



刷百题不如解透一题

低年级同步课后提升 / 毕业班专题自主复习

一题一课 高中数学

YITI YIKE
GAOZHONG SHUXUE

高一
无缝对接

主 编 惠红民
本册主编 沈建军

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

一题一课

高中数学(高一无缝对接)

主 编 惠红民

本册主编 沈建军



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

一题一课. 高中数学. 高一无缝对接 / 惠红民主编
—杭州: 浙江大学出版社, 2016. 6
ISBN 978-7-308-15683-7

I. ①一… II. ①惠… III. ①中学数学课—高中—题解
IV. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 054072 号

一题一课. 高中数学(高一无缝对接)

主编 惠红民

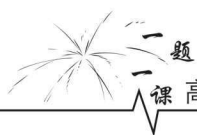
策 划 陈海权(电子信箱: chess332@163.com)
责任编辑 夏晓冬
责任校对 王文舟
封面设计 林智广告
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址: <http://www.zjupress.com>)
排 版 杭州星云光电图文制作有限公司
印 刷 富阳市育才印刷有限公司
开 本 889mm×1194mm 1/16
印 张 6.25
字 数 240 千
版 次 2016 年 6 月第 1 版 2016 年 6 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-15683-7
定 价 14.80 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行中心联系方式: 0571-88925591; <http://zjdxcs.tmall.com>

目 录

| | |
|--------------------------|--------|
| 刷百题不如解透一题 | (1) |
| 第一章 数与式 | (2) |
| 第 1 课 绝对值 | (2) |
| 第 2 课 乘法公式 | (4) |
| 第 3 课 二次根式 | (6) |
| 第 4 课 指数幂的运算 | (8) |
| 第 5 课 公式法分解因式的巧用 | (10) |
| 第 6 课 分组分解法分解因式的巧用 | (12) |
| 第 7 课 十字相乘法分解因式的巧用 | (14) |
| 第 8 课 分 式 | (16) |
| 第二章 集合的概念与运算 | (18) |
| 第 9 课 集合的概念 | (18) |
| 第 10 课 集合间的关系 | (20) |
| 第 11 课 交集运算 | (22) |
| 第 12 课 并集运算 | (24) |
| 第 13 课 补集运算 | (26) |
| 第三章 函数、方程与不等式 | (28) |
| 第 14 课 一元二次方程 | (28) |
| 第 15 课 根与系数的关系 | (30) |
| 第 16 课 集合论下的函数概念 | (32) |
| 第 17 课 函数的定义域 | (34) |
| 第 18 课 函数的值域 | (36) |
| 第 19 课 函数的解析式 | (38) |
| 第 20 课 函数的单调性 | (40) |
| 第 21 课 函数的奇偶性 | (42) |
| 第 22 课 二次函数的图象和性质 | (44) |
| 第 23 课 函数的零点 | (46) |
| 第 24 课 函数图象 | (48) |



| | |
|----------------------|------|
| 第 25 课 一元二次不等式解法 | (50) |
| 第 26 课 分式、高次不等式的解法 | (52) |
| 第四章 统计与概率 | (54) |
| 第 27 课 数据的整理与分析 | (54) |
| 第 28 课 样本抽样方法 | (56) |
| 第 29 课 样本估计总体 | (58) |
| 第 30 课 古典概型的概率 | (60) |
| 第五章 平面几何与立体几何 | (62) |
| 第 31 课 三角形的“四心” | (62) |
| 第 32 课 直线与圆位置关系 | (64) |
| 第 33 课 平行线分线段成比例定理 | (66) |
| 第 34 课 三视图 | (68) |
| 第六章 数学思想与方法 | (70) |
| 第 35 课 分类与整合思想 | (70) |
| 第 36 课 数形结合思想 | (72) |
| 第 37 课 函数与方程思想 | (74) |
| 第 38 课 转化与化归思想 | (76) |
| 答案及解析 | (78) |

刷百题不如解透一题

“学习解题的最好方法之一就是研究例题”

解题，无疑是学好数学的最佳途径。于是，刷题风起，题海浪涌，一时间，必刷题、必做题、高频题、母题等，不一而足。以为刷题是学习数学的魔方，题海则是成就学霸的金丹！固然，学习数学离不开解题，但沉溺题海并不意味着能考好数学，不如通过分析典型例题的解题过程来学会解题更加简短有效。

“题不在多，但求精彩”

“千淘万漉虽辛苦，吹尽狂沙始到金。”直白地表达出我们在“一题一课”系列的“一题”即例题选取上的态度与倾向。每一道例题不仅体现对概念的理解与思考价值，还体现知识与方法的代表性；每一道例题不仅解析精到、解法充满活力，更通过思维拓展，借题发挥，探索其中的内在规律和方法，达成“做一题，通一类，会一片”的目标。

“多刷题，不如多反思”

“学而不思则罔，思而不学则殆。”做题需要产生效果、追求效益。种种经验表明：题不是刷的越多越好，如果缺乏解题反思，不但浪费时间，甚至误导学习。因此，本书在写作体例与排版上都突出了反思的意义与重要性，反思的过程既是对数学知识和解题方法的理解与强化的过程，也是学生内化解题能力的过程。

“解题是一种实践性的技能，就像游泳、滑雪或弹钢琴一样，只能通过模仿、练习和钻研才能占为己有”

例题帮助学生理解并学会运用同步教材所学知识及技能，然后通过变式练习（一课一练）内化落实，既满足低年级同步自主学习，又满足毕业班专题自主复习。

如果您是学生，请加入“一题一课学习交流”QQ群(205743216)，我们一起学习、提高；如果您是老师，请加入“一题一课教师研讨”QQ群(529481589)，我们一起研讨、探索。

“学习的本质，不在于记住哪些知识，而在于它触发了你的思考。”学习数学的道路上，祝愿您学会思考，体会成功！刷百题不如解透一题，“一题一课”系列图书还有哪些分册，请看本书封底。

第一章 数与式

第 1 课 绝对值

1. 绝对值的代数意义: 正数的绝对值是它的本身, 负数的绝对值是它的相反数, 零的绝对值仍是零. 即

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

2. 绝对值的几何意义: 一个数的绝对值, 是数轴上表示它的点到原点的距离.

