高观点下
函数导数压轴题的
——系统性解读——

主　编　吕荣春
副主编　张栩瑞　郭爱平　刘成龙　张世冬

GAO GUANDIAN XIA
HANSHU DAOSHU YAZHOUTI DE
XITONGXING JIEDU

电子科技大学出版社

高观点下

函数导数压轴题的

——系统性解读——

主　编　吕荣春

副主编　张栩瑞　郭爱平　刘成龙　张世冬

编　委　李有贵　程裔婷　余小芬　张献忠

熊　健　秦飞龙　周厚军　杨　林

杨小林　林　芳　肖上林　刘奇锋

张晓宇　辜佳川　胡容维　张　波

方　玉　温欣雨　詹学军　秦凤英

廖健宏　彭著奎　李向阳　朱先华

刘代刚　魏龙文

电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高观点下函数导数压轴题的系统性解读/吕荣春主编. —成都:
电子科技大学出版社,2017.9

ISBN 978-7-5647-4914-9

Ⅰ.①解… Ⅱ.①吕… Ⅲ.①中学数学课-高中-题解-
升学参考资料 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 192544 号

高观点下函数导数压轴题的系统性解读

吕荣春 主编

策划编辑 杨仪玮
责任编辑 兰 凯

出版发行 电子科技大学出版社
成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦九楼 邮编 610051
主 页 www.uestcp.com.cn
服务电话 028-83203399
邮购电话 028-83201495

印 刷 四川煤田地质制图印刷厂
成品尺寸 185 mm×260 mm
印 张 26.25
字 数 672 千字
版 次 2017 年 9 月第一版
印 次 2017 年 9 月第一次印刷
书 号 ISBN 978-7-5647-4914-9
定 价 39.80 元

高观点下的思考

1　学科和学生的发展

一、以课标和考试说明为唯一标准的困惑

在新课标下，新教材以选修和必修以满足不同层次学生的需要，考试说明给了大众最需要、最基本的东西，但我们更鼓励学生创新，鼓励学生质疑、批判、挑战和超越权威，老师也应该具有相应的素质，不应该迷信任何一样东西，包括考试说明. 下面以几个高考实例来说明一下：

新课标削弱了反函数，只在73页借助指数函数和对数函数给出了反函数的概念，在76页探究发现研究了指对数函数的图象关于 $y=x$ 对称，考试说明明确指出“了解指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数（$a>0$，且 $a\neq 1$）”，没有提及图象的对称性，“了解”是高考要求中最低层次的要求，要求对知识的含义有初步的、感性的认识，知道这一知识内容是什么，按照一定的程序和步骤照样模仿，并能（或会）在有关的问题中识别和认识它. 下面看看新课标的高考题.

【例 1】（2012·新课标，理，12）设点 P 在曲线 $y=\frac{1}{2}e^x$ 上，点 Q 在曲线 $y=\ln(2x)$ 上，则 $|PQ|$ 最小值为（　　）

A. $1-\ln 2$　　B. $\sqrt{2}(1-\ln 2)$

C. $1+\ln 2$　　D. $\sqrt{2}(1+\ln 2)$

这个题需要会解反函数，才能看出 $y=\frac{1}{2}e^x$ 和 $y=\ln(2x)$ 互为反函数，还要求会对“互为反函数的图象关于 $y=x$ 对称”这一结论的灵活应用.

【例 2】（2009·辽宁，理，12）若 x_1 满足 $2x+2^x=5$，则 x_2 满足 $2x+2\log_2(x-1)=5$，则 $x_1+x_2=$（　　）

A. $\frac{5}{2}$　　B. 3　　C. $\frac{7}{2}$　　D. 4

2009－2014 年的辽宁卷都是全国卷命题专家一些新思想的尝试，第一年尝试就把反函

数放在了非常突出的位置，其难度之大，超过很多年的竞赛题.

那是不是文科就不会出现超纲的情况呢？复合函数的导数，考试说明没有提及过，文科是不要求掌握的.

【例 3】 (2015 · 新课标Ⅱ，文，21)设函数 $f(x)=e^{2x}-a\ln x$.

(1)讨论 $f(x)$的导函数 $f'(x)$的零点的个数；

(2)证明：当 $a>0$ 时 $f(x)\geqslant 2a+a\ln\frac{2}{a}$.

【例 4】 (2016 · 新课标Ⅰ，文，12)若函数 $f(x)=x-\frac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$单调递增，则 a 的取值范围是 ( )

A. $[-1,1]$ B. $\left[-1,\frac{1}{3}\right]$ C. $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$ D. $\left[-1,-\frac{1}{3}\right]$

【例 5】 (2016 · 新课标Ⅲ，文，16)已知 $f(x)$为偶函数，当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=e^{-x-1}-x$，则曲线 $y=f(x)$在点(1,2)处的切线方程式________.

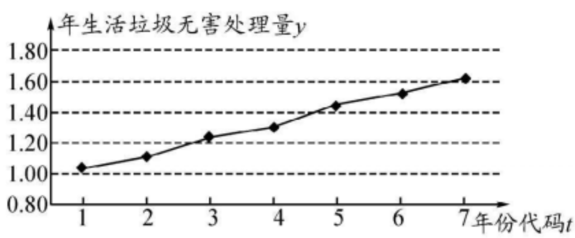
由于学生对复合函数的导数认识不到位，2015 直接丢掉 12 分，居然全国卷在文科高考同一个地方不仅超纲，而且坚持超纲.

