Bien débuter en mathématiques

L1, L2, L3
Classes Préparatoires
CAPES

Applications différentiables, fonctions de plusieurs variables

Exercices corrigés avec rappels de cours

Jean-Jacques Colin
Jean-Marie Morvan

Directeur de Collection :
Jean-Marie Morvan

Cépaduès
ÉDITIONS

Bien débuter en mathématiques

Applications différentiables, fonctions de plusieurs variables

Exercices corrigés avec rappels de cours

L1, L2, L3
Classes Préparatoires
CAPES

Jean-Jacques COLIN
Jean-Marie MORVAN

Jean-Marie MORVAN
Directeur de Collection

CÉPADUÈS-ÉDITIONS
111, rue Nicolas-Vauquelin
31100 TOULOUSE – France
Tél. : 05 61 40 57 36 – Fax : 05 61 41 79 89
(de l'étranger) + 33 5 61 40 57 36 – Fax : + 33 5 61 41 79 89
www.cepadues.com
Courriel : cepadues@cepadues.com

Chez le même éditeur

Collection **Bien débuter en mathématiques**, voir les éléments en 3^{e} de couverture

Pratiques mathématiques

Polynômes orthogonaux et transformations intégrales .... *Groux R.*
Principes généraux et méthodes fondamentales .... *Groux R.*
Autour des Dérivées .... *Groux R*
Analyse : la convergence vue par les problèmes .... *Groux R., Soulat P.*
Algèbre : structures et morphismes vus par les problèmes .... *Groux R., Soulat P.*
Les Fonctions Spéciales vues par les problèmes .... *Groux R., Soulat P.*

Bien maîtriser les mathématiques

Introduction à la Topologie : espaces topologiques, métriques, normés .... *Sondaz D., Morvan R.*
Limites, applications continues, espaces complets .... *Sondaz D., Morvan R.*
Compacité, Connexité : Introduction à la Topologie .... *Sondaz D.*
Espaces vectoriels normés, banachiques et hilbertiens : Introduction à la Topologie .... *Sondaz D.*
Fonctions différentiables .... *Sondaz D.*

Hors collection

Analyse variationnelle et Optimisation .... *Azé D. et Hiriart-Urruty J-B.*
Mathématiques pour les sciences de l'ingénieur avec Mathematica .... *Carmasol A.*
Cours d'analyse fonctionnelle et complexe .... *Caumel Y.*
Calcul sans retenue. Préface d'André Deledicq .... *Chiocca M.*
Méthodes Mathématiques Première S, Analyse .... *Cintract B., Marc N.*
Que savez-vous de l'outil mathématique ? Série de 6 fascicules .... *Collectif*
Modélisation probabiliste et statistique .... *Garel B.*
Algèbre linéaire .... *Grifone J.*
Invitation à l'algèbre .... *Jeanneret A., Lines D.*
Introduction à la statistique descriptive .... *Leboucher L., Voisin M.-J.*
Arithmétique Modulaire et Cryptologie .... *Meunier P.*
Algèbre et probabilités .... *Meunier P.*
Algèbre et informatique Applications aux codes linéaires correcteurs d'erreurs .... *Meunier P.*
Cours d'Algèbre et d'Algorithmique Applications à la cryptologie du RSA et du logarithme discret .... *Meunier P.*
Cours et exercices d'analyse .... *Meunier P.*
Cours et exercices d'analyse : Les Équations Différentielles .... *Meunier P.*
Cours et exercices d'analyse : Topologie, analyse fonctionnelle et matricielle .... *Meunier P.*
Probabilités discrètes. Cours et exercices .... *Meunier P.*
Algèbre - Analyse - Probabilités. 527 exercices avec solutions .... *Meunier P.*
Probabilités et statistiques pour ingénieurs et commerciaux .... *Pellaumail J., Perret A., Basle L.*
La démarche statistique .... *Prum B.*
Mathématiques générales pour 1er cycle universitaire et formation continue .... *Rovira P.*
Calcul différentiel : cours et exercices corrigés .... *Todjihounde L.*
Topologie élémentaire pour la Licence de Mathématiques .... *Todjihounde L.*