两个数的差的绝对值的几何意义: $|a-b|$ 表示在数轴上, 数 a 和数 b 之间的距离.

3. 绝对值的性质:

(1) 绝对值是非负数, 即 $|a| \geq 0$;

(2) 互为相反数的两个数的绝对值相等, 即 $|a| = |-a|$;

(3) 若两个数的绝对值相等, 那么这两个数相等或互为相反数, 即若 $|a| = |b|$, 则 $b = \pm a$;

(4) 绝对值最小的数是 0.

根据已知条件化简含绝对值的式子多次出现在高中函数、不等式、数列部分, 化简含绝对值的式子, 关键是去绝对值符号, 先根据所给的条件确定绝对值符号内的数的正负, 然后再去掉绝对值符号. 化简多重绝对值时, 要从里向外依次化简含绝对值的式子.

第 1 题 解下列含有绝对值的问题:

(1) 解不等式 $|x-4| < 1$;

(2) 解不等式 $|x-3| > 1$;

(3) 解不等式 $|x-4| + |x-3| < 3$;

(4) 求使不等式 $|x-4| + |x-3| < a$ 有解的 a 的取值范围;

(5) 求函数 $y = |x-4| + |x-3|$ 的最小值.

【分析】 此类含绝对值的问题在高中数学的学习过程中经常涉及, 我们依据绝对值的代数意义, 用分类讨论的方法求解. 找对分类标准, 使绝对值等于零的那个数所对应的点, 如 $|x-4|$, 要去掉绝对值, 就要讨论 x 与 4 的大小关系, 而对于 $|x-4| + |x-3|$ 含有两个绝对值, 所以要讨论 x 与 3, 4 的大小关系, 但过程较繁; 用绝对值的几何意义去求解十分简便.

【解析】 (1) 方法一: 因为 $|x-4| < 1$, 所以当 $x \geq 4$ 时, $x < 5$, 即 $4 < x < 5$,

当 $x < 4$ 时, $x > 3$, 即 $3 < x < 4$, 综上 $3 < x < 5$.

另外: 由上述分类的过程可知: $-1 < x-4 < 1$, 即 $3 < x < 5$.

方法二: 如图 1, 利用几何意义, x 到 4 的距离小于 1, 所以 $3 < x < 5$.

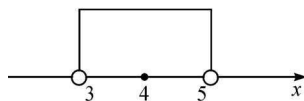


图 1

(2) 因为 $|x-3| > 1$, 所以 $x-3 < -1$ 或 $x-3 > 1$, 即 $x > 4$ 或 $x < 2$.

(3) 解法一: 将数轴分为 $x < 3$, $3 \leq x \leq 4$, $x > 4$ 三个部分.

当 $x < 3$ 时, 原不等式变为 $(4-x) + (3-x) < 3$, $x > 2$, 即 $2 < x < 3$;

当 $3 \leq x \leq 4$ 时, 原不等式变为 $(4-x) + (x-3) < 3$, 即 $1 < 3$ 成立;

当 $x > 4$ 时, 原不等式变为 $(x-4) + (x-3) < 3$, $x < 5$, 即 $4 < x < 5$.

以上三种情况中任一个均可满足题目要求, 故 $2 < x < 5$.

解法二: 如图 2, 由绝对值的几何定义, 原不等式在数轴上的意义是 x 到 3, 4 的距离之和小于 3, 故 $2 < x < 5$.

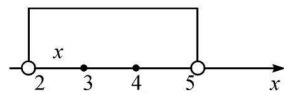


图 2

(4) 由图 2 可知, $|x-4| + |x-3| \geq 1$, 所以 $a > 1$.

(5) 由图 2 可知, $|x-4| + |x-3| \geq 1$ 所以函数 $y = |x-4| + |x-3|$ 的最小值是 1.

【经验分享】 方程中遇到绝对值符号, 利用平方法去绝对值符号, 而在函数与不等式中含绝对值符号, 要找使绝对值等于零的那个数所对应的点, 去绝对值最好画数轴分段. 遇到以下两类含绝对值的不等式可用公式:

$$|ax+b| < c(c > 0) \Leftrightarrow -c < ax+b < c,$$

$$|ax+b| > c(c > 0) \Leftrightarrow ax+b > c \text{ 或 } ax+b < -c.$$



学习心得

一课一练 1 (答案及解析见 P78)

1. 下列叙述正确的是 ()

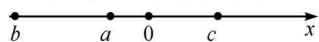
A. 若 $|a| = |b|$, 则 $a=b$ B. 若 $|a| > |b|$, 则 $a > b$ C. 若 $a < b$, 则 $|a| < |b|$ D. 若 $|a| = |b|$, 则 $a = \pm b$ 2. 已知 a, b, c 在数轴上位置如图 1 所示, 则代数式 $|a| + |a+b| + |c-a| - |b-c|$ 的值等于 ()

图 1

A. $-3a$ B. $2c-a$ C. $2a-2b$ D. b 3. 方程 $|x-2016| = 2016-x$ 的解的个数是 ()

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 无穷多个

4. 已知 $x < 0 < z$, $xy > 0$, 且 $|y| > |z| > |x|$, 那么 $|x+z| + |y+z| - |x-y|$ 的值 ()

A. 是正数

B. 是负数

C. 是零

D. 不能确定符号

5. 如果 $|a| + |b| = 5$, 且 $a = -1$, 则 $b =$ _____; 若 $|1-c| < 2$, 则 c 的取值范围是 _____.6. 代数式 $|x-2| + |x+3|$ 的最小值为 _____, 取得最小值时 x 的取值范围为 _____.7. 已知 $|x+1| + |x+4| > 3$, 求 x 的取值范围.8. 解不等式 $|x+1| > |2x-3| - 2$.9. 已知 $|ab-2|$ 与 $|a-1|$ 互为相反数, 求下式的值.