这样的例子很多，再举几个例子.

【例 6】 (2012 · 新课标，文)在一组样本数据(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_n,y_n)($n\geqslant 2$，x_1，x_2，…，x_n 不全相等)的散点图中，若所有样本点(x_i,y_i)($i=1,2,\cdots,n$)都在直线 $y=\frac{1}{2}x+1$ 上，则这组样本数据的样本相关系数为 ( )

A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. 1

【例 7】 (2016 · 新课标Ⅲ)下图是我国 2008 年至 2014 年生活垃圾无害化处理量(单位：亿吨)的折线图.



(1)由折线图看出，可用线性回归模型拟合 y 与 t 的关系，请用相关系数加以说明；

(2)建立 y 关于 t 的回归方程(系数精确到 0.01)，预测 2016 年我国生活垃圾无害化处理量.

附注：参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{7} y_i=9.32$，$\sum\limits_{i=1}^{7} t_i y_i=40.17$，$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2}=0.55$，$\sqrt{7}\approx 2.646$.

参考公式：$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$.

回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}t$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为：

$$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2},\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}.$$

相关系数是教材的阅读部分，考试说明指出“会作两个有关联变量的数据的散点图，并利用散点图认识变量间的相关关系”，并没有明确提出求相关系数，考试说明明确提出“了解最小二乘法的思想，能根据给出的线性回归方程系数公式建立线性回归方程”，对于回归直线方程系数公式 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2}$，此题并不能直接求解，需要用到另外一个公式，需要对两个公式进行理解和互化.

【例 8】 (2015 · 新课标Ⅱ，文，16)已知 F 是双曲线 C：$x^2-\dfrac{y^2}{8}=1$ 的右焦点，P 是 C 左支上一点，$A(0,6\sqrt{6})$，当$\triangle APF$ 周长最小时，该三角形的面积为________.

新课标削弱了双曲线，考试说明指出：“了解双曲线的定义、几何图形和标准方程，知道它的简单几何性质”，2015 年文科高考以双曲线作为载体，只需要用到最基本的性质，但整个题是难题.

香港中文大学校长高琨获得了诺贝尔物理学奖，在接受采访的时候以亲身实例告诉我们：“他不信权威”，最后还告诫我们：“你们也不要相信我”. 对于教学也是如此，需要的是反思，而不是用一个标准或权威去要求所有学生，我们要解放最优秀学生的思想，或许就是要破除标准、破除权威，或许这就是全国卷一直会选择在难题上超越考试说明的理由吧.

二、站在学生发展的需要来思考

当我们遇到困惑的时候，我们应该经常去思考我们心目中优秀人才的特点：抓住本质、深入浅出；举一反三、触类旁通；博古通今、学贯中西；观察、质疑、批判和创新.

三、学科整体发展的意义和思想价值立意

数学是什么？不同的数学家有着不同的理解，研究数论的倾向从“分类”的角度来理解数学，研究方程的倾向于从“模型”的角度来理解数学，研究机器证明的吴文俊说“数学的每一个大的发展都是人脑机械化”.

数学是什么，就像爱是什么，每一个亲身经历并深入研究的人都有着自己的理解，我们对数学的理解，就决定了我们的思维方式，作为一个数学爱好者，应该多去了解数学发展以及各个数学家的观点，结合具体的数学学习、强化研究问题的基本方法和思路，强化对知识本质的理解和对应根本方法、基本方法的掌握，形成自己的观点.

四、本书的安排

第一章：借助高考题系统地介绍了函数的两域（定义域、值域）、三式（三种表达方式）、五性（单调性、有界性、奇偶性（对称性）、周期性和凹凸性），介绍导数的应用，把三次函数和绝对值函数作为两个基本函数来介绍，构建一个基本知识结构.

第二章：把运动变化的观点作为一种基本观点，挖掘函数中所蕴含的丰富的数学思想——“分类讨论”“数形结合”“函数与方程”“化归与转化”“特殊与一般”，构建一个思想方法体系，最后用最朴素的思想来解决高考中多变量的压轴题.

第三章：引入与中学相关的大学知识，比如：极限与洛必达法则、邻域与极值点的充要条件、微分中值定理、级数、各种逼近. 挖掘高考的命题背景，展现大学知识的优越性，工具越多、观点越高，问题越透彻、方法越简单.

第四章：构建了常考的压轴题的处理模型，并从解题过程中去思考，介绍了两个常用的技巧“对导数进行处理和对函数进行处理”.

2　什么是高观点

观点越高，问题越简单，观点越高，问题越透彻，那什么是高观点？首先得具备一个良好的知识结构，广泛的知识面；能够用最朴素的思想去推动整个思维过程；结论的记忆有助于我们深度地思考，模型的构建蕴含着丰富的思想；养成从函数的观点和运动变化的观点来看待高中数学.

一、与导数相关的大学知识——让我们站得更高，看得更清

子曰："学而不思则罔，思而不学则殆."仅限于思考，不进一步学习，学习则会停滞不前，因为导数与后续大学知识联系紧密，其几何意义与"微分中值定理"相联系，有的高考题就直接考查"中值定理"的证明；"洛必达法则"的应用能够有效地解决分离常数之后函数最值求解的难点；借助"邻域"可以迅速确定参数讨论的分界点，完全破解一大类高考压轴题；借助初等函数的"泰勒展开式"得到一系列重要不等式，秒杀一系列高考压轴题，而全国卷，不断地重复、重复、再重复地考查.学习这些与之相关的知识，使我们有了更多的工具，我们站得更高，能够更好地理解命题的背景.比如：

【例 1】（2007·全国Ⅰ）设函数 $f(x)=e^x-e^{-x}$.

