YUEDU SHUXUE

阅读数学

B版

许建萍 著

- 9讲 微型讲座 实现从知识到能力的飞跃
- 70%+30% 化难为易 达到从课本到竞赛的延伸
- A版/B版 读练结合 成就从学生到学霸的梦想

9

九年级

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

B 版

阅 读 数 学

九年级

许建萍 著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

阅读数学. 九年级:B版 / 许建萍著. —杭州:浙江大学出版社,2016.7
ISBN 978-7-308-15772-8

Ⅰ.①阅… Ⅱ.①许… Ⅲ.①中学数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 082003 号

阅读数学九年级 B版
许建萍 著

责任编辑 夏晓冬
责任校对 余梦洁
封面设计 林智广告
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址:http://www.zjupress.com)
排 版 杭州星云光电图文制作有限公司
印 刷 浙江新华印刷技术有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 10.25
字 数 249 千
版 印 次 2016 年 7 月第 1 版 2016 年 7 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-15772-8
定 价 25.00 元

浙江大学出版社发行中心联系方式(0571)88925591;http://zjdxcbs.tmall.com

作者的故事

身为初中数学教师的我,常常因繁重的教学工作而疏于对女儿数学学习的引导。直到女儿小学五年级第二学期结束时,她对我说:“妈妈,我想不读六年级了,学校六年级的课程差不多已经上完了,我想读初中了。”我才猛然觉得愧对孩子。当时因为要带初三,我担心难以兼顾好学生和女儿,所以就对女儿说:“等妈妈带好这届学生,那时你就可以在妈妈班里读初一。”一方面,我能近距离地关心女儿;另一方面,也想在女儿身上做个尝试,让一个在小学阶段没有接受奥数训练的孩子,通过“阅读数学”的方式,能喜欢上数学,至少不把学数学当作一件苦事、难事。

我的“阅读数学”尝试是成功的。女儿不仅真的喜欢上了数学,轻松地完成了高中阶段的学习,而且就读上海财经大学经济学院数量经济专业时,仍然专注于数学,自己组队参加全美建模大赛,负责数学和英语翻译,在没有专门指导教师的情况下获得了二等奖。

我的“阅读数学”尝试是丰收的。我在带女儿的同时也带出了一批喜欢数学的学生,从初一让他们戴着红领巾进初三数学竞赛试场玩数学,到初二有一人获市一等奖,最后在初三获一等奖人数占参赛学生总数的1/4,其中一人以满分获省一等奖。该学生后来以外地生第三名的成绩进入上海中学实验班学习,在他读高二第一学期时参加全国数学联赛,获得上海市第13名(参赛高二学生中第二名)并进入了数学奥林匹克冬令营,在冬令营中获二等奖,最后保送北京大学数学系。还有两人分别以第一名和第三名的成绩考入复旦大学附属中学实验班,一人进入计算机奥林匹克冬令营,保送北京大学计算机系,另一人保送复旦大学。提起这三位学生,还有一个令我记忆深刻的故事。在他们读初二前的暑假里,有位老师拿来了一道因式分解题,虽然这三位学生没有正式学过因式分解,但考虑到在我的辅导班里已经让他们“阅读”过该内容,我也讲过一二,于是电话通知他们试试。结果非常有趣:第一位同学来电话说,他实在想不出思路,请教我方法。第二位同学不久也来电话,告知已经做出,方法与我的不一样。在了解了他的方法后,我告诉他我的方法。阅卷结束后我电话询问第三位同学,他说想继续攻题,到晚上来电话告诉我攻题成功,他的方法与前两种方法都不同,我与他交流了其他两种方法。令我始料未及的是,第一位同学晚上又打来电话询问其他两位同学是否做出,他们的方法是什么?作为老师,我真的很满意这三位同学的学习方式和钻研精神。但现在细想,他们三位的智力水平相当,第一位同学以最少的时间获取三种方法。在高中阶段,该同学作为高二学生入选中国数学奥林匹克冬令营并获二等奖,这与他特别善于吸取他人思想精华的学习

