浙大优学
一题一课

刷百题不如解透一题

低年级同步课后提升 / 毕业班专题自主复习

一题一课
高中数学

YITI YIKE
GAOZHONG SHUXUE

三角函数与平面向量

主　　编　惠红民
本册主编　沈建军

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

一题一课

高中数学(三角函数与平面向量)

主　　编　惠红民
本册主编　沈建军

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

一题一课. 高中数学. 三角函数与平面向量 / 惠红民主编. —杭州：浙江大学出版社，2016. 6
ISBN 978-7-308-15685-1

Ⅰ. ①一… Ⅱ. ①惠… Ⅲ. ①中学数学课—高中—题解 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 054078 号

一题一课. 高中数学. 三角函数与平面向量
主编 惠红民

策　　划	陈海权(电子信箱：chess332@163.com)
责任编辑	夏晓冬
责任校对	金佩雯　陈　宇
封面设计	林智广告
出版发行	浙江大学出版社 (杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007) (网址：http://www.zjupress.com)
排　　版	杭州星云光电图文制作有限公司
印　　刷	浙江省邮电印刷股份有限公司
开　　本	889mm×1194mm　1/16
印　　张	6.75
字　　数	259 千
版 印 次	2016 年 6 月第 1 版　2016 年 6 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-308-15685-1
定　　价	16.80 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行中心联系方式：0571－88925591；http://zjdxcbs.tmall.com

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

刷百题不如解透一题

“学习解题的最好方法之一就是研究例题”

解题，无疑是学好数学的最佳途径. 于是，刷题风起，题海浪涌，一时间，必刷题、必做题、高频题、母题等，不一而足. 以为刷题是学习数学的魔方，题海则是成就学霸的金丹！固然，学习数学离不开解题，但沉溺题海并不意味着能考好数学，不如通过分析典型例题的解题过程来学会解题更加简短有效。

“题不在多，但求精彩”

“千淘万漉虽辛苦，吹尽狂沙始到金。”直白地表达出我们在“一题一课”系列的“一题”即例题选取上的态度与倾向。每一道例题不仅体现对概念的理解与思考价值，还体现知识与方法的代表性；每一道例题不仅解析精到、解法充满活力，更通过思维拓展，借题发挥，探索其中的内在规律和方法，达成“做一题，通一类，会一片”的目标 。

“多刷题，不如多反思”

“学而不思则罔，思而不学则殆。”做题需要产生效果、追求效益。**种种经验表明：题不是刷的越多越好，如果缺乏解题反思，不但浪费时间，甚至误导学习。**因此，本书在写作体例与排版上都突出了反思的意义与重要性，反思的过程既是对数学知识和解题方法的理解与强化的过程，也是学生内化解题能力的过程。

“解题是一种实践性的技能，就像游泳、滑雪或弹钢琴一样，只能通过模仿、练习和钻研才能占为己有”

例题帮助学生理解并学会运用同步教材所学知识及技能，然后通过变式练习（一课一练）内化落实，既满足低年级同步自主学习，又满足毕业班专题自主复习。

如果您是学生，请加入“一题一课学习交流”QQ群(205743216)，我们一起学习、提高；如果您是老师，请加入“一题一课教师研讨”QQ群(529481589)，我们一起研讨、探索。

“学习的本质，不在于记住哪些知识，而在于它触发了你的思考。”学习数学的道路上，祝愿您学会思考，体会成功！刷百题不如解透一题，“一题一课”系列图书还有哪些分册，请看本书封底。

第一章　三角函数

第 1 课　任意角

1. 在已有经验(生活经验、数学学习经验)的基础上,更好地认识任意角、象限角、终边相同的角等概念.理解并掌握正角、负角、零角、象限角、终边相同的角的概念及表示.

2. 树立运动变化的观点,结合角和平面直角坐标系的关系,建立象限角的概念,使得任意角的讨论有一个统一的载体,并善于利用数形结合的思想方法来认识问题、解决问题.