(1)证明：$f(x)$的导数 $f'(x)\geqslant 2$；

(2)若对所有 $x\geqslant 0$ 都有 $f(x)\geqslant ax$，求 a 的取值范围.

解：(1)$f(x)$的导数 $f'(x)=e^x+e^{-x}$.

$\because e^x+e^{-x}\geqslant 2\sqrt{e^xe^{-x}}=2$，$\therefore f'(x)\geqslant 2$.（当且仅当 $x=0$ 时，等号成立）.

(2)（方法一：分离参数＋洛必达法则）当 $x=0$ 时，$f(x)\geqslant ax$ 成立；当 $x>0$ 时，$a\leqslant \dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$，令 $g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$，则 $g'(x)=\dfrac{(e^x+e^{-x})x-(e^x-e^{-x})}{x^2}$.

（注意到 $g'(0)=0$，可能 $x=0$ 是分界线，则考虑导数 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 恒正）.

令 $h(x)=(e^x+e^{-x})x-(e^x-e^{-x})$，则 $h'(x)=(e^x-e^{-x})x>0,x\in(0,+\infty)$，$\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单增，$\therefore h(x)>h(0)=0,x\in(0,+\infty)$，$\therefore g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单增.

$\because \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x-e^{-x})'}{x'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{1}=2$（洛必达法则），$\therefore a\leqslant 2$.

（方法二：邻域分析＋讨论）令 $g(x)=f(x)-ax$，则 $g'(x)=f'(x)-a=e^x+e^{-x}-a$.

（注意到 $g(0)=0$，要 $g(x)\geqslant 0$ 恒成立，则要求 $g(x)$ 在 $x=0$ 的附近（即邻域）单增，由函数的连续性知 $g'(0)\geqslant 0$，得 $a\leqslant 2$，再说明 $a>2$ 不成立，即说明 $g(x)$ 在 $x=0$ 的附近（即邻域）单减，用零点存在性定理和导函数的单调性说明导函数有唯一根 x_0，从而确定了 $(0,x_0)$ 为函数的单减区间，与 $g(x)\geqslant 0$ 矛盾）

①若 $a\leqslant 2$，当 $x>0$ 时，$g'(x)=e^x+e^{-x}-a>2-a\geqslant 0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

$\therefore x\geqslant 0$ 时，$g(x)\geqslant g(0)$，即 $f(x)\geqslant ax$.

②若 $a>2$，方程 $g'(x)=0$ 的正根为 $x_1=\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$，

此时，若 $x\in(0,x_1)$，则 $g'(x)<0$，$\therefore g(x)$在该区间为减函数.

$\therefore x\in(0,x_1)$时，$g(x)<g(0)=0$，即 $f(x)<ax$，与题设 $f(x)\geqslant ax$ 相矛盾.

综上所述，满足条件的 a 的取值范围是$(-\infty,2]$.

（方法三：背景分析，微分中值定理）分离参数，得 $a\leqslant\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$. 由微分中值定理知，存在 $\xi\in(0,x)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$. 由(1)知 $f'(\xi)\geqslant 2$，$\therefore a\leqslant 2$.

（方法四：级数分析）由 $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots$ 知，$e^{-x}=1-x+\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots$，则 $e^x-e^{-x}=2\left(x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots\right)$. 当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots$是 x 的高阶无穷小，$\therefore a\leqslant 2$.

二、深层次地挖掘数学思想——思维的深刻性帮我们理解得更透彻

高观点不意味着想不到，反而越深刻的道理往往越简单、朴素和自然. 在第二章对函数这部分数学思想进行了深度解读，注重用最朴素的思想去思考，追求通性通法，让整个思维过程显得自然流畅. 对压轴题，我们看到其本质和简单题目一样，把它当着常规题来思考，才能真正突破它. 追求通性通法，并不是要完全排斥技巧，而是要让一些技巧在我们的思维世界里显得朴素且自然.

三、函数观点——统领整个中学数学的学习

我们说函数重要，并不是要做一两个函数的题目，而是用函数的观点去看待很多问题，函数知识和思想统领这个高中数学的学习，如果从高一学到高三，你发现你一直都在学函数，那么这意味着你再用函数的观点看各个章节，你会有完全不一样的感受和认知，下面以两个例题来说明一下.

【例 2】 (2010・重庆)若实数 a,b,c 满足 $2^a+2^b=2^{a+b}$，$2^a+2^b+2^c=2^{a+b+c}$，则 c 的最大值是________.

