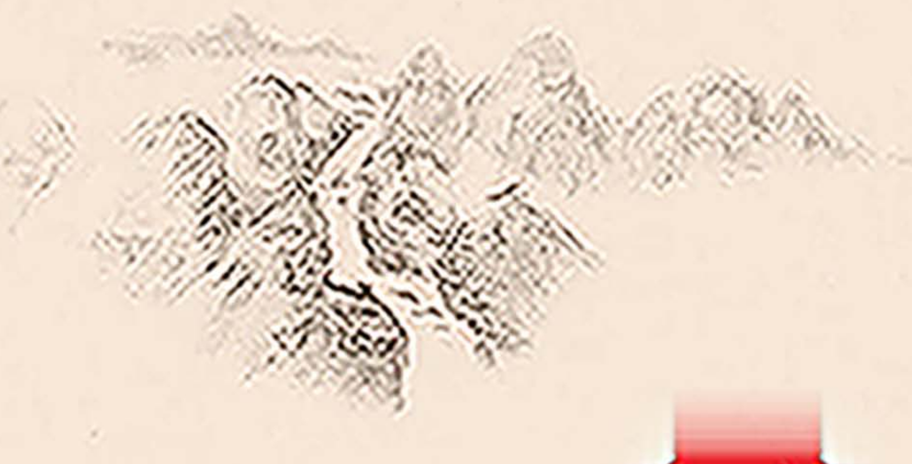
混沌同步及其应用

毛北行　著



郑州大学出版社

混沌同步及其应用

著

郑州大学出版社
·郑州·

图书在版编目(CIP)数据

混沌同步及其应用/毛北行著. —郑州:郑州大学出版社,2016.6
ISBN 978-7-5645-3061-7

Ⅰ.①混…　Ⅱ.①毛…　Ⅲ.①混沌-研究
Ⅳ.①O415.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016)第 123513 号

郑州大学出版社出版发行
郑州市大学路 40 号　　邮政编码:450052
出版人:张功员　　发行电话:0371-66966070
全国新华书店经销
虎彩印艺股份有限公司印制
开本:710 mm×1 010 mm　1/16
印张:9.25
字数:180 千字
版次:2016 年 6 月第 1 版　　印次:2016 年 6 月第 1 次印刷

书号:ISBN 978-7-5645-3061-7　　定价:36.00 元

作者简介

毛北行,男, 1976 年生,祖籍洛阳孟津,1994 年 9 月考入郑州大学数学系基础数学专业,1998 年 7 月本科毕业,获得理学学士学位,1998 年 7 月—2001 年 7 月在郑州航空工业管理学院基础部任教,2001 年 9 月—2004 年 7 月在郑州大学数学系攻读运筹学与控制论专业硕士,研究方向为切换系统. 2004 年至今在郑州航空工业管理学院任教,目前职称为副教授,主要研究兴趣:复杂网络与混沌同步,分数阶系统混沌同步,发表研究论文 100 余篇,其中在中文核心期刊以上发表论文 35 篇,另有教学研究论文 8 篇.

序言

混沌广泛地存在于自然界和人类社会，例如物理、化学、生物学、医药、技术科学以及社会科学等各种科学领域. 一般而言，混沌现象是确定性系统中的随机现象，呈现多种“混乱无序却又颇有规律”的图像. 在20世纪60年代，美国气象学家Lorenz在研究大气时发现，当选取一定参数的时候，一个由确定的三阶常微分方程组描述的大气对流模型，变得不可预测了，同时也发现了同一系统出现的非周期无规则行为. 通过长期反复地数值试验和理论思考，揭示了该结果的真正意义，在耗散系统中首先发现了混沌运动，为以后的混沌研究开辟了道路.

1975年美国数学家J. A. Yorke在《America Mathematics》杂志上发表了“周期三意味着混沌”的著名文章，深刻揭示了从有序到混沌的演变过程，这也使“混沌”作为一个新的科学名词正式出现在文献中. 20世纪80年代，混沌的科学研究得到了进一步的发展，人们也更着重研究系统如何从有序进入新的混沌及其混沌的性质和特点. 20世纪90年代，是混沌科学与其他科学相互渗透、相互促进、广泛应用的年代，关于它的研究几乎跨越了自然科学和社会科学的所有领域，也出现了突破性的进展，由此激发起来的理论与实践应用研究蓬勃展开，使混沌理论无论是在自然科学还是在社会科学（如生物学、生理学、心理学、物理学、电子学、信息科学、人脑科学，还是天文学、气象学、经济学，甚至在音乐、美术、体育艺术领域）都得到了广泛应用.