ISBN : 978.2.36493.504.4

Dépôt légal : octobre 2015

Avant-Propos

La collection *Bien Débuter en Mathématiques* se compose d'une série de fascicules d'exercices et de problèmes adaptés aux programmes de mathématiques des premières années de l'enseignement supérieur. Le présent ouvrage est consacré aux fonctions différentiables entre espaces normés.

Les rappels de cours et les exercices

Le contenu de cet ouvrage s'adresse aux étudiants de Licence (L2, L3) et aux élèves des classes de Mathématiques Spéciales. Il peut bien sûr être très utile aux étudiants qui préparent le CAPES de Mathématiques. Sa lecture, notamment en ce qui concerne les exercices, nécessite donc que soient requises les notions fondamentales d'algèbre et d'analyse qui figurent aux programmes de la plupart des premières années d'enseignement supérieur scientifique.

Toutes les notions de topologie et tous les concepts de base de l'analyse qui sont utilisés dans les pages qui suivent et que nous supposons être acquis par le lecteur, ont pour cadre exclusif celui des *espaces vectoriels normés* sur $\mathbb{R}$ [1]. C'est dans ce cadre précis que nous développons ici les bases du calcul différentiel.

Toutefois, dans les programmes actuels des classes de mathématiques spéciales, le calcul différentiel se limitant aux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{R}$, nous avons mis un accent particulier, surtout au niveau des exercices, sur l'étude des fonctions différentiables de deux ou trois variables réelles.

Chaque chapitre contient un rappel de cours conséquent et une liste

1. Pour parfaire ses connaissances sur ces thèmes, il suffit de se reporter à l'ouvrage "Topologie des espaces vectoriels normés" des mêmes auteurs, dans la même collection.

d'exercices, chacun d'entre eux étant suivi d'une solution rédigée avec soin. Nous avons retenu les types d'exercices qui reviennent immanquablement dans les sujets d'examen et de concours, en nous attachant à mettre en évidence les raisonnements utilisés.

Une méthode ... vers l'auto-formation

Classés dans chaque section par ordre de difficulté croissante, les exercices permettront au lecteur de tester son niveau et sa progression. Les rappels de cours viennent en appui de ce dispositif. S'ils ne remplacent évidemment pas un cours complet de calcul différentiel, ils servent de référence systématique dans les solutions des exercices. De ce fait, le lecteur peut acquérir de façon autonome les bases des connaissances indispensables à la poursuite de ses études. Si le sujet le passionne, (ce qui est le but de notre entreprise), il aura tout loisir de l'approfondir.

Les Auteurs

Table des matières

Chapitre 1

Applications différentiables

1.1 Rappels de cours

Dans tout ce qui suit, les espaces vectoriels normés considérés sont des espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, non réduits au vecteur nul.

1.1.1 Application négligeable devant une autre

Définition 1 *Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, dont le vecteur nul est - abusivement - noté 0.*[1] *Soient f et g des applications définies sur un voisinage U d'un point a de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans E. On dit que f est* négligeable *devant g quand x tend vers a si pour tout nombre réel $\epsilon > 0$, il existe un voisinage V_ϵ de a dans $\mathbb{R}$, tel que, pour tout $x \in V_\epsilon$, on ait*

$$\| f(x) \| \leq \epsilon \| g(x) \| .$$

S'il en est ainsi, on écrit "$f = o(g)$ quand x tend vers a", ou plus simplement "$f = o(g)$" si aucune confusion n'est à craindre (notation de Landau), mais on ne devra pas oublier que cette propriété est relative au point a, et donc qu'elle ne permet de comparer les fonctions f et g que localement. Notons également que l'on écrit souvent "$f(x) = o[g(x)]$" en lieu et place de "$f = o(g)$", cet abus de langage, assez pratique, évitant de nommer les fonctions en présence.