解析：由 $2^c(2^{a+b}-1)=2^a+2^b$，得 $2^c=\dfrac{2^a+2^b}{2^{a+b}-1}$. 求最值，构建一个$2^c$关于$a,b$的函数

$\because 2^{a+b}=2^a+2^b$，$\therefore 2^c=\dfrac{2^{a+b}}{2^{a+b}-1}$. 从宏观把$2^{a+b}$,$2^a+2^b$视为两个变量，消元

由 $2^{a+b}=2^a+2^b\geqslant 2\sqrt{2^a\times 2^b}=2\sqrt{2^{a+b}}$，得 $2^{a+b}\geqslant 4$. 令 $t=2^{a+b}$，$t\geqslant 4$， 求出定义域

则 $2^c=\dfrac{t}{t-1}=1+\dfrac{1}{t-1}$单减. $\therefore$当 $t=4$ 时，达到最大值$(2^c)_{\max}=\dfrac{4}{3}$，即 $c_{\max}=\log_2\dfrac{4}{3}$.

答案：$\log_2\dfrac{4}{3}$

【例 3】 已知椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$上任意一点$A$,若$P$满足$\overrightarrow{AP}=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}$,且$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=72$,则$\overrightarrow{OP}$在$x$轴上投影的最大值为________.

解析:由$\overrightarrow{AP}=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}$知,$\overrightarrow{OP}=\mu\overrightarrow{OA}$,且$O,P,A$三点共线,$\therefore\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OP}|\cdot|\overrightarrow{OA}|=72$,$\therefore|\overrightarrow{OP}|=\frac{72}{|\overrightarrow{OA}|}$.

此时可以把投影看成关于$|\overrightarrow{OA}|$和$\cos\theta$两个变量的函数,但它们随着A点的变化而变化,所以构建关于点坐$A(x,y)$坐标的函数

$\overrightarrow{OP}$在x轴上投影为$|\overrightarrow{OP}|\cos\theta=\frac{72}{|\overrightarrow{OA}|}\cos\theta=\frac{72}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{72|x|}{x^2+y^2}$.

(出现了两个变量,用点在椭圆上消元)

$$=\frac{72|x|}{x^2+9-\frac{9}{25}x^2}=\frac{72|x|}{\frac{16}{25}x^2+9}=\frac{72}{\frac{16}{25}|x|+\frac{9}{|x|}}\leqslant 15.$$ **(根据函数类型选择相应的方法求最值)**

早在100多年前,F·克莱因就提出中学要"以函数观念和几何直观作为数学教学的核心"的观点."函数观念"(可以进一步具体化为"函数概念及其反映的数学思想方法")作为整个高中数学的核心,在整套高中教材的组织中发挥联系纽带的作用.从函数内容的具体组织看,各国教材都不集中安排函数内容,而是与其他领域的知识相互穿插.其中最突出的是美国教材,每一章都以穿插学习的方式,把与当前学习的具体函数有直接联系的各种知识都穿插在一起.例如"线性函数与数列"一章,以"线性关系"为纽带,将代数、几何和统计领域中的直线方程、等差数列、回归直线和阶梯函数等相关概念融会贯通,而联系它们的核心概念就是线性函数,为使"联系"更加自然,美国教材以"解决问题"为指导思想,围绕着解决实际问题的需要,通过建立不同类型的函数模型,引出相关概念,让学生"了解直线、几何和统计之间联系".例如,通过建立常数增长(或下降)情境的函数模型,导出直线方程的斜截式及其图象;通过建立描述两组相关联数据关系的函数模型,导出回归直线的定义等,从教材呈现来看,与函数概念的联系表现出"多向性".例如,我国教材专设一节"函数与方程";日本教材在介绍了具体函数(如三角函数、有理函数等)概念和性质后,通过函数图象研究相应的方程和不等式;法国教材将算法和函数密切结合,如函数定义一节中的"能力12　用一种算法定义一个函数",要求学生从算法到函数、从函数到算法进行转换,意在促进学生建立算法和函数间的联系,从而既能从不同角度理解这两个数学对象,又能在一定的情境中恰当地选择数学对象解决问题.

四、运动变化的观点

在哲学中,运动是绝对的,这就意味着运动变化的观点是看问题的一种基本观点,在生活中,我们从发展的眼光来看问题,体现的就是运动变化的观点.回到数学中,如果我们从运动变化的观点来理解数学,发现很多知识特别的清楚.

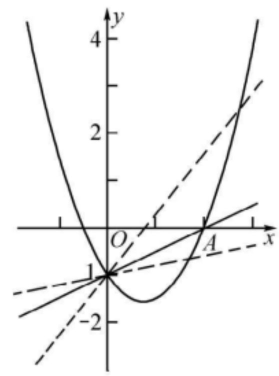
【例 4】 (2012·浙江)设$a\in\mathbf{R}$,若$x>0$时均有$[(a-1)x-1](x^2-ax-1)\geqslant 0$,则$a$取值的集合为________.

解析:$[(a-1)x-1](x^2-ax-1)\geqslant 0$左边是两个函数. 宏观看结构

令 $f(x)=(a-1)x-1, g(x)=x^2-ax-1$，把握运动中的不变性，两个函数的联系

这两个函数都在变，但它们都有不变的地方，即恒过点$(0,-1)$.

$[(a-1)x-1](x^2-ax-1)\geqslant 0$ 几何意义：两图象同时在 x 轴的上方或下方. 如果直线过 $g(x)=x^2-ax-1$ 与 x 轴的交点时，恰好满足. 特殊位置切入



让参数 a 取不同的值，一次函数 $f(x)=(a-1)x-1$ 绕着$(0,-1)$，往上往下转动，如右图都不满足，把参数的变化化为图象的运动

$\therefore (a-1)x-1=0, x^2-ax-1=0$ 有公共解，即$(a-1)x-1=0$ 的根 $x=\dfrac{1}{a-1}$是方程 $x^2-ax-1=0$ 的根，即 $a=\dfrac{3}{2}$.