3. 抓住重点:将 $0°\sim360°$ 范围的角推广到任意角,了解终边相同的角的集合.需要突破的难点:用集合来表示终边相同的角.

第 1 题　如图 1,以 x 轴正半轴为始边,分别写出符合下列条件的角:

(1)终边落在射线 OB 上的角的集合.

(2)终边落在直线 OA 上的角的集合.

(3)在第一象限阴影部分区域(不含边界)内的角的集合.

(4)终边落在阴影区域内(含边界)的角的集合.

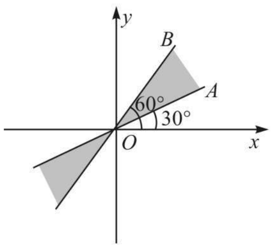

图 1

(5)$1080°$角的终边在阴影区域内吗？若不在,它落在哪里？

(6)$-930°$角的终边在阴影区域吗？若不在,它是第几象限的角？

【分析】　这是一道利用数形结合思想解决相关任意角的问题,由形到数,由表及里,深化理解概念.

(1)考查射线的概念以及终边与 α 相同的角 $\beta=\alpha+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$ 的概念.

(2)终边落在直线 OA 上,既包括终边落在 $30°$角的终边上,又包括终边落在 $210°$角的终边上.

(3)在第一象限阴影部分的区域(不含边界)内的角是夹在射线 OA,OB 之间的区域,分别求出角的终边落在射线 OA,OB 上的角,再利用不等式表示即可.

(4)终边落在阴影区域内(含边界)的角是夹在两条直线之间的角,求出角的终边落在直线 OA,OB 上的角,利用不等式即可表示出终边落在阴影区域内(含边界)的角.

(5)根据终边与 α 相同的角 $\beta=\alpha+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$ 的概念,$1080°$表示为 $0°+3\times360°$,即 $1080°$角与 $0°$角的终边相同.

(6)根据终边与 α 相同的角 $\beta=\alpha+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$ 的概念,$-930°$角与 $150°$角的终边相同.

【解析】　(1)由图可知射线 OB 在 $60°$角的终边上,根据终边相同的角的概念,设所求集合为 S_1,则 $S_1=\{\alpha|\alpha=60°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

(2)因为直线 OA 既包括终边落在 $30°$角的终边上,又包括终边落在 $210°$角的终边上.当终边落在 $30°$角的终边上时,$\alpha=30°+k\cdot360°=30°+2k\cdot180°(k\in\mathbf{Z})$.当终边落在 $210°$角的终边上时,$\beta=210°+k\cdot360°=30°+(2k+1)\cdot180°(k\in\mathbf{Z})$.

设所求集合为 S_2,则 $S_2=\{\alpha|\alpha=30°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$.

(3)在第一象限阴影部分的区域(不含边界)内的角是夹在射线 OA,OB 之间的角,设所求集合 S_3,则 $S_3=\{\alpha|30°+k\cdot360°<\alpha<60°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$;

(4)由(2)的思路可知,终边落在直线 OA 上的角 $\alpha=30°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}$.终边落在直线 OB 上的角 $\beta=60°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}$.

设终边落在阴影区域内(含边界)的角的集合为 S_4,则 $S_4=\{\alpha|30°+k\cdot180°\leqslant\alpha\leqslant60°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$.

(5)因为 $1080°$可表示为 $0°+3\times360°$,根据终边相同的角的概念,$1080°$角与 $0°$角的终边相同,所以不在阴影区域内,它落在 x 轴正半轴上.

(6)因为 $-930°=150°+(-3)\times360°$,根据终边相同的角的概念,$-930°$角与 $150°$角的终边相同,所以不在阴影区域内,因为 $150°$角的终边落在第二象限,所以 $-930°$是第二象限角.