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que l'emploi du signe égal dans la notation "$f = o(g)$" est incorrect. En effet, le signe égal ne possède pas ici toutes les propriétés qui sont les siennes en théorie des ensembles. Il serait bien préférable d'écrire "$f \in o(g)$", où $o(g)$ désignerait

1. En toute rigueur, le vecteur nul de E devrait être noté 0_E pour le distinguer du nombre réel 0. Nous sommes persuadés que, en se référant au contexte, le lecteur saura éviter toute confusion.

alors l'ensemble des applications de U vers E, négligeables devant g quand x tend vers a. Malheureusement, cette façon correcte d'écrire les choses n'est pas utilisée dans la pratique, les mathématiciens ayant fait le choix de conserver la notation $f = o(g)$, pour ne pas avoir à modifier leurs habitudes de calcul, somme toute assez commodes.

1.1.2 Notion d'application différentiable

Soient $(E, \| \, . \, \|)$ et $(F, \| \, . \, \|)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$. Pour ne pas alourdir les notations, les normes sur E et sur F sont notées de la même façon, le contexte permettant aisément de différencier la norme sur E de la norme sur F. En outre, sauf mention expresse du contraire, la norme sur $\mathbb{R}$ sera celle définie par la valeur absolue.

Définition 2 *Soient $(E, \| \, . \, \|)$ et $(F, \| \, . \, \|)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, a un point de E, U un voisinage de a et f une application de U vers F.*

— *On dit que f est* différentiable *en a s'il existe une application linéaire continue*[2] *L_a de E vers F, telle que :*

$$\lim_{h \to 0, h \neq 0} \frac{1}{\| h \|}[f(a+h) - f(a) - L_a(h)] = 0,$$

soit encore, en utilisant les notations de Landau, quand h tend vers 0,

$$f(a+h) - f(a) - L_a(h) = o(\| h \|).$$

S'il en est ainsi, l'application L_a s'appelle différentielle *de f au point a. On la note $df(a)$ (ou encore $Df(a)$).*

— *Dans le cas où f est différentiable en tout point de U, on dit que f est différentiable sur U.*

Remarques -

- Si f est différentiable en a, l'application L_a qui lui est associée est unique. On pourra donc dire que L_a est *la* différentielle de f en a.

2. Il nous semble important de rappeler au lecteur l'important résultat suivant.
Soient $(E, \| \, . \, \|)$ et $(F, \| \, . \, \|)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ et soit f une application **linéaire** de E vers F. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. L'application f est continue sur E.
2. L'application f est continue en 0.
3. L'application f est bornée sur la boule unité fermée $B'(0,1)$.
4. Il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$, tel que pour tout $x \in E$, on ait $\| f(x) \| \leq M \| x \|$.
5. L'application f est lipschitzienne.
6. L'application f est uniformément continue sur E.

- Si f est différentiable en a, on note $df(a)(x)$ ou $Df(a)(x)$ l'image dans F de tout élément $x \in E$ par l'application linéaire et continue

$$df(a) : E \to F.$$

- Notons aussi que si $(E, \| \, . \, \|) = (\mathbb{R}, |.|)$, l'application f est différentiable au point a si et seulement si f est dérivable (au sens usuel) en a, et dans ce cas, si $f'(a)$ désigne le vecteur dérivé de f en a (ou le nombre dérivé de f en a dans le cas où de plus $(F, \| \, . \, \|) = (\mathbb{R}, |.|)$, $df(a)$ n'est autre que l'application linéaire de $\mathbb{R}$ vers F :

$$h \to hf'(a).$$

Par suite, si $(E, \| \, . \, \|) = (F, \| \, . \, \|) = (\mathbb{R}, |.|)$,

$$f'(a) = df(a)(1). \tag{1.1}$$

- Si $(E, \| \, . \, \|)$ est de dimension finie, la condition de continuité imposée à L_a dans la définition ci-dessus est automatiquement remplie.
- On remarquera enfin que si on remplace les normes sur E ou sur F par des normes équivalentes, l'existence et la valeur de la différentielle de f en a ne sont pas remises en question. En particulier, si la dimension des espaces $(E, \| \, . \, \|)$ et $(F, \| \, . \, \|)$ est finie, il est inutile de préciser les normes choisies, puisque sur un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Exemples -