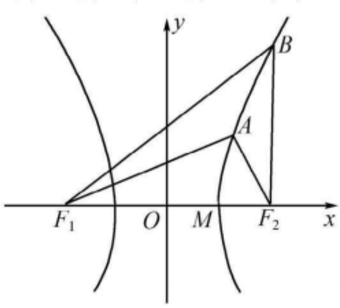
答案：$a=\dfrac{3}{2}$

点评：回顾这个过程，先从特殊切入，用运动变化的观点，充分借助几何直观，就非常顺利地推广到一般情况，即：特殊(切入点)$\xrightarrow[\text{几何直观}]{\text{运动变化的观点}}$一般.

在这个复杂问题中，数形结合、特殊到一般的思想，以及运动变化的观点都被充分的运用起来了. 在面对具体的问题时，关键不在于我们具不具备这些思想，而在于如何让它们合理地组合，有序地展开. 基于这个题，我们从四个维度来解读方法：一种方法要落实下去，必然要有一个切入点——特殊情况；一种方法要能够深入下去，必须有一个顺序——特殊到一般；学生的难点在于如何由特殊推广到一般，一种方法的背后一定有更为深刻的、本质的思想或观点——运动变化的观点；方法是从出发点到目的的一条具体的路径——几何直观.

【例5】 (2016·浙江，文)设双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2. 若点 P 在双曲线上，且$\triangle F_1PF_2$ 为锐角三角形，则$|PF_1|+|PF_2|$的取值范围是________.

解析：如图，点 P 从点 M 出发，在向上运动的过程中，$|PF_1|+|PF_2|$在逐渐增大，当 P 在点 A 的位置时，$\triangle F_1PF_2$ 为直角三角形，此时可求得$|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{7}$；运动到点 B 时，$\triangle F_1PF_2$ 为直角三角形，求得$|PF_1|+|PF_2|=8$，故$|PF_1|+|PF_2|$的范围为$(2\sqrt{7},8)$.



答案：$(2\sqrt{7},8)$

五、结论的记忆

结论能帮助我们更加深入地思考，需要牢记一些重要的函数不等式，借助这些不等式进行放缩，能够高效地解决一些高难度的函数不等式问题.（本书总结了一系列结论，并要求学生记住一些常考函数的单调性、图象和最值）

【例 6】（2013 · 新课标Ⅱ）已知函数 $f(x)=e^x-\ln(x+m)$.

(1)设 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 m，并讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)当 $m\leqslant 2$ 时，证明 $f(x)>0$

解：(1)略

(2)由泰勒级数展开式我们可以得到不等式

$e^x\geqslant x+1$，$\ln(x+m)\leqslant x+m-1$，并且容易证明，

$\therefore f(x)=e^x-\ln(x+m)\geqslant x+1-(x+m-1)=2-m$.

$\because m\leqslant 2$，$\therefore f(x)\geqslant 0$.

$\because e^x\geqslant x+1$，等号在 $x=0$ 时取到，

$\therefore \ln(x+m)\leqslant x+m-1$，等号在 $x=1-m\leqslant -1$ 处取到，$\therefore f(x)>0$.

六、模型的构建

我们把解决一类问题的思维过程细化为解题的步骤，这个程序化的步骤叫算法，我们视为一个模型. 构建一些常见问题的处理的模型，有利于我们高效地解题. 比如借助对称性构建函数处理极值点的偏移.

【例 7】（2010 · 天津）已知函数 $f(x)=xe^{-x}(x\in\mathbf{R})$.

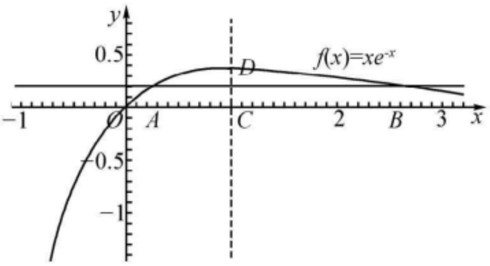
(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值；

(2)若 $y=g(x)$ 的图象与 $y=f(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称，证明：当 $x>1$ 时，$f(x)>g(x)$；

(3)如果 $x_1\neq x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，证明 $x_1+x_2>2$.

分析：很多资料和文章把第(3)问命名为“极值点”的偏移，以二次函数为例.

$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 在极值点 $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ 两边变化的快慢一样. 若函数的两个零点分别为 x_1，x_2，极值点 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，则认为极值点没有偏移，但对于更多一般的函数，比如 $f(x)=xe^{-x}$，由下图知在极值点两边变化的快慢不一样，假设 $f(x)=xe^{-x}=k$ 的两根分别为 x_1，x_2，则 $x_0\neq\dfrac{x_1+x_2}{2}$，则认为极值点发生了偏移.



解:(1)$f(x)$在$(-\infty,1)$内是增函数,在$(1,+\infty)$内是减函数.函数$f(x)$在$x=1$处取得极大值.(略)

(2)由题意可知,$g(x)=f(2-x)$,$\therefore g(x)=(2-x)e^{x-2}$.

令$F(x)=f(x)-g(x)$,即$F(x)=xe^{-x}+(x-2)e^{x-2}$,$\therefore F'(x)=(x-1)(e^{2x-2}-1)e^{-x}$.