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{(a+1)(b+1)} + \frac{1}{(a+2)(b+2)} + \dots + \frac{1}{(a+2014)(b+2014)}$$



易错追踪



第 2 课 乘法公式

我们在初中已经学习过了下列一些乘法公式:

(1) 平方差公式

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2;$$

(2) 完全平方公式

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2.$$

我们还可以通过证明得到下列一些乘法公式:

(1) 立方和公式

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3;$$

(2) 立方差公式

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3;$$

(3) 三数和平方公式

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac);$$

(4) 两数和立方公式

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$$

(5) 两数差立方公式

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

归纳小结公式的变式,准确灵活运用公式:

① 位置变化, $(x+y)(-y+x)=x^2-y^2$

② 符号变化, $(-x+y)(-x-y)=(-x)^2-y^2=x^2-y^2$

③ 指数变化, $(x^2+y^2)(x^2-y^2)=x^4-y^4$

④ 系数变化, $(2a+b)(2a-b)=4a^2-b^2$

⑤ 换式变化,

$$\begin{aligned} [xy+(z+m)][xy-(z+m)] &= (xy)^2-(z+m)^2 \\ &= x^2y^2-(z+m)(z+m) = x^2y^2-(z^2+zm+zm+m^2) \\ &= x^2y^2-z^2-2zm-m^2 \end{aligned}$$

⑥ 增项变化,

$$\begin{aligned} (x-y+z)(x-y-z) &= (x-y)^2-z^2 \\ &= (x-y)(x-y)-z^2 = x^2-xy-xy+y^2-z^2 \\ &= x^2-2xy+y^2-z^2 \end{aligned}$$

⑦ 连用公式变化,

$$\begin{aligned} (x+y)(x-y)(x^2+y^2) \\ &= (x^2-y^2)(x^2+y^2) \\ &= x^4-y^4 \end{aligned}$$

⑧ 逆用公式变化,

$$\begin{aligned} (x-y+z)^2-(x+y-z)^2 \\ &= [(x-y+z)+(x+y-z)][(x-y+z)-(x+y-z)] \\ &= 2x(-2y+2z) = -4xy+4xz \end{aligned}$$

第 2 题

(1) 已知 $a^2+b^2=13, ab=6$, 求 $(a+b)^2, (a-b)^2, a^3+b^3, a^3-b^3$ 的值.

(2) 已知 $(a+b)^2=7, (a-b)^2=4$, 求 a^2+b^2, ab 的值.

(3) 已知 $a(a-1)-(a^2-b)=2$, 求 $\frac{a^2+b^2}{2}-ab$ 的值.

(4) 已知 $x-\frac{1}{x}=3$, 求 $x^4+\frac{1}{x^4}$ 的值.

【分析】 在公式 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ 中, 如果把 $a+b, a^2+b^2$ 和 ab 分别看作是一个整体, 则公式中有三个未知数, 知道了两个就可以求出第三个.

【解析】 (1) 因为 $a^2+b^2=13, ab=6$.

$$\text{所以 } (a+b)^2=a^2+b^2+2ab=13+2\times 6=25.$$

$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=13-2\times 6=1,$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=\pm 35.$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=\pm 19.$$

$$(2) \text{ 由已知可得 } a^2+2ab+b^2=7 \quad \text{①},$$

$$a^2-2ab+b^2=4 \quad \text{②},$$

$$\text{由①+②得 } 2(a^2+b^2)=11, \text{ 即 } a^2+b^2=\frac{11}{2},$$

$$\text{由①-②得 } 4ab=3, \text{ 即 } ab=\frac{3}{4}.$$

$$(3) \text{ 由 } a(a-1)-(a^2-b)=2, \text{ 得 } a-b=-2,$$

$$\text{所以 } \frac{a^2+b^2}{2}-ab=\frac{1}{2}(a^2+b^2-2ab)=\frac{1}{2}(a-b)^2$$

$$=\frac{1}{2}\times (-2)^2=2.$$

$$(4) \text{ 由 } x-\frac{1}{x}=3, \text{ 得 } \left(x-\frac{1}{x}\right)^2=9, \text{ 即 } x^2+\frac{1}{x^2}-2=9.$$

$$\text{所以 } x^2+\frac{1}{x^2}=11.$$

$$\text{所以 } \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=121, \text{ 即 } x^4+\frac{1}{x^4}+2=121, x^4+\frac{1}{x^4}=$$

119.

【经验分享】 明确公式的结构特征, 这是正确运用正用公式、逆用公式、变用公式的前提. 理解字母的广泛含义, 乘法公式中的字母 a, b 可以是具体的数, 也可以是单项式或多项式. 理解了字母含义的广泛性, 就能在更广泛的范围内正确运用公式, 在代数式的变形、化简、求值中更加轻松自如.