1. **Soient $(E, \| \, . \, \|)$ et $(F, \| \, . \, \|)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, U un ouvert de E, et soit f une application constante de U vers F. L'application f est différentiable en tout point a de U et sa différentielle $df(a)$ est l'application nulle de E vers F.**
2. **Soit $(E, \| \, . \, \|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, U un ouvert de E, et soit f l'application identique de U sur lui-même. L'application f est différentiable en tout point a de U et sa différentielle $df(a)$ est l'application identique de E sur E.**
3. **Soient $(E, \| \, . \, \|)$ et $(F, \| \, . \, \|)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, U un ouvert de E, et soit f la restriction à U d'une application linéaire continue l de E vers F. L'application f est différentiable en tout point a de U et sa différentielle $df(a)$ n'est autre que l.**
4. **Soient $(E_1, \| \, . \, \|)$, $(E_2, \| \, . \, \|)$ et $(F, \| \, . \, \|)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, Φ la restriction à un ouvert U de l'espace vectoriel normé [3]**

3. Rappelons que si $(E_1, \| \, . \, \|)$, $(E_2, \| \, . \, \|)$ sont des espaces vectoriels normés, le produit $E_1 \times E_2$ est un espace vectoriel normé, la norme étant définie en posant pour tout $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$,

$$\| (x_1, x_2) \| = \max(\| x_1 \|, \| x_2 \|).$$

On généralise cette construction de façon évidente au produit de $n \geq 2$ espaces vectoriels normés.

$E_1 \times E_2$ d'une application bilinéaire continue de $E_1 \times E_2$ vers F. L'application Φ est différentiable en tout point $a = (a_1, a_2)$ de U et sa différentielle $d\Phi(a)$ est l'application linéaire

$$(h_1, h_2) \to \Phi(a_1, h_2) + \Phi(h_1, a_2),$$

de $E_1 \times E_2$ vers F.

5. **Pus généralement, Soient $(E_1, \| \, . \, \|)$,..., $(E_n, \| \, . \, \|)$ et $(F, \| \, . \, \|)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, Φ la restriction à un ouvert U d'une application multilinéaire continue de**

$$E_1 \times ... \times E_n$$

vers F. L'application Φ est différentiable en tout point

$$a = (a_1, ..., a_n) \in U$$

et sa différentielle $d\Phi(a)$ est l'application linéaire

$$(h_1, ..., h_n) \to \sum_{i=1}^{n} \Phi(h_1, ..., h_{i-1}, a_i, h_{i+1}, ..., h_n),$$

de $E_1 \times ... \times E_n$ vers F.

Proposition 1 *Soient $(E, \| \, . \, \|)$ et $(F, \| \, . \, \|)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, a un point de E, U un voisinage de a et f une application de U vers F. Si f est différentiable en a, alors f est continue en a.*

La réciproque de cette propriété est inexacte. En effet, l'application

$$f : x \to |x|$$

de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, est continue en 0, mais n'est pas différentiable en 0.