人们从中看到，随着时间的推移，混沌学成为了一门覆盖面广，跨学科大，综合性强的学科，在未来的科学研究中可以预见其

必将对人类生活产生深远的影响. 有关混沌同步方面的研究已有大量结果, 但目前系统性的专著还少见,本书的出版在一定程度上能弥补这个不足,相信本书能为研究生和广大爱好者提供有益的参考.

2016-05-23

前言

混沌是非线性动力学系统所特有的一种运动形式,它广泛地存在于自然界,诸如物理、化学、生物学、地质学以及技术科学、社会科学等各种科学领域.一般而言,混沌现象隶属于确定性系统而难于预测,隐含于复杂系统但又不可分解,以及呈现多种“混乱无序却又颇有规律”的图像.

由于混沌系统的奇异性和复杂性至今尚未被人们彻底揭示,不同领域的学者从不同角度给出定义,因此混沌至今没有一个统一的定义.以下定义是从不同侧面反映了混沌运动的性质的定义,是几种影响较广的定义.

混沌控制是非线性科学中十分活跃的研究领域.许多实际系统中,混沌现象作为一种不期望的现象,可能导致振荡或无规则运动,进而使系统彻底崩溃,因此,人们希望能找到一些方法来控制系统中的混沌行为.最近,超混沌系统、分数混沌系统、不同维混沌系统、复混沌系统的同步问题引起广大科研工作者的关注,各个期刊的相关成果已经相继出现.

通过对混沌的研究,极大地扩展了人们的视野,活跃了人们的思维.过去人们认为是确定论的和可逆的某些力学方程,却具有内在的随机性和不可逆性.确定论的方程可以得出不确定的结果,这打破了确定论和随机论这两套描述体系之间的鸿沟,给传统科学以很大冲击,在某种意义上使传统科学被改造,这必促使其他科学的进一步发展.

本书共分五章,第一章介绍了严格反馈混沌系统和几种特殊的混沌系统,第二章介绍了复杂网络混沌系统同步、复杂网络混沌系统的最优控制、滑模同步、时间可控的投影同步、有限时间混沌同步,混沌系统的保性能控制以及函数投影同步等,第三章介绍了离散复杂网络混沌系统的同步控制,第四章介绍分数阶复杂网络混沌系统同步的相关理论,第五章介绍了混沌同步在房地产风险

投资方面的应用.

本书的大部分内容是我在2012—2015年的研究成果,感谢我的研究生导师慕小武教授、卜春霞教授对我的栽培。感谢郑州航空工业管理学院理学院程少华院长及我的同事王东晓老师给予的大力支持,本书得到了郑州航空工业管理学院重点建设学科的资助,同时也感谢郑州大学出版社以及家人对我的帮助与支持,感谢所有关心和帮助我的人.

本书仓促之间难免有不妥之处,恳请专家学者和同仁多加批评指正.

著者　毛北行

2016年4月3日

目录

第一章　绪论 …………………………………………………… 001
1.1　严格反馈混沌系统滞同步………………………………… 004
1.2　Chua 混沌系统滞同步 …………………………………… 010
1.3　几种混沌系统的同步控制………………………………… 013
1.4　混沌同步…………………………………………………… 024
1.5　同步一个具有完全四翼形式的四维混沌系统………… 028
第二章　复杂网络混沌系统同步 ……………………………… 035
2.1　复杂网络混沌系统的最优控制………………………… 035
2.2　一类复杂动力学网络的滑模控制混沌同步…………… 039
2.3　复杂网络同步时间可控的投影同步…………………… 042
2.4　一类复杂网络系统的有限时间混沌同步……………… 046
2.5　具有非线性耦合的复杂网络系统的有限时间混沌同步…………………………………………………… 050
2.6　一类 Lurie 复杂网络混沌系统的保性能控制 ………… 055
2.7　时滞 Lurie 复杂网络与网络间的混沌同步 …………… 059
2.8　具有非线性耦合的 Lurie 动态网络的函数投影同步…………………………………………………… 063
2.9　Lurie 复杂网络混沌系统的滑模变结构控制 ………… 069
2.10　两个非线性耦合复杂动态网络的广义同步 ………… 073
第三章　离散复杂网络混沌系统同步 ………………………… 077
3.1　离散复杂网络混沌系统同步…………………………… 077
3.2　一类离散复杂动力学网络混沌系统同步控制………… 081
3.3　一类离散复杂网络混沌系统的输出耦合滑模同步控制…………………………………………………… 084
第四章　分数阶复杂网络系统混沌同步 ……………………… 088
4.1　一类分数阶金融系统混沌同步………………………… 088
4.2　一类分数阶小世界网络系统的滑模控制混沌同步…… 093