方法不无关系。

“它山之石可以攻玉”，是“阅读数学”的逻辑起点。“熟读唐诗三百首，不会作诗也会吟”，数学学习也一样。一直以来，初中数学让许多学生望而生畏，有的花了大量时间，但学习效果并不理想。“阅读数学”可以让学生喜欢数学。以“阅读数学”的方式教数学，让我一直幸福地教书，我的幸福在于我欣赏并信任我的学生，从来不没收他们参考用书的答案，让他们通过“阅读数学”来快速掌握知识，我则尽可能帮助补充其他方法，或提炼出规律，或帮学生看透难题本质，变竞赛题为课本题，最后我的学生都喜欢数学。作为我的学生，他们会自信地走进竞赛考场，发挥出自己的水平。十多年来，我每天在收集整理解题思路，品位着它们漂亮方法背后的思维方式，现在终于成集，《阅读数学》是开放性思维与创造性思维的融合，我相信这本书会让害怕数学的学生在阅读学长们的好方法后喜欢数学，并以最快的方式欣赏到数学的漂亮，忍不住地动手研究题目，把做数学题目当作玩游戏，健康快乐地成长。我更相信，这本书可以让优秀学生找到知音和乐趣，实现跨越式提升。

有新解题方法的同学，欢迎发邮件至1286216158@qq.com。再版时会考虑引入你的新方法，一旦引入，你的名字和你的智慧将出现在书中，期待数学思维的碰撞。

目　　录

第 1 章　二次函数

1.1　二次函数的图象与解析式

知识窗

我们通常将函数 $y=ax^2+bx+c$(a,b,c 为常数,$a\neq0$)称为 x 的二次函数,其图象为一条抛物线,与抛物线相关的知识有以下几点:

(1)a,b,c 的值决定了抛物线的大致位置.

(2)抛物线关于直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$对称,抛物线的开口方向、开口大小仅与 a 的值相关;对称轴在 y 轴的左侧时,a,b 同号;对称轴在 y 轴右侧时,a,b 异号;抛物线在顶点$\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$处取得最值.

(3)抛物线的解析式有下列三种形式:

①一般式:$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$;

②顶点式:$y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$,其中(h,k)是抛物线的顶点坐标;

③交点式:$y=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq0)$,当抛物线与 x 轴有交点时使用交点式,式中 x_1,x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实数根,也是抛物线与 x 轴交点的横坐标,此时抛物线的对称轴为直线 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$.

例题精选

例题 1　根据题意分析下列各题选用二次函数的哪种解析式较为合适,并求出解析式.

(1)已知二次函数图象过$(0,-6)$,$(2,-4)$,$(-2,0)$三点;

(2)已知二次函数图象过点$(2,-2)$,顶点为$(1,-4)$;

(3)已知二次函数图象过$(1,0)$,$(5,0)$,$\left(2,-\dfrac{3}{2}\right)$三点;

(4)已知二次函数图象过$(1,3)$,$(5,3)$,$\left(2,\dfrac{3}{2}\right)$三点.

例题 2 将抛物线 $y=-2x^2$ 向_____平移_____个单位长度，再向_____平移_____个单位长度，可以通过点(0,0)及(1,6).

例题 3 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 1-1 所示，则下列六个代数式：b^2-4ac，abc，$a-b+c$，$a+b+c$，$3a-b$，$4a-2b+c$ 中，其值为负的式子有________个.

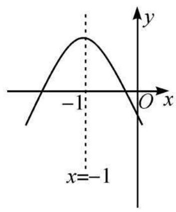


图 1-1

例题 4 证明：无论 a 取何实数，抛物线 $y=x^2+(a+1)x+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}$ 都通过一个定点，而且这些抛物线的顶点都在一条确定的抛物线上.

例题 5 作出函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+|x|-2$ 的图象.

小 结

对称是一种数学美，它体现了整体的和谐与平衡之美. 抛物线是一种轴对称图形，请同学们在解题过程中积极捕捉和创造这种对称关系，以便从整体上把握问题. 由抛物线捕捉对称信息的方式有以下两种：

(1)从抛物线上两点的纵坐标相等获得对称信息；

(2)从抛物线的对称轴方程与抛物线被 x 轴所截得的弦长获得对称信息.

训练场

1. 填空题

(1)二次函数 $y=(x-2)(2x+1)$ 图象的顶点坐标是________，对称轴方程是________，与 x 轴的交点坐标为________，与 y 轴的交点坐标为________；当 $x=$________时，y 的最________值等于________，当________时，y 随 x 的增大而减小；当________时，$y>0$；当________时，$y<0$.