Proposition 2 *Soient $(E, \| \, . \, \|)$ et $(F, \| \, . \, \|)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, a un point de E, U un voisinage de a, f et g des applications de U vers F et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f et g sont différentiables en a, alors $f + g$ est différentiable en a, λf est différentiable en a et*

$$d(f + g)(a) = df(a) + dg(a); \qquad d(\lambda f)(a) = \lambda df(a). \tag{1.2}$$

Proposition 3 *Soient $(E, \| \, . \, \|)$, $(F, \| \, . \, \|)$ et $(G, \| \, . \, \|)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, a un point de E, U un voisinage de a, f une application de U vers F et g une application d'un voisinage V de $f(a)$ tel que $f(U) \subset V$. Si f est différentiable en a et si g est différentiable en $f(a)$, alors, $g \circ f$ est différentiable en a et*

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a). \tag{1.3}$$

Remarque - Notons tout de suite que si $(E, \| . \|) = (\mathbb{R}, |.|)$,

$$(g \circ f)'(a) = dg(f(a))(f'(a)).$$

Dans le cas particulier où f est une bijection d'un ouvert U de E sur un ouvert V de F, notons que si f est différentiable en un point a de U et si sa bijection réciproque f^{-1} est différentiable au point $b = f(a)$ de V, la Proposition 3 ci-dessus implique que la différentielle de $f^{-1} \circ f$, soit $df^{-1}(b) \circ df(a)$ n'est autre que Id_E et que celle de $f \circ f^{-1}$, soit $df(a) \circ df^{-1}(b)$ n'est autre que Id_F. Autrement dit, $df(a)$ est un isomorphisme de E sur F et $[df(a)]^{-1} = df^{-1}(b)$. De plus, on peut établir la

Proposition 4 *Soient $(E, \| . \|)$ et $(F, \| . \|)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, a un point de E, U un voisinage de a, f un homéomorphisme de U sur un voisinage V du point $b = f(a)$. Si f est différentiable en a et si sa différentielle $df(a)$ est une bijection de E sur F dont la bijection réciproque est continue, alors f^{-1} est différentiable en b et*

$$df^{-1}(b) = [df(a)]^{-1}.$$

On pose alors la définition suivante :

Définition 3 *Soient $(E, \| . \|)$et $(F, \| . \|)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, U un ouvert de E, f une bijection de U sur un ouvert V de F. Si f est différentiable sur U et f^{-1} est différentiable sur V, on dit que f est un* difféomorphisme *de U sur V.*

Sous ces hypothèses, E et F sont des espaces vectoriels isomorphes.

Exemples -

1. **Soient U et V les ouverts de $\mathbb{R}^2$ définis par :**

$$U =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\quad \text{et} \quad V = \complement_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{R}^- \times \{0\}).$$

L'application $\Phi : (\rho, \theta) \to (x, y)$, de U vers V, définie par :

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta, \end{cases}$$

est un difféomorphisme de U sur V.

2. **L'application Θ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par :**

$$\Theta(x) = x^3,$$

est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur lui-même, mais n'est pas un difféomorphisme, car sa bijection réciproque Θ^{-1} n'est pas dérivable en 0.

Proposition 5 *Soient* $(E, \| \, . \, \|)$, $(F_1, \| \, . \, \|), ..., (F_p, \| \, . \, \|)$ *des espaces vectoriels normés sur* $\mathbb{R}$, a *un point de* E, U *un voisinage de* a *et pour tout* $i \in \{1, ..., p\}$ *soit* f_i *une application de* U *vers* F_i. *On définit une application* f, *de* U *vers* $F = F_1 \times ... \times F_p$ *en posant, pour tout* $x \in E$:

$$f(x) = (f_1(x), ..., f_p(x)).$$

L'application f *est différentiable en* a *si et seulement si pour tout* $i \in \{1, ..., p\}$, f_i *est différentiable en* a. *S'il en est ainsi, pour tout* $h \in E$,

$$df(a)(h) = (df_1(a)(h), ..., df_p(a)(h)).$$

1.1.3 Dérivée suivant un vecteur

Définition 4 *Soient* $(E, \| \, . \, \|)$ *et* $(F, \| \, . \, \|)$ *des espaces vectoriels normés sur* $\mathbb{R}$, a *un point de* E, U *un voisinage de* a, f *une application de* U *vers* F *et* v *un vecteur non nul de* E. *On dit que* f *admet une* dérivée au point a suivant le vecteur v *si la fonction (qui est définie sur un voisinage de* 0 *(dans* $\mathbb{R}$*) et à valeurs dans* F*)*

$$t \to f(a + tv)$$

admet une dérivée (au sens usuel) en 0. *S'il en est ainsi, la dérivée au point* a *suivant le vecteur* v *se note* $D_v f(a)$.