当$x>1$时,$2x-2>0$,$\therefore e^{2x-2}-1>0$.又$\because e^{-x}>0$,$\therefore F'(x)>0$,从而函数$F(x)$在$[1,+\infty)$上是增函数.

又$F(1)=e^{-1}-e^{-1}=0$,$\therefore x>1$时,有$F(x)>F(1)=0$,即$f(x)>g(x)$.

(3)先从最朴素的思想来理解:

要证$x_1+x_2>2\Leftrightarrow x_1>2-x_2$.

把相同的变量放到一边

不妨假设$x_1<1,x_2>1$,则$x_1,2-x_2<1$.

利用函数单调性比大不的关键在于:转化到同一个单调区间

由$f(x)$在$(-\infty,1)$内是增函数知,只需证明$f(x_1)>f(2-x_2)$.

$\because f(x_1)=f(x_2)$,$\therefore$证明$f(x_2)>f(2-x_2)$即可.

把两个变量化为同一个变量

由(2)可知,$f(x_2)>g(x_2)$,$g(x_2)=f(2-x_2)$,$\therefore f(x_2)>f(2-x_2)$得证.

我们把上述的解题过程细化为如下解题的步骤:

第一:求出函数$f(x)$的极值点x_0,构造函数$F(x)=f(x)-f(2x_0-x)$;或$F(x)=f(x_0+x)-f(x_0-x)$;

第二:求导,确定$F(x)$的单调区间;

第三:结合$F(0)=0$,判断$F(x)$的符号,从而确定$f(2x_0-x)$,$f(x)$的大小关系;

第四:结合$f(x)$的单调性,得到$x_1>2x_0-x_2$($x_1<2x_0-x_2$),即$\dfrac{x_1+x_2}{2}>x_0$,$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}<x_0\right)$.

下面我们以这种解题模式来解决2016全国卷的高考题.

【例8】 (2016·全国Ⅲ)已知函数$f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$有两个零点.

(1)求a的取值范围;

(2)设x_1,x_2是$f(x)$的两个零点,证明:$x_1+x_2<2$.

解:(1)略.

(2)不妨设$x_1<x_2$,则$x_1\in(-\infty,1)$,$x_2\in(1,+\infty)$,$2-x_2\in(-\infty,1)$,$f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递减,$\therefore x_1+x_2<2\Leftrightarrow f(x_1)>f(2-x_2)$,即$f(2-x_2)<0$.

$\because f(2-x_2)=-x_2e^{2-x_2}+a(x_2-1)^2$,$f(x_2)=(x_2-2)e^{x_2}+a(x_2-1)^2=0$,

$\therefore f(2-x_2)=-x_2e^{2-x_2}-(x_2-2)e^{x_2}$.

设$g(x)=-xe^{2-x}-(x-2)e^x$,则$g'(x)=(x-1)(e^{2-x}-e^x)$.

$\therefore$当$x>1$时,$g'(x)<0$,而$g(1)=0$,$\therefore$当$x>1$时,$g(x)<0$.

$\therefore g(x_2)=f(2-x_2)<0$,$\therefore x_1+x_2<2$.

七、系统和结构

“整体的功能远远大于部分功能的和”，一个完整的知识体系有利于学生从联系的观点来思考问题，有利于学生向更多的方向发散性的思考，有利于学生站在更高的角度来思考问题，构建一个牢固的知识体系既是学科发展的需要，又是学生思维和能力发展的需要.

宏观把握题目的结构，心中有一个良好的知识结构和对常见问题的一般处理方式，是我们努力的方向，此书在第一章系统地阐述了函数的“两域三式五性”，以构建一个良好的知识体系. 下面再以一个题来说明一下.

【例 9】 (2012 · 四川，文)设函数 $f(x)=(x-3)^3+x-1$，$\{a_n\}$是公差不为 0 的等差数列，$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_7)=14$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_7=$ (　　)

A. 0　　B. 7　　C. 14　　D. 21

高观点 1：系统、结构：根据函数值之和 $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_7)=14$ 求自变量之和 $a_1+a_2+\cdots+a_7$，很自然会去考虑函数的性质，不等式常常考查单调性，而等式常常考查对称性，从而尝试去寻找 $f(x)=(x-3)^3+x-1$ 对称中心.

高观点 2：大学知识和思想：求对称中心，此函数 $f(x)=(x-3)^3+x-1$ 可以视为由 $y=(x-3)^3$ 和 $y=x-1$ 构成，对称中心不一样，可以考虑对函数进行平移. 比如 $f(x)-2=(x-3)^3+(x-3)$可以视为把 $y=x^3+x$ 图象向右平移 3 个单位，则对称中心为(3,0)；但这是三次函数，根据相关的大学知识知道：其对称中心就是函数的“拐点”，即 $f''(x)=0$，从而迅速求得对称中心，高考命题的核心成员是大学教授，高考也必须考查学生的后续学习能力，导数这一部分其几何意义与微分中值定理相联系、求极限考虑洛必达法则.（在第一章，以历年高考压轴题为例，向学生展示了如何借助大学知识迅速突破的）

高观点 3：思维朴素且自然：由等差数列性质知 $a_1+a_2+\cdots+a_7=7a_4$，目标是求 a_4，所以利用性质把所有的 $a_1,a_2,\cdots,a_7$ 变为 a_4，学好代数变形，不在变本身，而在于把握代数变形的方向，在于用最朴素的思想推动整个代数变形.