4.3　分数阶复杂网络系统混沌同步…… 098
4.4　分数阶能量资源供需系统混沌同步…… 104
4.5　分数阶企业家激励和经济增长的混沌同步…… 109
第五章　房地产风险投资复杂网络系统的混沌同步 …… 113
5.1　房地产风险投资的复杂网络混沌系统的有限时间同步…… 113
5.2　房地产风险投资的复杂网络混沌系统滑模控制混沌同步…… 115
5.3　房地产风险投资复杂网络混沌系统的保性能控制…… 118
5.4　房地产风险投资复杂网络与网络间的混沌同步…… 121
5.5　房地产风险投资复杂网络混沌系统的 H_∞ 同步控制 …… 125
5.6　一类分数阶房地产风险投资系统的混沌同步…… 128
参考文献 …… 133

第一章 绪论

研究背景

混沌的发现被认为是20世纪的三大成就之一. 相对论消除了关于绝对空间和时间的幻想;量子力学则消除了关于可控测量过程的牛顿式的梦;而混沌则消除了拉普拉斯关于决定论式可预测的幻想. 对于确定的初值,由动力系统就可以推知该系统长期行为甚至追溯其过去形态. 1892年,法国学者Poincare在研究三体问题时就发现,系统在某类鞍型不动点附近具有不寻常的运动,无法求出精确解. 他在1903年出版的《科学与方法》一书中明确指出,三体问题,在一定范围内,其解是随机的. 这实际上是一种保守系统的混沌. Poincare是世界上第一位预见到混沌现象的人.

1954年,苏联学者Kolmogorov提出“近似可积的保守系统具有非常复杂的相轨线结构”的猜想,该猜想于1962年被前苏联学者Arnold和Moser证明,这就是著名的KAM定理,但是这些数学结果非常抽象,未能引起科学界的广泛注意.

在20世纪60年代,美国气象学家Lorenz在研究大气时发现,当选取一定参数的时候,一个由确定的三阶常微分方程组描述的大气对流模型,变得不可预测了,同时也发现了同一系统出现的非周期无规则行为. 通过长期反复地数值试验和理论思考,揭示了该结果的真正意义,在耗散系统中首先发现了混沌运动,为以后的混沌研究开辟了道路.

20世纪70年代,特别是1975年以后,是混沌科学发展史上光辉灿烂的年代. 1971年法国数学物理学家Ruelle和荷兰学者Takens为耗散系统引入了“奇怪吸引子”这一概念. 1975年,美籍华人学者李天岩和美国数学家J. A. Yorke在《America Mathematics》杂志上发表了“周期三意味着混沌”的著名文章,深刻揭示了从有序到混沌的演变过程,这也使“混沌”作为一个新的科学名词正式出现在文献中. 20世纪80年代,混沌科学得到了进一步的发展,人们也更着重研究系统如何从有序进入新的混沌及其混沌的性质和特点. 20世纪90年代,是混沌科学与其他科学相互渗透、相互促进、广泛

应用的年代,关于它的研究几乎跨越了自然科学和社会科学的所有领域,也出现了突破性的进展,由此激发起来的理论与实践应用研究蓬勃展开,使得混沌理论不论是在自然科学还是在社会科学,如在生物学、生理学、心理学、物理学、电子学、信息科学、人脑科学、天文学、气象学、经济学,甚至在音乐、美术、体育艺术领域,混沌都得到了广泛应用. 人们从中看到,随着时间的推移,混沌学成为一门覆盖面广,跨学科大,综合性强的学科,在未来的科学研究中可以预见其必将对人类生活产生深远的影响.

混沌是非线性动力学系统所特有的一种运动形式,它广泛地存在于自然界,诸如物理、化学、生物学、地质学,以及技术科学、社会科学等各种科学领域. 一般而言,混沌现象隶属于确定性系统而难于预测,隐含于复杂系统但又不可分解,以及呈现多种“混乱无序却又颇有规律”的图像.

由于混沌系统的奇异性和复杂性至今尚未被人们彻底揭示,不同领域的学者从不同角度给出定义,因此混沌至今没有一个统一的定义.