On a évidemment :

$$D_v f(a) = \lim_{t \to 0, t \neq 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

Proposition 6 *Soient* $(E, \| \, . \, \|)$ *et* $(F, \| \, . \, \|)$ *des espaces vectoriels normés sur* $\mathbb{R}$, a *un point de* E, U *un voisinage de* a *et* f *une application de* U *vers* F. *Si* f *est différentiable en* a, *alors* f *admet une dérivée au point* a *suivant tout vecteur* v *non nul de* E *et*

$$D_v f(a) = df(a)(v).$$

Là encore, la réciproque de cette propriété est inexacte, En effet, l'application

$$f : (x, y) \to \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, admet en $(0, 0)$ une dérivée suivant tout vecteur non nul, mais on vérifie sans peine que f n'est pas continue en $(0, 0)$, donc pas différentiable en ce point.

1.1.4 L'inégalité des accroissements finis

Une forme élémentaire de l'inégalité des accroissements finis s'énonce ainsi :

Proposition 7 *Soient a et b des nombres réels, $a < b$, $(F, \| \,.\, \|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, et f une application de l'intervalle $[a, b]$ vers F. Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in\,]a, b[$ on ait $\| f'(x) \| \leq M$, alors*

$$\| f(b) - f(a) \| \leq M(b - a).$$

Dans le cas particulier où $(F, \| \,.\, \|) = (\mathbb{R}, |.|)$, on peut montrer, à l'aide du théoréme de ROLLE, qu'il existe un nombre réel $c \in\,]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Dans le but de généraliser ce résultat, rappelons les définitions suivantes :

Définition 5 *Soit $(E, \| \,.\, \|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et soient a et b des points de E. On pose :*

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in E;\ \text{il existe}\ \ t \in [0, 1]\,, x = ta + (1 - t)b\} \\ \text{et}\quad]a, b[&= \{x \in E;\ \text{il existe}\ \ t \in\,]0, 1[\,, x = ta + (1 - t)b\}. \end{aligned}$$

L'ensemble $[a, b]$ (resp. $]a, b[$) s'appelle le segment fermé *(resp.* segment ouvert*) d'extrémités a et b.*

Définition 6 *Soit $(E, \| \,.\, \|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et soit X une partie de E. On dit que X est* convexe *si pour tout couple (a, b) d'éléments de X, le segment fermé $[a, b]$ est inclus dans X.*

Rappelons également que si $(E, \| \,.\, \|)$ et $(F, \| \,.\, \|)$ sont des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, on définit une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}_c(E, F)$ des applications linéaires continues de E vers F en posant pour toute application $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$:

$$|||f||| = \sup\{\| f(x) \|; \| x \| \leq 1\} (= \sup\{\| f(x) \|; \| x \| = 1\}).$$

On démontre alors

Théorème 1 - Inégalité des accroissements finis - *Soient $(E, \| \,.\, \|)$ et $(F, \| \,.\, \|)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, U un ouvert de E, f une application de U vers F, a et b des points de U tels que $[a, b] \subset U$. Si f est continue en tout point de $[a, b]$ et différentiable en tout point de $]a, b[$, et s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in\,]a, b[$ on ait $|||df(x)||| \leq M$, alors,*

$$\| f(b) - f(a) \| \leq M \| b - a \| .$$

Dans le cas particulier où $(F, \| \, . \, \|) = (\mathbb{R}, |.|)$, on peut montrer qu'il existe un nombre réel $c \in \,]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = df(c)(b - a).$$