学习心得

一课一练 2 (答案及解析见 P78)

1. 若 $x^2 + \frac{1}{2}mx + k$ 是一个完全平方式, 则 k 等于 ()

- A. m^2 B. $\frac{1}{4}m^2$ C. $\frac{1}{3}m^2$ D. $\frac{1}{16}m^2$

2. 不论 a, b 为何实数, $a^2 + b^2 - 2a - 4b + 8$ 的值 ()

- A. 总是正数 B. 总是负数
C. 可以是零 D. 可以是正数也可以是负数

3. 已知 $a + b + c = 4$, $ab + bc + ac = 4$, 则 $a^2 + b^2 + c^2$ 的值为 ()

- A. 6 B. 8 C. 16 D. 64

4. 化简 $(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$ 的值为 ()

- A. $x^6 - 1$ B. x^6 C. $x^6 + 1$ D. $x^6 + x - 1$

5. 已知 $a + b = 9$, $ab = 14$, 则 $2a^2 + 2b^2 =$ _____, $a^3 + b^3 =$ _____.

6. 计算: $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{10^2}\right) =$ _____.

7. 在公式 $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$ 中, 当 $a = 1, 2, 3, \dots, n$ 时, 可得下列 n 个等式:

$$(1+1)^2 = 1^2 + 2 \times 1 + 1$$

$$(2+1)^2 = 2^2 + 2 \times 2 + 1$$

$$(3+1)^2 = 3^2 + 2 \times 3 + 1$$

... ...

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

将这 n 个等式的左、右两边分别相加, 可推导出求和公式:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \text{_____}. \text{ (用含 } n \text{ 的代数式表示)}$$

在公式 $(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$ 中, 当 $a = 1, 2, 3, \dots, n$ 时, 可得下列 n 个等式:

$$(1+1)^3 = 1^3 + 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1;$$

$$(2+1)^3 = 2^3 + 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1;$$

$$(3+1)^3 = 3^3 + 3 \times 3^2 + 3 \times 3 + 1;$$

... ...

$$(n+1)^3 = n^3 + 3 \times n^2 + 3 \times n + 1.$$

类比上述方法, $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 =$ _____ . (用含 n 的代数式表示).

8. 阅读下列材料并回答问题:

我们已经知道, 完全平方公式可以用平面几何图形的面积来表示, 实际上还有一些等式也可以用这种形式表示, 例如: $(2a+b)(a+b) = 2a^2 + 3ab + b^2$ 就可以用图 1 或图 2 来表示.

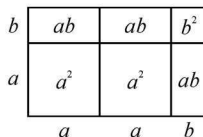


图 1

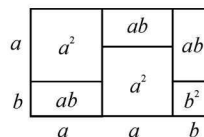


图 2

(1) 请写出图 3 中所表示的代数恒等式: _____;

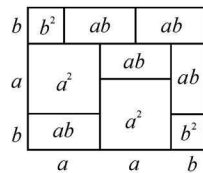


图 3

(2) 试画出一个几何图形, 使它的面积能表示:

$$(a+b)(a+3b) = a^2 + 4ab + 3b^2$$

(3) 请仿照上述方法另写一个含有 a, b 的代数恒等式, 并画出与之对应的几何图形.

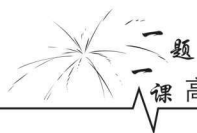


易错追踪

.....

.....

.....



第3课 二次根式

一般地,形如 $\sqrt{a}(a \geq 0)$ 的代数式叫做二次根式.根号下含有字母且不能够开得尽方的式子称为无理式.二次根式的四则运算、分母(子)有理化都是高中阶段函数解析式的化简、指数幂的运算必备的基础知识.

1. 分母(子)有理化

把分母(子)中的根号化去,叫做分母(子)有理化.为了进行分母(子)有理化,需要引入有理化因式的概念.两个含有二次根式的代数式相乘,如果它们的积不含有二次根式,我们就说这两个代数式互为有理化因式,例如 $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{2}$, $3\sqrt{a}$ 与 \sqrt{a} , $\sqrt{3} + \sqrt{6}$ 与 $\sqrt{3} - \sqrt{6}$, $2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$ 与 $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$,等等.一般地, $a\sqrt{x}$ 与 \sqrt{x} , $a\sqrt{x} + b\sqrt{y}$ 与 $a\sqrt{x} - b\sqrt{y}$, $a\sqrt{x} + b$ 与 $a\sqrt{x} - b$ 互为有理化因式.

分母有理化的方法是分母和分子都乘以分子的有理化因式,化去分母中的根号的过程;而分子有理化则是分母和分子都乘以分子的有理化因式,化去分子中的根号的过程.

在二次根式的化简与运算过程中,二次根式的乘法可参照多项式乘法进行,运算中要运用公式 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}(a \geq 0, b \geq 0)$;而对于二次根式的除法,通常先写成分式的形式,然后通过分母有理化进行运算;二次根式的加减法与多项式的加减法类似,应在化简的基础上去括号与合并同类二次根式.

2. 二次根式 $\sqrt{a^2}$ 的意义

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

第3题 化简并求值:

(1) 已知 $a = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$, 求 $\frac{1 - 2a + a^2}{a - 1} - \frac{\sqrt{a^2 - 2a + 1}}{a^2 - a}$ 的值.

(2) 已知 $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2} - \sqrt{3}$,

求 $\frac{b^2 - a^2}{a^2 - ab} \div \left(\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a} \right) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ 的值.

(3) 已知 x, y 为实数, 且实数 m 满足关系式

$$\sqrt{3x + 5y - 2 - m} + \sqrt{2x + 3y - m} = \sqrt{x - 199 + y} \cdot \sqrt{199 - x - y},$$
 试确定 m 的值.