研究现状

混沌控制是非线性科学中十分活跃的研究领域. 许多实际系统中,混沌现象作为一种不期望的现象,可能导致振荡或无规则运动,进而使系统彻底崩溃,因此,人们希望能找到一些方法来控制系统中的混沌行为. 另一方面,混沌“吸引子”既不重合又不交叠的扭曲模式又可用来实现复杂的职能功能. 这为混沌的利用提供了新的途径,表现出了其在工程技术上的巨大研究价值和极其诱人的应用前景,近几年,混沌控制问题引起了国际上非线性动力系统和工程控制领域专家的极大关注,成为非线性科学研究的热点之一. 一些发达国家的科研和国防军事部门投入了大量的人力物力进行攻关,美国麻省理工学院、华盛顿州立大学、马里兰大学等在这方面的研究一直处于世界领先地位,美国陆军和海军实验室也积极参与竞争,并投入大量研究经费,以期望研制出崭新实用的控制方案,满足国防、现代工业和人民生活的需要.

由于混沌的奇异特征,特别是对初始条件的高度敏感性,使得有些人总觉得混沌是不可靠的,不可控的,因而是无法应用的. 20 世纪 90 年代以来,国际上关于混沌控制获得了突破性的进展. 最早使混沌控制成为众人焦点的突破是由美国马里兰大学的三位物理学家 Ott,Grebogi 和 Yorke 从理论上提出控制混沌的方法,它是基于双曲混沌吸引子中稠密地嵌入无限多个不稳定周期运动. 后来 Ditto,Rouseo,Spano 在磁场作用下的微扰试验中验证了这种方法的正确性. 这种方法也以这三位科学家的名字而命名,称为 OGY 方法. 后来如何实现对混沌“奇怪吸引子”中的高周期态及高维动力学系统的

混沌控制,作为 OGY 方法进一步的改进主要方向,根据这种分析,Ott,Grebogi 与 Romeiras,Daywansa 合作,采用控制系统中的所谓“极点移动技术”,对 OGY 方法进行了进一步的改进.

1992 年德国学者 K. Pyragas 提出了对非线性连续系统的混沌控制方法,即自控制反馈的连续控制法,并有两种方法:一是外力反馈控制法(Self-Controlling Feedback Control),二是延迟反馈控制法(Delay Feedback Control),后一种方法他们已经用自己设计的电子线路进行了成功的验证. 这两种自反馈控制法的基本思想是,考虑非线性混沌系统的输出信号与输入信号之间的自反馈耦合,或者从系统外部强迫输入一定的周期信号,或者直接把系统本身的输出信号取出一部分但经过延迟后在反馈到混沌系统中去,作为控制信号,通过调节控制信号的大小及权重因子,来达到稳定所期望的周期信号. 这两种方法都可以实现对混沌“吸引子”的连续控制,并使不稳定周期稳定化.

迄今,混沌按控制的目标可以归纳为两种:一种是基于在混沌吸引子周围存在无穷多的周期轨道,控制的目标是对其中某个不稳定周期轨道进行有效的稳定控制;另一种控制则没有具体的控制目标,也不关心被控系统的终态是否为周期运动,只是通过合适的策略、方法及途径,有效抑制混沌行为,使 Lyapunov 指数下降进而消除混沌.

目前已经提出了许多不同的混沌控制方法,适用于各种情形下的混沌控制,从非线性系统的类型上说,有些方法适用于离散非线性系统,有些适用于连续非线性系统,从控制原理上可分为微扰反馈控制法和无反馈控制法, 前者反馈的对象可以是系统变量、外部控制信号;等等. 对不同对象的微扰反馈,则产生不同的控制方法,它们的共同点是利用与时间有关的连续微扰作为控制信号,当微扰趋于零或变得非常小的时候,将实现对特定所需的周期轨道或非周期轨道的稳定控制,也就是达到前面的第一种控制目标. 无反馈控制法,用于实现第二种控制目标,它与一些特定的所需轨道无关,因而实现系统控制时,受控输入信号为零,而且受控后动力学行为可能与原系统的大不相同,即产生了新的动力学行为.

