函数即确定(三定)[在有反函数的情况下, 即满足(2)].

(7) $y = x$ 的反函数是它本身.

规定: $y = \sin x$ 的反函数为 $y = \arcsin x$; $y = \cos x$ 的反函数为 $y = \arccos x$; $y = \tan x$ 的反函数为 $y = \arctan x$; $y = \cot x$ 的反函数为 $y = \operatorname{arccot} x$; $y = a^x$ 的反函数为 $y = \log_a x$.

例如, $y = 2^x$ 的反函数是 $y = \log_2 x$, $y = e^x$ 的反函数是 $y = \ln x$, $y = x^3$ 的反函数是 $y = \sqrt[3]{x}$.

例 6 求函数 $y = 3x - 2$ 的反函数.

解 $y = 3x - 2$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 值域为 $\mathbf{R}$.

由 $y = 3x - 2$, 解得

$$x = \frac{y+2}{3}$$

将 x, y 互换, 则所求 $y = 3x - 2$ 的反函数是

$$y = \frac{x+2}{3} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

5. 分段函数

有些函数对于定义域内的自变量 x 取不同的值时, 不能用一个统一的解析式表示出来, 而要用两个或两个以上的解析式来表示, 这种在自变量的不同取值范围内用不同的解析式表示的函数, 称为分段函数.

例 7 我国寄到国内 (外埠) 信函的邮资标准是: 首重 100 克内, 每重 20 克 (不足 20 克按 20 克计算) 1.20 元 (续重时情况略). 设信函的重量为 x 克, 邮资为 $f(x)$ 元, 则邮资与信函的重量的函数关系可表示为:

$$f(x) = \begin{cases} 1.2, & 0 < x \leq 20 \\ 2.4, & 20 < x \leq 40 \\ 3.6, & 40 < x \leq 60 \\ 4.8, & 60 < x \leq 80 \\ 6.0, & 80 < x \leq 100 \end{cases}$$

例 8 设函数 $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ 2^x, & x > 0 \end{cases}$, 求函数的定义域和函数值 $f(-1), f(0), f(4)$, 并做出

此函数的图像.

解 易知, 函数的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 则

$$f(-1) = 3 \times (-1) + 1 = -2.$$

同理, $f(0) = 1$, $f(4) = 2^4 = 16$.

此函数的图像如图 1.2 所示.

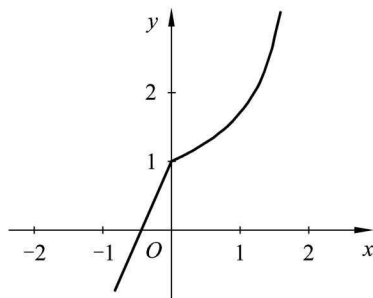


图 1.2

例 9 设符号函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, 其图像如图 1.3 所示.

定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域为 $\{-1, 0, 1\}$.

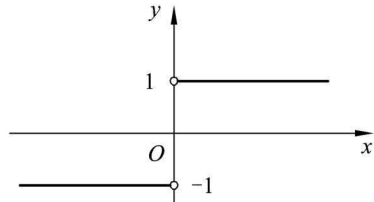


图 1.3

例 10 设取整函数 $y=[x]$, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 其图像如图 1.4 所示. 定义域 $D=(-\infty, +\infty)$, 值域为 $\mathbf{Z}$.

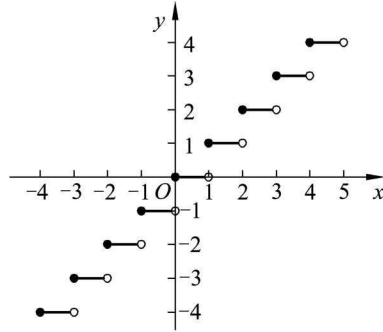


图 1.4

6. 函数的几种特性

(1) 函数的单调性.

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义, 对于任意的 $x_1, x_2 \in (a,b)$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调增加**的; 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调减少**的.

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**. 相应地, 区间 (a,b) 称为函数的**单调区间**.

单调增加函数的图像是随着自变量 x 的增大而上升的曲线; 单调减少函数的图像是随着自变量 x 的增大而下降的曲线.