$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_7)-14=(a_1-3)^3+a_1-1+\cdots+(a_7-3)^3+a_7-1-14$

$=[(a_1-3)^3+\cdots+(a_7-3)^3]+(a_1-1+\cdots+a_7-1-14)$

$=[(a_1-3)^3+(a_7-3)^3]+[(a_2-3)^3+(a_6-3)^3]+[(a_3-3)^3+(a_5-3)^3]+(a_4-3)^3+(7a_4-21)$

$=[(a_1-3)^3+(a_7-3)^3]+[(a_2-3)^3+(a_6-3)^3]+[(a_3-3)^3+(a_5-3)^3]+(a_4-3)^3+7(a_4-3)$

$=[(a_1-3)+(a_7-3)]A+[(a_2-3)+(a_6-3)]B+[(a_3-3)+(a_5-3)]C+(a_4-3)^3+7(a_4-3)$

$=2(a_4-3)A+2(a_4-3)B+2(a_4-3)C+(a_4-3)^3+7(a_4-3)$

$=(a_4-3)[2A+2B+2C+(a_4-3)^2+7]=0$，

$\because A=(a_1-3)^2-(a_1-3)(a_7-3)+(a_7-3)^2>0$，

同理 $B,C>0$，$\therefore a_4=3$，$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_7=21$.

3　秒杀秒做秒想全国卷高考压轴题

对于高考压轴题来说，我们望而生畏，而在深刻解读全国卷，借助高观点，借助模型的构建，秒杀一系列高考压轴题，利用最朴素的思想去思考，高考压轴题的解答朴素且自然，从而把高考压轴题当着常规题目来做，从而真正突破高考压轴题，下面以 2016 年全国卷高考题展开.

【例 1】 (2016・全国Ⅰ)已知函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$ 有两个零点.

(1)求 a 的取值范围；

(2)设 x_1,x_2 是 $f(x)$的两个零点，证明：$x_1+x_2<2$.

解读：(1)是文科的压轴题，分类讨论或分离参数都很容易.(2)模型的构建和应用中的极值点偏移题目.极值点偏移首先出现在 2010 年天津高考，2011 年辽宁也考查过，2007 年开始的海南、宁夏和 2009 年到 2014 年的辽宁也是全国命题，其中辽宁卷在不断地尝试新的考法，全国卷在 2016 年重复了 2011 年辽宁的考法.

【例 2】 (2011・辽宁)已知函数 $f(x)=\ln x-ax^2+(2-a)x$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性；

(2)设 $a>0$，证明：当 $0<x<\frac{1}{a}$时，$f\left(\frac{1}{a}+x\right)>f\left(\frac{1}{a}-x\right)$；

(3)若函数 $y=f(x)$的图象与 x 轴交于 A、B 两点，线段 AB 中点的横坐标为 x_0，证明：$f'(x_0)<0$.

极值点的偏移和指对数平均不等式是相通的，对数平均不等式：对任意的 $a>b>0$，有 $\sqrt{ab}<\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b}{2}$.

【例 3】 (2016・全国Ⅲ，文)设函数 $f(x)=\ln x-x+1$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性；

(2)证明当 $x\in(1,+\infty)$时，$1<\frac{x-1}{\ln x}<x$；

(3)设 $c>1$，证明当 $x\in(0,1)$时，$1+(c-1)x>c^x$.

解读：第(2)问，$1<\frac{x-1}{\ln x}<x\Leftrightarrow 1<\frac{x-1}{\ln x-\ln 1}<x$，这是比对数平均不等式更弱的一个不等式：$1<\sqrt{x\cdot 1}<\frac{x-1}{\ln x-\ln 1}<\frac{x+1}{2}<x$.

第(3)问，用常规方法来处理，构造函数 $g(x)=c^x-(c-1)x-1$，$g'(x)=c^x\ln c-(c-1)$.

难点：导函数的处理，$g'(x)=\ln c\left(c^x-\frac{c-1}{\ln c}\right)$，由(2)知 $g'(x)>0$ 恒成立，则由 $g(x)>g(1)=0$ 得证.此题的关键在于导函数的处理，2016 年全国Ⅱ卷理科关键也在于此，这与 2010 年全国大纲卷Ⅱ参考答案解法的关键点是一致的，第(3)问也可以通过变换主元的思

想，看成关于 c 的函数 $h(c)=cx-c^x-x+1$，$h'(c)=x(1-c^{x-1})>0$，则 $h(c)>h(1)=0$.

$1+(c-1)x>c^x$ 其实是伯努利不等式 $(1+x)^2>1+\alpha x$，$x>-1$ 的变形，2017 年文理科考试大纲都有这一条：要求"会用数学归纳法证明伯努利不等式 $(1+x)^n>1+nx$，$x>-1$，$x\neq 0$ 且 n 是大于 1 的正整数".

由第(1)问的单调性能够证明 $f(x)=\ln x-x+1\leqslant 0$，即 $\ln x\leqslant x-1$，这是重要不等式. 我们总结了一系列重要不等式，全国卷在 2006 年全国Ⅱ，2010 年新课标文、理，2010 全国Ⅰ，2010 年全国Ⅱ，2011 年大纲，2013 年大纲，2013 年新课标，2014 年大纲，2016 年全国Ⅱ文不断地重复了.