国内已把自适应控制原理应用于混沌控制,不仅应用于连续系统,而且应用于离散系统. 自适应方法是一种反馈方法,它虽然知道系统的动力学模型,但并不知道可得到的系统参数的控制目标所需的数值. 该方法的关键是构造自适应控制系统的参考模型. 主要有两类参考模型:一类是间接自适应控制器,它利用系统参数的计算来调节控制律;另一种是直接自适应控制器,它直接调用控制律,以使得系统与模型的参考之间的误差最小. 在这方面 Hubermen 提出了参数自适应的方法,通过目标输出和实际输出之间的差

来控制参数,并在低维混沌系统中获得了实现. Sinha 提出了多重参数和高维混沌系统的自适应方法,但这种方法不适于将系统控制到一个不稳定的轨道,而且控制刚度的大小及符号难于确定,另外参数的扰动范围受到很大的限制.

最近,超混沌系统、分数混沌系统、不同维混沌系统、复混沌系统的同步问题引起广大科研工作者的关注,各个期刊的相关成果已经相继出现。

通过对混沌的研究,极大地扩展了人们的视野,活跃了人们的思维. 过去人们认为是确定论的和可逆的某些力学方程,却具有内在的随机性和不可逆性. 确定论的方程可以得出不确定的结果,这就打破了确定论和随机论这两套描述体系之间的鸿沟,给传统科学以很大冲击,在某种意义上使传统科学被改造,这必将促使其他科学的进一步发展.

1.1 严格反馈混沌系统滞同步

在对非线性系统的研究中,如分支和混沌以及混沌的控制和同步,Rössler 系统,Lorenz 系统,Chua 系统,Chen 系统等经常被当作例子使用,而这些系统都可以归结为下面这类非线性系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= g_1(x_1)x_2 + f_1(x_1),\\
\dot{x}_2 &= g_2(x_1,x_2)x_3 + f_2(x_1,x_2),\\
&\vdots\\
\dot{x}_{n-1} &= g_{n-1}(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})x_n + f_{n-1}(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}),\\
\dot{x}_n &= f_n(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n).
\end{aligned}
\tag{1.1.1}
$$

其中:$f_i, g_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 与 f_n 是连续可导的非线性函数,该混沌系统称为广义反馈系统. 如果还有 $g_i \neq 0(i=1,2,\cdots,n-1)$,那么,则称此混沌系统为严格反馈混沌系统.

在对实际问题的研究当中,比如电路问题中的 Lorenz 混沌系统,此外还有 Chua 混沌系统,Rössler 混沌系统等,可以通过变量的替换转化成严格(广义)反馈混沌系统,下面我们以这几个系统为例演示这种替换的方法.

（1）Rössler 混沌系统的数学模型

$$
\begin{cases}
\dot{x} = -y - z, \\
\dot{y} = x - ay, \\
\dot{z} = b + z(x - c).
\end{cases}
\tag{1.1.2}
$$

其中：a , b 和 c 是系统参数，很显然，混沌系统（1.1.2）并不是严格反馈混沌系统，但是如果我们对它进行变量替换令：$u_1 = y$, $u_2 = x$, $u_3 = z$ 则原系统可转化为

$$
\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= u_2 - au_1, \\
\dot{u}_2 &= -u_3 - u_1, \\
\dot{u}_3 &= b + u_3(u_2 - c).
\end{aligned}
$$

可以很清晰地看出，转化后的系统满足严格反馈混沌系统的定义，为严格反馈混沌系统.

（2）Chua 混沌系统模型

$$
\begin{cases}
\dot{z}_1 = \alpha(z_2 - z_1 - f(z_1)), \\
\dot{z}_2 = z_1 - z_2 + z_3, \\
\dot{z}_3 = -\beta z_2.
\end{cases}
\tag{1.1.3}
$$

可以看出系统（1.1.3）也不是严格反馈系统的形式，这里我们对变量做一个简单的替换

令 $u_3 = z_1\ u_1 = z_3$, $u_2 = z_2$.

这样系统（1.1.3）就可以转化成严格反馈混沌系统的形式

$$
\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= -\beta u_2, \\
\dot{u}_2 &= u_3 + u_1 - u_2, \\
\dot{u}_3 &= \alpha(u_2 - u_3 - f(u_3)).
\end{aligned}
$$

(3) Lorenz 混沌系统的数学模型

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1),\\ \dot{x}_2 &= -x_1x_3 + \rho x_1 - x_2,\\ \dot{x}_3 &= -\beta x_3 + x_1x_2.\end{aligned} \tag{1.1.4}$$

其中：σ,ρ 和 β 是系统的正参数. 如果令：$g_1(x_1) = \sigma$，$g_2(x_1,x_2) = x_1$ 则可以很明显地看出它满足(1.1.1)的形式,但这里并不能保证 $g_2(x_1,x_2) = x_1$ 不为零,所以他是一个广义反馈混沌系统的形式.