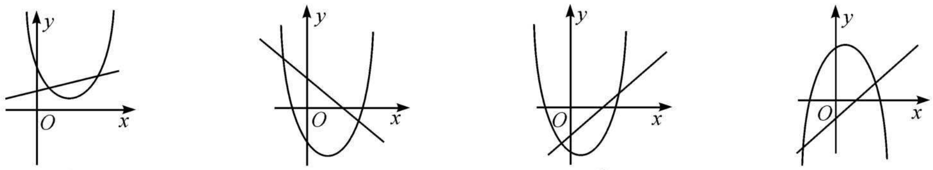
(2)把抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+1$ 向左平移 3 个单位长度，再向下平移 2 个单位长度，得到的抛物线解析式为________.

(3)若抛物线 $y=ax^2$ 与 $y=2x^2+1$ 的形状相同，则 $a=$________.

(4)形状与抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 相同，顶点为(1,2)的抛物线的解析式是______________.

2.选择题

(1)已知函数 $y=ax+b$ 和 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$，那么它们的图象在同一象限内可以是(　　)



A　　　B　　　C　　　D

(2)若函数 $y=\begin{cases}x^2+2(x\leqslant2),\\2x(x>2),\end{cases}$ 则当 $y=8$ 时，自变量 x 的值是(　　)

A. $\pm\sqrt{6}$　　B. 4　　C. $-\sqrt{6}$或 4　　D. $\pm\sqrt{6}$或 4

(3)把函数 $y=3x^2+6mx+n$ 的图象向左平移 2 个单位长度，再向上平移 3 个单位长度，所得图象的函数解析式为 $y=3x^2+18x+26$，则 m,n 的值分别为(　　)

A. $-3,8$　　B. $1,8$　　C. $2,8$　　D. $1,-1$

(4)在直角坐标系中，若移动二次函数 $y=-2(x-2014)(x-2015)+8$ 的图象，使其与 x 轴交于两点，且这两点之间的距离为 1 个单位长度，则移动方式为(　　)

A. 向上移动 4 个单位长度　　B. 向下移动 4 个单位长度

C. 向上移动 8 个单位长度　　D. 向下移动 8 个单位长度

4.已知抛物线方程为 $y=x^2-2x+5$.

(1)将抛物线向右平移________个单位长度后，图象经过点(3,5)；

(2)将抛物线向下平移________个单位长度后，图象经过点(3,5)；

(3)写出该抛物线关于 x 轴对称的抛物线的解析式：________________；

(4)写出该抛物线关于 y 轴对称的抛物线的解析式：________________；

(5)写出该抛物线关于原点成中心对称的抛物线的解析式：________；

(6)写出该抛物线绕着顶点旋转 180°后得到的抛物线的解析式：________；

(7)写出该抛物线绕着点(5,0)旋转 180°后得到的抛物线的解析式：________.

(8)写出该抛物线绕着点(3,1)旋转 180°后得到的抛物线的解析式：________.

5.已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的两个交点为 $A(-1,0)$,$B(5,0)$,与 y 轴的交点为 C,若$\triangle ABC$ 的面积为 12,求二次函数的解析式.

6.抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的图象如图 1-2 所示.

(1)判断 a,b,c,b^2-4ac 的符号;

(2)当 $OA=OB$ 时,求 a,b,c 所满足的关系.

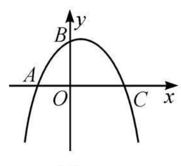


图 1-2

7.已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象如图 1-3 所示，有下列五个代数式：①$abc<0$，②$a+c>b$，③$4a+2b+c>0$，④$2c<3b$，⑤$a+b>m(am+b)$（$m\neq1$ 的实数），其中正确的结论有（　　）

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个

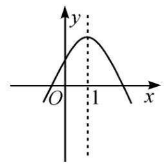


图 1-3

8.已知点 A，B 的坐标分别为 $(1,4)$ 和 $(4,4)$，如图 1-4 所示，抛物线 $y=a(x-m)^2+n$ 的顶点在线段 AB 上运动，与 x 轴交于 C，D 两点（点 C 在点 D 的左侧）．若点 C 的横坐标的最小值为 -3，则点 D 的横坐标的最大值为（　　）