【经验分享】　对角的理解,初中阶段是以"静止"的观点看,高中阶段应用"运动"的观点下定义、在理解这一概念时,要注意"旋转方向"决定角的"正负","旋转幅度"决定角的"绝对值大小".

学习心得

一课一练 1（答案及解析见 P82）

1. 下列说法中正确的是（　　）
   A. 120°角与420°角的终边相同
   B. 若α是锐角，则2α是第二象限的角
   C. -240°角与480°角都是第三象限的角
   D. -420°角与60°角的终边关于x轴对称
2. 在直角坐标系中，若角α与角β的终边互相垂直，则角α与角β的关系是（　　）
   A. $\beta=\alpha+90^\circ$
   B. $\beta=\alpha\pm90^\circ$
   C. $\beta=\alpha+90^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}$
   D. $\beta=\alpha\pm90^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}$
3. 集合$\mathbf{Z}=\{x\mid x=(2n+1)\cdot180^\circ,n\in\mathbf{Z}\}$与集合$Y=\{x\mid x=(4k\pm1)\cdot180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$之间的关系是（　　）
   A. $Z\subset Y$
   B. $Z\supset Y$
   C. $Z=Y$
   D. Z与Y之间的关系不确定
4. 若集合$A=\{x\mid k\cdot180^\circ\leqslant x\leqslant90^\circ+k\cdot180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，集合$B=\{x\mid 30^\circ+k\cdot360^\circ<x<60^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，则集合$A\cap B=$________.
5. 如图 2，终边落在阴影部分（含边界）的角的集合是______.

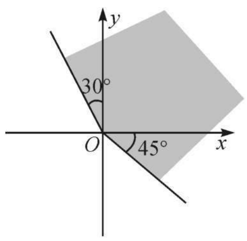

图 2

6. 下列命题中正确的是________.
   ①第一象限的角一定不是负角；
   ②小于90°的角一定是锐角；
   ③钝角一定是第二象限的角；
   ④终边相同的角一定相等.

7. 求与所给角的终边相同的所有角的集合，并求出其中的最小正角和最大负角.
   (1) -210°；　　　(2) -1484°.

8. 设α是第二象限角，问：$\frac{\alpha}{3}$，$\frac{\alpha}{2}$，2α分别是第几象限的角？

9. 已知角$\alpha=2014^\circ$.
   (1) 把α改写成$k\cdot360^\circ+\beta(k\in\mathbf{Z},0^\circ\leqslant\beta<360^\circ)$的形式，并指出它是第几象限的角？
   (2) 求角θ，使角θ与角α的终边相同，且$-360^\circ\leqslant\theta<720^\circ$.

易错追踪

第 2 课　弧度制

1. 弧度制是角的另外一种度量单位,通过1弧度的定义,得到弧度数的绝对值公式,并得出角度和弧度的换算方法.建立角的集合与实数集合的一一对应,为学习任意角的三角函数奠定基础.

2. 弄清1弧度的定义,建立弧度的概念,通过周角的两种单位制的度量,得到角度与弧度的换算公式:$180°=\pi rad$.

3. 抓住重点:理解弧度制的意义,并能进行角度和弧度的换算.需要突破的难点:弧度的概念及其与角度的关系.

第2题　已知扇形的周长为40cm,当它的半径和圆心角取什么值时,才能使扇形的面积最大?

(1)最大面积是多少?

(2)当扇形面积最大时圆心角记作θ,比较θ与$\frac{\pi}{2}$的大小关系,并指出θ所在象限.

(3)当扇形面积最大时圆心角所对的弦长是多少?

【分析】

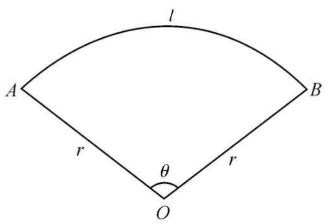

图 1

(1)如图1,扇形的周长是$l+2r=40$,扇形的面积是$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\times(40-2r)r$,消元可知$S$是关于$r$的二次函数,$S=\frac{1}{2}\times(40-2r)r=20r-r^2=-(r-10)^2+100$.配方后利用二次函数求最值的方法,即可求出最大值以及相应的r值,将r值代入$l+2r=40$即可求出l.利用圆心角、弧长、半径三者之间的关系$\theta=\frac{l}{r}$求出θ.