(4) Chen 混沌系统的数学模型

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1),\\ \dot{x}_2 &= (c-a)x_1 - x_1x_3 + cx_2,\\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3.\end{aligned}$$

类似 3,Chen 系统也是广义反馈系统.

我们对一大类混沌系统——严格反馈混沌系统都可以实现滞同步. 我们利用反步法通过单个的控制器,直接设计出一个控制器 U,使其响应反馈混沌系统

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= g_1(y_1)y_2 + f_1(y_1),\\ \dot{y}_2 &= g_2(y_1,y_2)y_3 + f_2(y_1,y_2),\\ &\cdots\\ \dot{y}_3 &= g_{n-1}(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1})y_n + f_{n-1}(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}),\\ \dot{y}_n &= f_n(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},y_n) + U.\end{aligned} \tag{1.1.5}$$

系统(1.1.5)与系统(1.1.1)是滞同步的,即系统(1.1.5)与下列系统(1.1.6)是同步的.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t-\tau) &= g_1(x_1(t-\tau))x_2(t-\tau) + f_1(x_1(t-\tau)),\\ \dot{x}_2(t-\tau) &= g_2(x_1(t-\tau),x_2(t-\tau))x_3(t-\tau) + f_2(x_1(t-\tau),x_2(t-\tau)),\\ &\cdots\\ \dot{x}_{n-1}(t-\tau) &= g_{n-1}(x_1(t-\tau),\cdots,x_{n-1}(t-\tau))y_n + f_{n-1}(x_1(t-\tau),\cdots,x_{n-1}(t-\tau)),\\ \dot{x}_n(t-\tau) &= f_n(x_1(t-\tau),\cdots,x_n(t-\tau)).\end{aligned} \tag{1.1.6}$$

我们利用反步法对系统(1.1.6)和系统(1.1.5)进行设计,这里系统的设计过程分 n 步.

第一步:定义第一个误差变量

$$z_1 = y_1(t) - x_1(t-\tau) ,$$

它沿系统(1.1.6)和系统(1.1.5)的时间导数是

$$\dot{z}_1 = g_1(y_1)y_2 + f(y_1) - g_1(x_1(t-\tau))x_2(t-\tau) - f(x_1(t-\tau)) , \tag{1.1.7}$$

构造第一个部分李雅普诺夫函数为

$$V_1 = \frac{1}{2}z_1^2 .$$

通过简单的计算,可以推出它对时间的导数

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= -z_1^2 + z_1[z_1 + g_1(y_1)y_2 + f(y_1) - g_1(x_1(t-\tau))x_2(t-\tau) - \\ &\quad f(x_1(t-\tau))] \\ &= -z_1^2 + z_1[F_1(y_1,y_2) - F_1(x_1(x-\tau),x_2(x-\tau))]\end{aligned}$$

其中

$$F_1(y_1,y_2) = g_1(y_1)y_2 + y_1 + f(y_1) ,$$

定义第二个误差变量

$$z_2 = F_1(y_1,y_2) - F_1(x_1(t-\tau),x_2(t-\tau)) ,$$

通过这样的表示, $\dot{V}_1$ 可以改写成

$$\dot{V}_1 = -z_1^2 + z_1z_2 .$$

第二步:构造第二个部分李雅普诺夫函数

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}z_2^2 .$$

其沿系统(1.1.6)和(1.1.5)的时间导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= -z_1^2 - z_2^2 + z_2\{z_1 + z_2 + \frac{\partial}{\partial y_1}[F_1(y_1,y_2)][g_1(y_1)y_2 + f_1(y_1)] - \\ &\quad \frac{\partial}{\partial x_1}[F_1(x_1(t-\tau),x_2(t-\tau))][g_1(x_1(t-\tau))x_2(t-\tau) + \\ &\quad f_1(x_1(t-\tau))] + g_1(y_1)[g_2(y_1,y_2) + f_2(y_1,y_2)] - \\ &\quad g_1(x_1(t-\tau))[g_2(x_1(t-\tau),x_2(t-\tau))x_3(t-\tau) + \\ &\quad f(x_1(t-\tau),x_2(t-\tau))]\} \\ &= -z_1^2 - z_2^2 + z_2[F_2(y_1,y_2,y_3) - F_2(x_1,x_2,x_3)]\end{aligned}$$

其中

$$F_2(y_1,y_2,y_3) = g_1(y_1)[g_2(y_1,y_2) + y_1 + F_2(y_1,y_2)] +$$