例如, 函数 $y=x^2$, 其图像如图 1.5 所示. 由图 1.5 可以看出, 它在 $(-\infty, 0)$ 内是单调减少的, 在 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的.

(2) 函数的奇偶性.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 若对任意的 $x \in D$, 都有 $f(-x)=-f(x)$, 则称函数 $y=f(x)$ 为**奇函数**; 若对任意的 $x \in D$, 都有 $f(-x)=f(x)$, 则称函数 $y=f(x)$ 为**偶函数**.

如果函数 $y=f(x)$ 既不是奇函数, 也不是偶函数, 我们则称它为**非奇非偶函数**.

奇函数的图像关于原点对称, 偶函数的图像关于 y 轴对称.

例如, 函数 $f(x)=x^3$ 是奇函数, 函数 $f(x)=1+x^2$ 是偶函数, 函数 $f(x)=0$ 既是奇函数也是偶函数, 函数 $f(x)=1-\frac{1}{x}$ 是非奇非偶函数.

例 11 符号函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ 的图像关于原点对称, 它是奇函数.

例 12 取整函数 $y = [x]$ 是非奇非偶函数.

(3) 函数的有界性.

设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义, 若存在一个正数 M , 使得对于任意的 $x \in (a, b)$, 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内有界; 否则, 称函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内无界. 若存在一个正数 M , 使得对于任意的 $x \in (a, b)$, 有 $f(x) \leq M (f(x) \geq -M)$, 则称函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内有上界 (有下界), 否则称函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内无上界 (无下界).

函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内有界, 从图形直观地看, 其图像介于两条水平直线之间.

例如, 对于任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $|\sin x| \leq 1$, 所以 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界, 其图像如图 1.6 所示. 函数 $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界, 其图像如图 1.7 所示. 对于任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $e^x > 0$, 所以 $y = e^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有下界, 其图像如图 1.8 所示. 函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 内有上界, 无下界, 如图 1.9 所示.

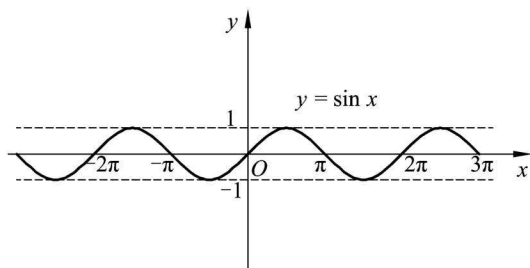


图 1.6

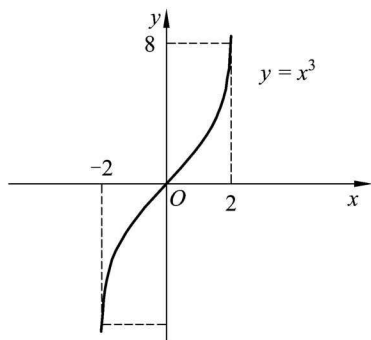


图 1.7

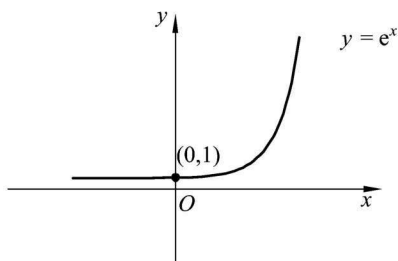


图 1.8

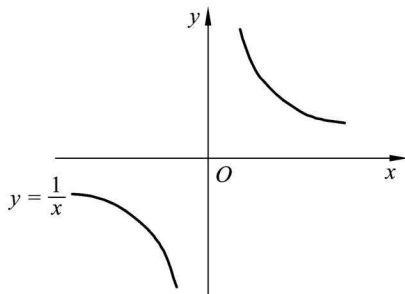


图 1.9

(4) 函数的周期性.

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 若存在 $T > 0$, 使得对于任意的 $x \in D$, 有 $x + T \in D$, 且 $f(x + T) = f(x)$ 恒成立, 则称函数 $y = f(x)$ 为周期函数, 满足这个式子的最小正数 T 称为函数的周期.

例如, $y = \sin x, y = \cos x$ 都是以 2π 为周期的函数; $y = \tan x, y = \cot x$ 都是以 π 为周期的函数.