(2)由(1)可知θ,利用角与实数的一一对应关系,将θ与$\frac{\pi}{2}$作为两个实数,当然也可以将它们的弧度数都化为角度后再比较大小.

(3)如图2,所求弦长为AB,过点O作$OC\perp AB$,在直角$\triangle OCB$中即可求出弦长的一半CB,从而得到弦长AB.

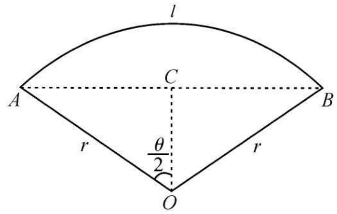

图 2

【解析】(1)设扇形的圆心角为θ,半径为r,弧长为l,面积为S,则$l+2r=40$,

所以$l=40-2r$.

所以$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\times(40-2r)r=20r-r^2=-(r-10)^2+100$.

所以当半径$r=10$cm时,扇形的面积最大,最大值为$100cm^2$,

此时$\theta=\frac{l}{r}=\frac{40-2\times10}{10}=2rad$.

(2)由(1)可知$\theta=2rad$.利用角与实数的一一对应关系,作差比较.

因为$\theta-\frac{\pi}{2}=(2-\frac{\pi}{2})rad=\frac{4-\pi}{2}rad>0$.

所以$\theta>\frac{\pi}{2}$.

(3)如图2,所求弦长为AB,过点O作$OC\perp AB$,在直角$\triangle OCB$中,

因为$\angle COB=1rad$,

所以$\sin\angle COB=\frac{CB}{r}$,

所以$CB=r\cdot\sin\angle COB=10\sin1$,

所以$AB=2CB=20\sin1$.

【经验分享】　在推广角的概念后,在弧度制下,角的集合与实数集$\mathbf{R}$之间建立起一一对应的关系,解答角度与弧度的互化问题的关键在于充分利用$180°=\pi rad$这一关系式.易知:$1°=\frac{\pi}{180}$弧度,1弧度$=(\frac{180}{\pi})°$,在弧度制下,扇形的弧长公式$l=|\alpha|\cdot r$及面积公式$\frac{1}{2}lr$都得到了简化,具体应用时,要注意角的单位取弧度.

学习心得

一课一练 2(答案及解析见 P82)

1.集合 $A=\left\{\alpha \middle| \alpha=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$,$B=\left\{\alpha \middle| \alpha=2k\pi\pm\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$的关系是　(　　)

A. $A=B$

B. $A\subseteq B$

C. $A\supseteq B$

D. 以上都不对

2.已知集合 $A=\{\alpha|2k\pi\leqslant\alpha\leqslant(2k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{\alpha|-4\leqslant\alpha\leqslant4\}$,则 $A\cap B$ 等于　(　　)

A. $\varnothing$

B. $\{\alpha|-4\leqslant\alpha\leqslant4\}$

C. $\{\alpha|0\leqslant\alpha\leqslant\pi\}$

D. $\{\alpha|-4\leqslant\alpha\leqslant-\pi$ 或 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi\}$

3.圆的半径变为原来的 2 倍,而弧长也增大到原来的 2 倍,则　(　　)

A. 扇形的面积不变

B. 扇形的圆心角不变

C. 扇形的面积增大到原来的 2 倍

D. 扇形的圆心角增大到原来的 2 倍

4.将 $-1485°$ 化为 $2k\pi+\alpha(0\leqslant\alpha<2\pi,k\in\mathbf{Z})$ 的形式是________.