A. -3　　B. 1

C. 5　　D. 8

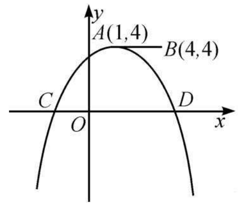


图 1-4

9.求抛物线 $y=3x^2-6x+7$ 关于点 $(2,1)$ 对称的抛物线的解析式．

10.将函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象绕 y 轴翻转 180°，再绕 x 轴翻转 180°，所得函数图象所对应的解析式为________________．

11.已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 y 轴交于点 $Q(0,1)$，与 x 轴交于 M，N 两点，M，N 两点的横坐标的平方和为 6，函数图象的顶点 P 在 x 轴的上方，且 $S_{\triangle MQN}:S_{\triangle MPN}=1:2$，求此二次函数的解析式．

12. 抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+bx-2$ 与 x 轴交于 A,B 两点，与 y 轴交于 C 点，D 是顶点，其中 $A(-1,0)$，$M(m,0)$ 是 x 轴上的动点. 当 $MC+MD$ 值最小时，求 m 的值.

13. 将抛物线 $y=-2x^2-1$ 向上平移若干个单位长度，使抛物线与坐标轴有三个交点，如果这些交点能构成直角三角形，那么平移的距离为________.

14. 如图 1-5 所示，在平面直角坐标系中，某二次函数的图象经过点 $A(1,0)$，$B(3,0)$，设这个二次函数的顶点为 D，与 y 轴交于点 C，它的对称轴与 x 轴交于点 E，连结 AD，DE，DB 和 AC，当 $\triangle AOC$ 与 $\triangle DEB$ 相似时，求这个二次函数的解析式.

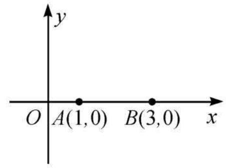


图 1-5

1.2　二次函数的性质

知识窗

二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 有以下性质：

1. 增减性.

①当 $a>0$ 时，抛物线开口方向向上，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，二次函数达到最小值：$y=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$；二次函数无最大值.

当 $x\leqslant -\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x\geqslant -\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大.

②当 $a<0$ 时，抛物线开口方向向下，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，二次函数达到最大值：$y=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$；二次函数无最小值.

当 $x\leqslant -\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x\geqslant -\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小.

2. 二次函数的图象与 x 轴有无交点是由 b^2-4ac 的符号决定的.

当 $b^2-4ac>0$ 时，抛物线与 x 轴有两个交点；

当 $b^2-4ac=0$ 时，抛物线与 x 轴有一个交点；此时抛物线为 $y=a(x-m)^2$，ax^2+bx+c 为完全平方式；

当 $b^2-4ac<0$ 时，抛物线与 x 轴没有交点；此时抛物线解析式无法写成交点式，ax^2+bx+c 在实数范围内不能因式分解.

3. 若 $b^2-4ac>0$，则抛物线与 x 轴有两个交点，坐标分别为 $\left(\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},0\right)$，$\left(\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},0\right)$；记 $b^2-4ac=\Delta$，则抛物线在 x 轴上截出的距离（两交点间的距离）为 $\left|\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}-\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$.

4. 当 $a>0$ 时，

①若 $b^2-4ac\leqslant 0$，则抛物线在 x 轴上方，即 $y\geqslant 0$；因此一元二次不等式 $ax^2+bx+c\geqslant 0$ 的解为全体实数，一元二次不等式 $ax^2+bx+c<0$ 无实数解.

②若 $b^2-4ac>0$，则抛物线与 x 轴有两个交点，坐标分别为 $\left(\dfrac{-b}{2a}-\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},0\right)$，$\left(\dfrac{-b}{2a}+\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},0\right)$，记 $\dfrac{-b}{2a}-\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=x_1$，$\dfrac{-b}{2a}+\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=x_2$.

二次函数在两交点之间的图象在 x 轴下方，即当 $x_1<x<x_2$ 时，$y<0$；

二次函数在两交点之外的图象在 x 轴上方，即当 $x<x_1$ 或 $x>x_2$ 时，$y>0$.

因此一元二次不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解为 $x_1<x<x_2$；一元二次不等式 ax^2+bx+c

>0 的解为 $x<x_1$ 或 $x>x_2$.

当 $a<0$ 时,同理可推得相应结论.

例题精选

例题 1 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$,当 $x=3$ 时取得最大值 10,并且它的图象在 x 轴上截得的线段长为 4,求该二次函数的解析式.