在上述不等式的证明的过程中，常常需要对函数进行处理，以便求导之后更好地处理，这一处理思想在 2004 年全国Ⅱ，2012 年辽宁文、理，2013 年辽宁，2014 年辽宁文、理，2014 年全国Ⅰ得到数次重复.

【例 4】 (2016·全国Ⅲ，理)设函数 $f(x)=a\cos 2x+(a-1)(\cos x+1)$，其中 $a>0$，记 $|f(x)|$ 的最大值为 A.

(1)求 $f'(x)$；

(2)求 A；

(3)证明 $|f'(x)|\leqslant 2A$.

解读：对于第(3)问的证明，用绝对值进行放缩，这一思想在 2014 年的辽宁卷已经得到体现.

【例 5】 (2014·辽宁)已知定义在 $[0,1]$ 上的函数 $f(x)$ 满足：

①$f(0)=f(1)=0$；

②对所有 $x,y\in[0,1]$，且 $x\neq y$，有 $|f(x)-f(y)|<\frac{1}{2}|x-y|$.

若对所有 $x,y\in[0,1]$，$|f(x)-f(y)|<k$，则 k 的最小值为 ( )

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{2\pi}$　　D. $\frac{1}{8}$

常常有观点批判放缩法，强化从函数的观点看不等式和数列，这使得函数这个强大的工具在不等式中得到有效的应用，数列可以视为定义为正整数或其子集上的函数，从函数的观点看数列，这代表用一般的观点看特殊，为我们指明了研究的方向，但这不足以把数列研究清楚，还必须回归数列本身去考虑特殊性，在全国卷选填题的压轴题得到数次体现，数列不等式的一个基本处理也是用放缩成等比数列或可以求和的数列来处理. 如下题.

【例 6】 (2014·新课标Ⅱ)已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+1$.

(1)证明 $\left\{a_n+\frac{1}{2}\right\}$ 是等比数列，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)证明 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\frac{3}{2}$.

解读：这是在对放缩法这一基本方法"正名"，在高考层面，我们也仅限于熟悉放缩法最基本的处理，不能追求过多的技巧.

【例 7】 (2016・全国Ⅱ)(1)讨论函数 $f(x)=\frac{x-2}{x+2}e^x$ 的单调性,并证明当 $x>0$ 时,$(x-2)e^x+x+2>0$;

(2)证明:当 $a\in[0,1)$ 时,函数 $g(x)=\frac{e^x-ax-a}{x^2}(x>0)$ 有最小值.设 $g(x)$ 的最小值为 $h(a)$,求函数 $h(a)$ 的值域.

解读:对于第(2)问求得 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极小值,也是最小值,$g(x_0)=\frac{e^{x_0}-a(x_0+1)}{x_0{}^2}=h(a)$,此时需要由 $g'(x_0)=\frac{(x_0-2)e^{x_0}+a(x_0+2)}{x_0^3}=0$ 找到 x_0 与 a 的关系.根据消元的简洁性,确定主元为 x_0,把 $a=-\frac{(x_0-2)e^{x_0}}{x_0+2}$ 代入 $g(x_0)=\frac{e^{x_0}-a(x_0+1)}{x_0{}^2}=h(a)$ 解析式,得到 $g(x_0)=\frac{e^{x_0}}{x_0+2}$,从而求得答案.确定主元的思想在 2009 年全国Ⅱ理科首次出现,并在 2012 年全国新课标卷得到强化,2016 年全国Ⅱ再次出现.

【例 8】 (2009・全国Ⅱ)设函数 $f(x)=x^2+a\ln(1+x)$ 有两个极值点 x_1、x_2,且 $x_1<x_2$.

(1)求 a 的取值范围,并讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)证明:$f(x_2)>\frac{1-2\ln 2}{4}$.

解读:对于(2)$f(x_2)=x_2^2+a\ln(1+x_2)$ 有两个变化的 a,x_2,根据消元的简洁性,确定主元为 x_2.

【例 9】 (2012・新课标)已知 $f(x)$ 满足 $f(x)=f'(1)e^{x-1}-f(0)x+\frac{1}{2}x^2$.

(1)求 $f(x)$ 的解析式及单调区间;

(2)若 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}x^2+ax+b$,求 $(a+1)b$ 的最大值.

解读:对于(2),有 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}x^2+ax+b\Leftrightarrow e^x-(a+1)x-b\geqslant 0$,这里面有两个参数,根据式子的简洁性,选择 b 作为主元,单独移到不等式的左边,得 $b\leqslant e^x-(a+1)x$.①若 $a+1<0$,则 $h(x)=(a+1)b\geqslant(a+1)e^x-(a+1)^2x$,构造出了 $(a+1)b$ 关于 x 的函数,此时只有一个参数 $(a+1)$,容易求得 $h(x)_{\min}=(a+1)^2-(a+1)^2\ln(a+1)(a+1>0)$.

再看成关于 $(a+1)$ 的函数,得到函数 $g(t)=t^2-t^2\ln t$,$t>0$,容易求出最值.

全国卷更注重对本质的考查、核心的思想不断地重复,课改理念得到渗透,这不一一赘述,在继《新课标下的高考数学习题精粹》《解析几何的系统性突破》《高观点下函数高考压轴题的系统性突破》之后,即将推出《新课标下全国卷数学特点的研究、分析和应对策略》,敬请期待.