【分析】 (1) 求值问题首先是化简, 本题涉及分母有理化, 即分母和分子都乘以分母的有理化因式, 化去分母中的根号, 将完全平方数开方, 需要讨论正负情况. (2) 化简后代入, 进行二次根式运算. (3) 利用二次根式的取值范围, 将问题转化为二元一次不等式组.

$$\text{【解析】} (1) a = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} < 1, \frac{1}{a} = 2 + \sqrt{3}.$$

$$\text{所以原式} = \frac{(a-1)^2}{a-1} - \frac{\sqrt{(a-1)^2}}{a(a-1)} = \frac{(a-1)^2}{a-1} - \frac{1-a}{a(a-1)} = a-1 + \frac{1}{a} = 2 - \sqrt{3} - 1 + 2 + \sqrt{3} = 3.$$

$$(2) \text{原式} = \frac{(b+a)(b-a)}{a(a-b)} \cdot \frac{a}{(a+b)^2} \cdot \frac{a+b}{ab} = -\frac{1}{ab}.$$

当 $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ 时,

$$\text{原式} = -\frac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})} = -\frac{1}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = 1.$$

(3) 因为 $x - 199 + y$ 与 $199 - x - y$ 互为相反数, 且 $x - 199 + y \geq 0$ 与 $199 - x - y \geq 0$ 同时成立, 所以 $x - 199 + y = 0$, $199 - x - y = 0$, 所以 $x + y = 199$. 所以 $\sqrt{3x + 5y - 2 - m} + \sqrt{2x + 3y - m} = 0$. 又根据算术平方根为非负实数, 有 $3x + 5y - 2 - m = 0$ 且 $2x + 3y - m = 0$, 得 $x + y - m + 2 = 0$, 所以 $m = x + y + 2 = 199 + 2 = 201$.

【经验分享】 二次根式是在学习了平方根、立方根等内容的基础上进行的, 是对“实数”、“整式”等内容的延伸和补充, 对数与式的认识更加完善. 二次根式的化简对勾股定理的应用是很好的补充; 二次根式的概念、性质、化简与运算是高中学习解三角形、一元二次方程、数列和二次函数的基础. 二次根式是初中阶段学习数与式的最后一章, 是式的变形的终结章.

当两个二次根式的被开方数互为相反数时, 可用“夹逼”的方法推出, 两个被开方数同时为零.



学习心得

一课一练 3 (答案及解析见 P78)

1. 下列式子中,属于最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{7}$ B. $\sqrt{9}$ C. $\sqrt{20}$ D. $\sqrt{\frac{1}{3}}$

2. 对于任意的正数 m, n , 定义运算 \ast 为 $m \ast n =$

$$\begin{cases} \sqrt{m}-\sqrt{n} (m \geq n), \\ \sqrt{m}+\sqrt{n} (m < n), \end{cases}$$

计算 $(3 \ast 2) \times (8 \ast 12)$ 的结果为

- A. $2-4\sqrt{6}$ B. 2 C. $2\sqrt{5}$ D. 20

3. 若 $a \leq 0$, 则 $\sqrt{(1-a)^3}$ 的化简结果为 ()

- A. $(a-1)\sqrt{a-1}$ B. $(1-a)\sqrt{1-a}$
C. $(a-1)\sqrt{1-a}$ D. $(1-a)\sqrt{a-1}$

4. 如图 1, 点 E, F, G, H, I, J, K, N 分别是正方形各边的三等分点, 要使中间阴影部分的面积是 5, 那么大正方形的边长应是 ()

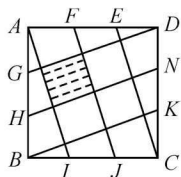


图 1

- A. $\frac{5}{2}\sqrt{5}$ B. $3\sqrt{5}$ C. $5\sqrt{2}$ D. $4\sqrt{5}$

5. 直线 $y = mx + n$ 的图象如图 2 所示, 化简: $|m - n| - \sqrt{m^2} =$ _____.

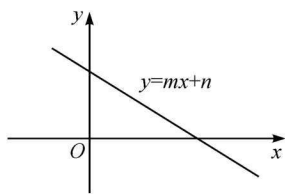


图 2

6. 若 $\frac{\sqrt{2m+n} + |m^2-9|}{\sqrt{3-m}} = 0$, 则 $3m + 6n$ 的立方根为 _____.

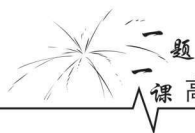
7. 如果按一定次序排列的三个数 a, A, b 满足 $A - a = b - A$, 即 $A = \frac{a+b}{2}$, 则称 A 为 a, b 的等差中项. 如果按一定次序排列的三个数 a, G, b 满足 $\frac{G}{a} = \frac{b}{G}$, 即 $G^2 = ab$ (a, b 同号), 则称 G 为 a, b 的等比中项. 根据前面给出的概念, 求 $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ 和 $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ 的等差中项和等比中项.

8. 阅读与计算: 请阅读以下材料, 并完成相应的任务.

斐波那契 (约 1170—1250) 是意大利数学家, 他研究了一列数, 这列数非常奇妙, 被称为斐波那契数列. (按照一定顺序排列着的一列数叫数列) 在实际任务生活中, 很多花朵的花瓣数是斐波那契数列中的数. 斐波那契数列还有很多性质, 如斐波那契数列中的第 n 个数可用 $\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$ (其中 $n \geq 1$) 表示, 这是无理数表示有理数的一个范例. 请根据以上材料, 通过计算求出斐波那契数列中的第 1 个数、第 2 个数和第 3 个数.