On notera que ce résultat est inexact lorsque f est à valeurs dans un espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à 2. Il suffit pour cela de considérer l'application

$$f : x \to (x^2, x^3)$$

de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$. Sa différentielle $df(x)$ au point x est l'application linéaire

$$h \to (2x.h, 3x^2.h)$$

D'autre part, $f(1) - f(0) = (1, 1)$ alors que pour tout $c \in \mathbb{R}$,

$$df(c)(1) = (2c, 3c^2) \neq (1, 1).$$

Corollaire 1 *Soient $(E, \| \, . \, \|)$ et $(F, \| \, . \, \|)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, U un ouvert convexe de E, f une application de U vers F, différentiable sur U. S'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in U$ on ait $|||df(x)||| \leq M$, alors, pour tout couple (a, b) de $U \times U$,*

$$\| \, f(a) - f(b) \, \| \leq M \, \| \, b - a \, \| \, .$$

Autrement dit, f est une application M-lipschitzienne, et donc uniformément continue sur U.

Corollaire 2 *Soient $(E, \| \, . \, \|)$ et $(F, \| \, . \, \|)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, U un ouvert connexe de E, f une application de U vers F, différentiable sur U. Si pour tout $x \in U$, $df(x) = 0_{\mathcal{L}_c(E,F)}$, alors f est constante sur U.*

On notera que pour prouver ce résultat il faut se souvenir qu'un ouvert U d'un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ est connexe si et seulement si il est connexe par lignes brisées, autrement dit si pour tout couple (a, b) de points de U il existe une réunion de segments de la forme

$$\bigcup_{1 \leq i \leq n} [x_{i-1}, x_i] \, , \text{ où } n \in \mathbb{N}^*, x_0 = a, x_n = b, x_0, x_1, ..., x_n \in U$$

entièrement incluse dans U.

Si U n'est pas connexe, le Corollaire 2 tombe en défaut : il suffit de considérer l'application

$$f :]0, 1[\cup]2, 3[\to \mathbb{R},$$

définie par

$$\begin{cases} f(x) = 1, & \forall x \in]0, 1[, \\ f(x) = 2, & \forall x \in]2, 3[. \end{cases}$$

1.1.5 Différentielles partielles

Définition 7 *Soient* $(E_1, \| \cdot \|), ..., (E_n, \| \cdot \|)$ *et* $(F, \| \cdot \|)$ *des espaces vectoriels normés sur* $\mathbb{R}$, $a = (a_1, ..., a_n)$ *un point de* $E = E_1 \times ... \times E_n$, U *un voisinage de* a *et* f *une application de* U *vers* F. *Pour tout* $j \in \{1, ..., n\}$, *soit* f_j *l'application de* E_j *vers* F *définie en posant pour tout* $x_j \in E_j$

$$f_j(x_j) = f(a_1, ..., a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, ..., a_n).$$

Si f_j *est différentiable au point* a_j, *sa différentielle s'appelle la* $j-$*ième* différentielle partielle *de l'application* f *au point* a *et se note* $\partial_j f(a)$ *(ou encore* $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$*).*

• On notera encore ici que si $(E_1, \| \cdot \|) = ... = (E_n, \| \cdot \|) = (\mathbb{R}, |.|)$ (i.e. si $E = \mathbb{R}^n$), f admet une j-ième différentielle partielle au point a si et seulement si f admet un j-ième vecteur dérivé partiel au point a (au sens usuel) que l'on note $f'_{x_j}(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

• Si de plus $(F, \| \cdot \|) = (\mathbb{R}, |.|)$, f admet une j-ième différentielle partielle au point a si et seulement si f admet un j-ième nombre dérivé partiel, autrement dit si l'application de $\mathbb{R}$ vers F

$$x_j \to f(a_1, ..., a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, ..., a_n)$$

est dérivable (au sens usuel) en a_j.