例题 2 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 过 $(0,4)$,$(2,-2)$ 两点,当抛物线在 x 轴上截得的线段最短时,求这时的抛物线解析式.

例题 3 若函数 $y=4x^2-4ax+a^2-2a+2(0\leqslant x\leqslant 2)$ 的最小值为 3,求 a 的值.

小　结

讨论二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的增减性时,关键要抓住对称轴,分对称轴在 y 轴的左侧和右侧进行讨论.抛物线的一部分图象的最值问题也要分情况讨论,当顶点能够取到时,顶点处的函数值即为最值;如果顶点取不到,则在曲线的两个端点处取到最值.

训练场

1.填空题

(1)当二次函数 $y=x^2-4x-10$ 取得最小值时,则自变量 $x=$________.

(2)若函数 $y=(a-1)x^2-4x+4$ 的图象与 x 轴只有一个交点,则 $a=$________.

(3)若开口方向向下的抛物线 $y=(m^2-2)x^2+2mx+1$ 的对称轴经过点$(-1,3)$,则 $m=$________.

(4)对于二次函数 $y=(x-1)^2+(x-3)^2$,当 $x=$________时,函数有最小值为________.

(5)已知二次函数 $y=x^2-2ax+3$(a 为常数)的图象上有三点:$A(a-3,y_1)$,$B(a+1,y_2)$,$C(a+2,y_3)$,则 y_1,y_2,y_3 的大小关系是________.

2.选择题

(1)已知二次函数的图象($0\leqslant x\leqslant 3$)如图 1-6 所示,关于该函数在所给自变量的取值范围内,下列说法正确的是(　　)

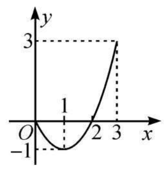


图 1-6

A. 有最小值 0,有最大值 3　　B. 有最小值 -1,有最大值 0

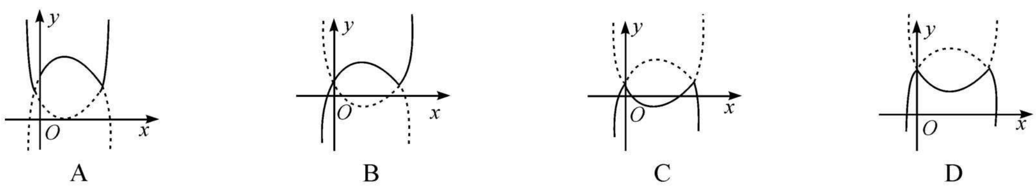
C. 有最小值 -1,有最大值 3　　D. 有最小值 -1,无最大值

(2)若 $x_1,x_2(x_1<x_2)$是方程$(x-a)(x-b)=2(a<b)$的两个根,则实数 x_1,x_2,a,b 的大小关系为(　　)

A. $x_1<x_2<a<b$　　B. $x_1<a<x_2<b$

C. $x_1<a<b<x_2$　　D. $a<x_1<x_2<b$

(3)函数 $y=1-|x-x^2|$ 的图象(实线部分)大致形状是(　　)



3.已知抛物线 $y=x^2+2x+m-1$.

(1)若抛物线与 x 轴只有一个交点,求 m 的值;

(2)若抛物线与直线 $y=x+2m$ 只有一个交点,求 m 的值.

4.已知二次函数 $y=x^2$ 与一次函数 $y=2x+1$ 相交于 A,B 两点,点 C 是线段 AB 上的一个动点,点 D 是抛物线上的一个动点,且 $CD/\!/y$ 轴,求在移动过程中 CD 的最大值.

5.填空题

(1)已知 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$是抛物线 $y=ax^2+bx+c(abc\neq 0)$上关于对称轴对称的两个点,当 $x=x_1+x_2$ 时,$y=$________.

(2)设 t 是实数,则二次函数 $y=x^2-4tx+3t^2-2t$ 的最小值是________,其最小值中的最大值为________.

6.若抛物线 $y=ax^2+4x+(a-2)$的图象全在 x 轴上方,求 a 的取值范围.

7.当 $0\leqslant x\leqslant 3$ 时,求二次函数 $y=-x^2+4x-2$ 的最大值和最小值.

8.求函数 $y=x(x+1)(x+2)(x+3)$的最小值.