易错追踪



第 4 课 指数幂的运算

我们在初中数学的学习过程中,已经了解整数指数幂的概念和运算性质.本课我们将在回顾平方根和立方根的基础上,类比出正数的 n 次方根的定义,从而把指数推广到分数指数,进而推广到有理数指数,再推广到实数指数,并将幂的运算性质由整数指数幂推广到实数指数幂.初中数学中的整数指数幂的运算性质为 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $(ab)^n = a^n b^n$, 在整数指数幂的运算基础上,类比推广以下三个指数幂的运算.

(1) 当 n 是奇数时, $\sqrt[n]{a^n} = a$,

当 n 是偶数时, $\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a, & (a \geq 0), \\ -a, & (a < 0). \end{cases}$

(2) 分数指数幂:

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} (a > 0, n > 1), m, n$ 为自然数;

$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} (a > 0, n > 1), m, n$ 为自然数.

(3) 实数指数幂的运算性质:

① $a^r \cdot a^s = a^{r+s} (a > 0), r, s$ 均为实数;

② $(a^r)^s = a^{rs} (a > 0), r, s$ 均为实数;

③ $(ab)^r = a^r b^r (a > 0), r, s$ 均为实数.

通过与初中所学的知识进行类比,理解分数指数幂的概念,进而学习指数幂的性质.掌握分数指数幂和根式之间的互化,掌握分数指数幂的运算性质.

第 4 题 求下列各式的值.

(1) 根式运算:

① $\sqrt[3]{(-8)^3}$

② $\sqrt{(-10)^2}$

③ $\sqrt[4]{(3-\pi)^4}$

④ $\sqrt{(a-b)^2}$

(2) 分数指数、负指数幂运算:

① $8^{\frac{2}{3}}$

② $25^{-\frac{1}{2}}$

③ $(\frac{1}{2})^{-5}$

④ $(\frac{16}{81})^{-\frac{3}{4}}$

(3) 化简(综合运算):

① $\frac{5x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{4}x^{-1}y^{\frac{1}{2}})(-\frac{5}{6}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}})}$

② $\frac{m+m^{-1}+2}{m^{-\frac{1}{2}}+m^{\frac{1}{2}}}$

【分析】 (1) 此题考查了当 n 是奇数时, $\sqrt[n]{a^n} = a$; 当 n 是偶数时, $\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a, & (a \geq 0), \\ -a, & (a < 0). \end{cases}$

(2) 考查分数指数幂、负指数幂运算.

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} (a > 0, n > 1), m, n$ 为自然数

然数

(3) 实数指数幂的综合运算, 初、高中知识综合.

【解析】 (1) ① $\sqrt[3]{(-8)^3} = -8$

② $\sqrt{(-10)^2} = 10$

③ $\sqrt[4]{(3-\pi)^4} = \pi - 3$

④ $\sqrt{(a-b)^2} = \begin{cases} a-b, & (a \geq b), \\ b-a, & (a < b). \end{cases}$

(2) ① $8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3 \times \frac{2}{3}} = 2^2 = 4$

② $25^{-\frac{1}{2}} = (5^2)^{-\frac{1}{2}} = 5^{2 \times (-\frac{1}{2})} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

③ $(\frac{1}{2})^{-5} = (2^{-1})^{-5} = 2^{-1 \times (-5)} = 32$

④ $(\frac{16}{81})^{-\frac{3}{4}} = (\frac{2}{3})^{4 \times (-\frac{3}{4})} = (\frac{2}{3})^{-3} = \frac{27}{8}$

(3) ① 原式 = $\frac{5x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}}{\frac{5}{24}x^{-1}y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}}}$

= $\frac{24}{5} \times 5 \times x^{-\frac{2}{3}+1-\frac{1}{3}} \times y^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}$

= $24x^0y^{\frac{1}{6}}$

= $24y^{\frac{1}{6}}$;

② 原式 = $\frac{(m^{\frac{1}{2}})^2 + 2m^{\frac{1}{2}} \cdot m^{-\frac{1}{2}} + (m^{-\frac{1}{2}})^2}{m^{\frac{1}{2}} + m^{-\frac{1}{2}}}$

= $\frac{(m^{\frac{1}{2}} + m^{-\frac{1}{2}})^2}{m^{\frac{1}{2}} + m^{-\frac{1}{2}}} = m^{\frac{1}{2}} + m^{-\frac{1}{2}}$

【经验分享】 本课内容蕴涵了许多重要的数学思想方法, 如类比的思想(指数幂运算律的推广)、逼近的思想(有理数指数幂逼近无理数指数幂), 掌握运算性质, 能够区别 $\sqrt[n]{a^n}$ 与 $(\sqrt[n]{a})^n$ 的异同.

有理数指数幂运算的一般思路:

化负指数为正指数, 化根式为分数指数幂, 化小数为分数, 灵活运用指数幂的运算性质. 同时要注意运用整体的观点、方程的观点处理问题, 或利用已知的公式、换元等简化运算过程.



学习心得

.....

.....

.....