Théorème 2 *Soient* $(E_1, \| \cdot \|), ..., (E_n, \| \cdot \|)$ *et* $(F, \| \cdot \|)$ *des espaces vectoriels normés sur* $\mathbb{R}$, $a = (a_1, ..., a_n)$ *un point de* $E = E_1 \times ... \times E_n$, U *un voisinage de* a *et* f *une application de* U *vers* F.

— *Pour que* f *soit différentiable au point* a, *il est nécessaire que les* n *différentielles partielles de* f *au point* a *existent.*

— *Si* f *est différentiable au point* a, $df(a)$ *est l'application de* E *vers* F *définie comme suit :*

$$(h_1, ..., h_n) \to \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(a)(h_j).$$

Il est facile de voir que l'existence des différentielles partielles de f en un point n'est pas une condition suffisante pour assurer la différentiabilité de f en ce point. En effet, les deux différentielles partielles de l'application

$$f : (x, y) \to \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

existent au point $a = (0, 0)$. Ce sont :

$$\partial_1 f(a) : x \to 0 \quad \text{et} \quad \partial_2 f(a) : y \to 0.$$

Cependant, pour $x \neq 0$, $f(x, x) = \frac{1}{2}$. L'application f n'est donc pas continue en a et par suite n'est pas différentiable en a.

1.1.6 Notion d'application de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 8 *Soient* $(E, \| \, . \, \|)$ *et* $(F, \| \, . \, \|)$ *des espaces vectoriels normés sur* $\mathbb{R}$, U *un ouvert de* E *et* f *une application de* U *vers* F *que l'on suppose différentiable sur* U*. Dans ce cas, l'application*

$$df : a \to df(a),$$

de U *vers* $\mathcal{L}_c(E, F)$ *est appelée* application (ou fonction) différentielle *de* f *sur* U*.*

Définition 9 *Soient* $(E, \| \, . \, \|)$ *et* $(F, \| \, . \, \|)$ *des espaces vectoriels normés sur* $\mathbb{R}$, U *un ouvert de* E, $a \in U$ *et* f *une application de* U *vers* F*. On dit que* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *au point* a *(ou* continûment différentiable *au point* a*) s'il existe un voisinage* V *de* a, $V \subset U$, *tel que*

1. f *est différentiable en tout point* x *de* V,
2. *l'application*

$$df : x \to df(x),$$

de V *vers* $\mathcal{L}_c(E, F)$, *est continue au point* a*.*

Dans le cas où f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *en tout point* a *de* U, *on dit que* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* U*.*

Théorème 3 *Soient* $(E_1, \| \, . \, \|), ..., (E_n, \| \, . \, \|)$ *et* $(F, \| \, . \, \|)$ *des espaces vectoriels normés sur* $\mathbb{R}$, $a = (a_1, ..., a_n)$ *un point de* $E = E_1 \times ... \times E_n$, U *un voisinage de* a *et* f *une application de* U *vers* F*. Une condition suffisante pour que* f *soit différentiable au point* $a \in U$ *est que les* n *applications différentielles partielles de* f *sur* U *(i.e.* $\partial_1 f, ..., \partial_j f, ..., \partial_n f$*) existent et soient continues au point* a*.*

Ce théorème a pour conséquence le

Corollaire 3 *Les notations étant celles du Théorème 3 ci-dessus, une condition nécessaire et suffisante pour que* f *soit de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* U *est que les* n *applications différentielles partielles de* f *sur* U *(i.e.* $\partial_1 f, ..., \partial_j f, ..., \partial_n f$*) existent et soient continues sur* U*.*

On notera que la condition suffisante du Théorème 3 n'est pas nécessaire, car s'il en était ainsi, toute application différentiable sur U serait de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, ce qui n'est pas le cas. Pour s'en convaincre, le lecteur pourra se reporter par exemple aux Exercices 25 et 26.