一课一练 4 (答案及解析见 P79)

1. 下列说法中, 正确的是 ()

- ① 16 的 4 次方根是 2;
 ② $\sqrt[4]{16}$ 的运算结果是 ± 2 ;
 ③ 当 n 为大于 1 的奇数时, $\sqrt[n]{a}$ 对任意 $a \in \mathbf{R}$ 都有意义;
 ④ 当 n 为大于 1 的偶数时, $\sqrt[n]{a}$ 只有当 $a \geq 0$ 时才有意义.
- A. ①③④ B. ②③④
 C. ②③ D. ③④

2. 若 $2 < a < 3$, 化简 $\sqrt{(a-2)^2} + \sqrt[4]{(3-a)^4}$ 的结果是 ()

- A. $5-2a$ B. $2a-5$
 C. 1 D. -1

3. 在 $(-\frac{1}{2})^{-1}$, $2^{-\frac{1}{2}}$, $(\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}$, 2^{-1} 中, 最大的是 ()

- A. $(-\frac{1}{2})^{-1}$ B. $2^{-\frac{1}{2}}$
 C. $(\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}$ D. 2^{-1}

4. $4a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}} \div (-\frac{2}{3}a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}})$ 的值为 ()

- A. $-6a$ B. 6
 C. -6 D. $6a$

5. 下列结论中, 正确的是_____.

- ① 当 $a < 0$ 时, $(a^2)^{\frac{3}{2}} = a^3$;
 ② $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ ($n > 0$);
 ③ 函数 $y = (x-2)^{\frac{1}{2}} - (3x-7)^0$ 中 x 的范围是 $x > 2$;
 ④ 若 $100^a = 5$, $10^b = 2$, 则 $2a + b = 1$.

6. 若 $a > 0$, 且 $a^x = 3$, $a^y = 5$, 则 $a^{2x + \frac{y}{2}} =$ _____.

7. 若 $x > 0$, 则 $(2x^{\frac{1}{4}} + 3^{\frac{3}{2}})(2x^{\frac{1}{4}} - 3^{\frac{3}{2}}) - 4x^{-\frac{1}{2}} \cdot (x - x^{\frac{1}{2}})$
 =_____.

8. 计算: $2^{-\frac{1}{2}} + \frac{(-4)^0}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{(1-\sqrt{5})^0} \times 8^{\frac{2}{3}}$.

9. 化简: $\frac{a^{\frac{4}{3}} - 8a^{\frac{1}{3}}b}{4b^{\frac{2}{3}} + 2\sqrt[3]{ab} + a^{\frac{2}{3}}} \div (1 - 2\sqrt[3]{\frac{b}{a}}) \times \sqrt[3]{a}$.

10. 若 $x > 0$, $y > 0$, 且 $x - \sqrt{xy} - 2y = 0$, 求 $\frac{2x - \sqrt{xy}}{y + 2\sqrt{xy}}$ 的值.

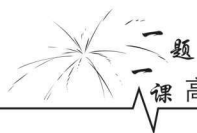


易错追踪

.....

.....

.....



第 5 课 公式法分解因式的巧用

因式分解是代数式的一种重要恒等变形.它是学习分式的基础,又在代数式的运算、解方程、函数中有广泛的应用.通过本课的学习,不仅能使学生掌握因式分解的概念和原理,而且又为继续学习因式分解做好了充分的准备.因此,它起到了初、高中承上启下的作用.

把乘法公式反过来,就可以得到因式分解的公式.

主要有:平方差公式: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

完全平方公式: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

立方和、立方差公式: $a^3 \pm b^3 = (a \pm b) \cdot (a^2 \mp ab + b^2)$

补充:欧拉公式:

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \end{aligned}$$

特别地:(1)当 $a+b+c=0$ 时,有 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$;

(2)当 $c=0$ 时,欧拉公式变为两数的立方和公式.

运用公式法分解因式的关键是要弄清各个公式的形式和特点,熟练地掌握公式.但有时需要经过适当的组合、变形后,方可使用公式.

用公式法因式分解再求代数式的值,解方程、几何综合题中也有广泛的应用.因此,正确掌握公式法因式分解,熟练灵活地运用它,对高中的学习很有帮助.

第 5 题 已知 a, b, c 是不全相等的实数,且 $abc \neq 0, a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

试求:

(1) $a+b+c$ 的值; (2) $a^2 + 2b + 2c$ 的最小值;

(3) $a(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}) + b(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}) + c(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$ 的值.

【分析】 (1)由因式分解可知 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c) \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$,

故需考虑 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ 的值的情况.

(2)整体消元,转化为关于 a 的二次三项式配方.

(3)所求代数式较复杂,考虑恒等变形.

【解析】 (1)因为 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$,所以 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$.

又因为 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$,

所以 $(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$.

而 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$,

因为 a, b, c 不全相等,所以 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca > 0$,所以 $a+b+c=0$.

(2)因为 $a+b+c=0$,

所以 $a^2 + 2b + 2c = a^2 - 2a = (a-1)^2 - 1$,

因为 $(a-1)^2 - 1 \geq -1$,

所以 $a^2 + 2b + 2c$ 的最小值为 -1 .

(3)因为 $abc \neq 0$.

所以原式 $= \frac{1}{abc}[a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)]$,

而 $a+b+c=0$,即 $a = -(b+c)$.

$$\begin{aligned} \text{所以原式} &= \frac{1}{abc}[(b+c)^3 - b^3 - c^3] \\ &= \frac{1}{abc}[(b+c)^3 - (b^3 + c^3)] \\ &= \frac{1}{abc}[(b+c)^3 - (b+c)(b^2 - bc + c^2)] \\ &= \frac{1}{abc}[(b+c)(b^2 + c^2 - b^2 + 3bc - c^2)] \\ &= \frac{1}{abc}[3bc(b+c)] = \frac{1}{abc}(-3abc) = -3. \end{aligned}$$

【经验分享】 了解因式分解的意义,理解它与整式乘法在整式运算过程中的逆向关系;整体观察、分析,运用类比的数学思想方法.由整式乘法到因式分解的变形是一个逆向思维.在学习整式乘法的过程中,要打破思维定式,否则会阻碍新概念的形成.因式分解与配方法是在代数式的化简与求值中的常用方法.



学习心得

一课一练 5 (答案及解析见 P79)

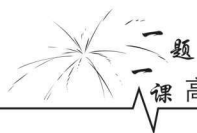
- 把 $a^2 + 2a - b^2 - 2b$ 分解因式的结果是 ()
 A. $(a-b)(a+2)(b+2)$ B. $(a-b)(a+b+2)$
 C. $(a-b)(a+b)+2$ D. $(a^2-2b)(b^2-2a)$
- 已知多项式 $2x^3 - x^2 + m$ 有一个因式是 $2x+1$, 则 m 的值为 ()
 A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$
 C. 1 D. 2
- 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三条边, 且满足 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = 0$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为 ()
 A. 直角三角形 B. 等腰三角形
 C. 等腰直角三角形 D. 等边三角形
- 若 $x^3 + y^3 = 27, x^2 - xy + y^2 = 9$, 则 $x^2 + y^2 =$ _____.
- 已知 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, 则 $\omega^{2016} =$ _____.
- 证明: 两个连续奇数的平方差一定是 8 的倍数.

7. 已知 $a = \frac{1}{2}m + 1, b = \frac{1}{2}m + 2, c = \frac{1}{2}m + 3$, 求 $a^2 + 2ab + b^2 - 2ac + c^2 - 2bc$ 的值.

8. 若 a, b, c 是三角形的三条边, 求证: $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc < 0$.



易错追踪



第6课 分组分解法分解因式的巧用

分组分解法的原则是分组后可以直接提公因式,或者可以直接运用公式.使用这种方法的关键在于分组适当,而在分组时,必须有预见性,能预见到下一步能继续分解.而“预见”源于细致的“观察”,分析多项式的特点,恰当的分组是分组分解法的关键.

应用分组分解法因式分解,不仅可以考察提公因式法、公式法,同时它在代数式的化简、求值及一元二次方程、函数等学习中也有重要作用.

第6题 已知函数 $y=x^3-x^2-x+1$.

- (1) 分解因式 x^3-x^2-x+1 ;
- (2) 求方程 $x^3-x^2-x+1=0$ 的根;
- (3) 当 $x>-1$ 时,比较函数值 y 与 0 的大小;
- (4) 画出函数 $y=x^3-x^2-x+1(x\geq 0)$ 的草图.

【分析】 解决这道题,关键在于分解因式 x^3-x^2-x+1 .一般先观察某三项是否是完全平方式.如果是,就考虑“一、三”分组;如果不是,就考虑“二、二”分组,此题就是“二、二”分组,有三种不同的分组方式,此时四项式变成两个整体,提取公因式后,再进一步分解;第(2)(3)(4)问在第(1)问的基础上便迎刃而解.同时体现了函数与不等式的关系,第(4)问函数 $y=x^3-x^2-x+1$ 的图象和性质在高中中的导数部分经常考查,在这里加了限制条件 $x\geq 0$,降低了难度,可以通过描点,或类比二次函数的部分性质画出函数图象.

【解析】 (1) 解法一: x^3-x^2-x+1
 $= (x^3-x^2)-(x-1)$
 $= x^2(x-1)-(x-1)$
 $= (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1)$

解法二: $x^3-x^2-x+1 = (x^3-x)-(x^2-1)$
 $= x(x^2-1)-(x^2-1) = (x-1)(x^2-1)$
 $= (x-1)^2(x+1)$

解法三: $x^3-x^2-x+1 = (x^3+1)-(x+x^2)$
 $= (x+1)(x^2-x+1)-x(x+1)$
 $= (x+1)(x^2-x+1-x) = (x-1)^2(x+1)$

(2) 由(1)可知 $x^3-x^2-x+1 = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1)$,

所以 $x^3-x^2-x+1=0$, 即 $(x-1)^2(x+1)=0$,

$(x-1)^2=0$ 或 $x+1=0$, $x=1$ 或 $x=-1$.

所以 $x^3-x^2-x+1=0$ 的根为 $x=1$ 或 $x=-1$.

(3) 函数 $y=x^3-x^2-x+1 = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1)$,

当 $x>-1$ 时, $(x-1)^2\geq 0$, $x+1>0$,

所以 $(x-1)^2(x+1)\geq 0$,

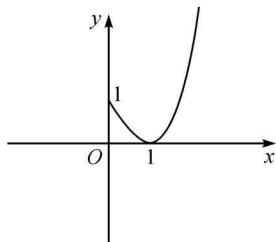
所以 $y\geq 0$.

(4) 由(2)可知方程 $x^3-x^2-x+1=0$ 的根是 $x=1$ 或 $x=-1$.

当 $x\geq 0$ 时, 函数 $y=x^3-x^2-x+1$ 的图象过点 $(1,0)$;

当 $x\geq 0$ 时, $y\geq 0$, 当 $x=0$ 时, $y=1$;

当 $0\leq x<1$ 时, 通过描点, 发现 y 随 x 的增大而减小, 当 $x\geq 1$ 时, 通过描点, 发现 y 随 x 的增大而增大, 所以大致草图如下:



【经验分享】 分组分解法在初中数学中的应用: 分式的约分与通分、解一元二次方程、分式方程; 在高中数学中的应用更加广泛: 如无理方程、特殊的高次方程, 解一元二次不等式及三角函数式的恒等变形不等式证明. 因此, 学好因式分解对于代数知识的后续学习, 具有相当重要的意义, 代数方面在数学计算、化简、证明题中的应用较多, 在几何学中同样有应用.

小技巧: 四项或四项以上多项式可用分组法.

- ① 按一个字母分组;
- ② 按两个字母整理;
- ③ 等项分组或按公式分组.



学习心得