5.若 $2\pi<\alpha<4\pi$,且 α 与 $-\frac{7\pi}{6}$ 角的终边垂直,则 $\alpha=$________.

6.若角 α 的终边与 $\frac{\pi}{6}$ 角的终边关于直线 $y=x$ 对称,且 $\alpha\in(-4\pi,4\pi)$,则 $\alpha=$________.

7.给出下列命题:

①第二象限角大于第一象限角;

②三角形的内角是第一象限角或第二象限角;

③无论是用角度制还是用弧度制度量一个角,它们与扇形的半径大小无关;

④$\frac{\pi}{4}$与$\frac{5\pi}{4}$的终边相同;

⑤锐角是第一象限角,反之亦然.

其中正确命题的个数是________.

8.已知 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,$-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$,

求:(1)$\alpha+\beta$ 的范围;

(2)$\alpha-\frac{\beta}{2}$的范围;

(3)$-150°$对应的弧度数在 $\alpha+\beta$ 的范围内吗?

9.在一般的时钟上,自零时开始到分针与时针再一次重合,分针所转过的角的弧度数是多少?(在不考虑角度方向的情况下)

易错追踪

第3课　三角函数的定义

1. 任意角的三角函数是刻画周期变化现象的数学模型，它与“初中解三角形”已经有明显区别. 因此，与学习其他基本初等函数一样，学习任意角的三角函数，关键是要理解三角函数的概念、图象和性质，并能用三角函数描述一些简单的周期变化规律，解决简单的实际问题.

2. 在对三角函数的研究中，数形结合思想起着非常重要的作用. 理解三角函数是以实数为自变量的函数.

3. 抓住重点：任意角的正弦、余弦、正切的定义，终边相同的角的同一个三角函数值相等. 需要突破的难点：用角的终边上的点的坐标来刻画三角函数，三角函数符号的书写.

第3题　已知角 α 以 x 轴正半轴为始边，坐标原点 O 为角的顶点，终边经过点 $P(a,3)$.

(1)请指出角 α 的终边 OP 所在的位置；

(2)若 $a=0$，求 $\sin\alpha,\cos\alpha,\tan\alpha$ 的值；

(3)若 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$，求 a 的值；

(4)当 $a>0$ 时，比较 $\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$ 的大小；

(5)当 $a<0$ 时，确定 $\sin\alpha,\cos\alpha,\tan\alpha$ 的符号.

【分析】　因为象限角的定义是：使角的顶点与坐标原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合，那么，角的终边在第几象限，就说这个角是第几象限角；如果角的终边落在坐标轴上，那么这个角不属于任何一个象限. 清楚这个概念后即可顺利解决第(1)问. 后面四问考查任意角的三角函数定义 $\sin\alpha=\frac{y}{r},\cos\alpha=\frac{x}{r},\tan\alpha=\frac{y}{x}(x\neq 0)$，三个函数的定义域及在四个象限的符号如下表.

三角函数	定义域	第一象限符号	第二象限符号	第三象限符号	第四象限符号
$\sin\alpha$	**R**	+	+	−	−
$\cos\alpha$	**R**	+	−	−	+
$\tan\alpha$	$\{\alpha \mid \alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$	+	−	+	−

本题含有字母参数，所以对 a 进行适当的分类讨论，如果能结合图形，则效果会更好.

【解析】　(1)当 $a>0$ 时，点 P 在第一象限，所以终边 OP 在第一象限；当 $a=0$ 时，点 P 在 y 轴正半轴上，所以终边 OP 在 y 轴正半轴上；当 $a<0$ 时，点 P 在第二象限，所以终边 OP 在第二象限.

(2)当 $a=0$ 时，点 $P(0,3)$，$x=0,y=3,r=3$，根据三角函数定义，$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{3}{3}=1,\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{0}{3}$，而 $\tan\alpha=\frac{y}{x}$，当 $x=0$ 时，$\frac{y}{x}$ 不存在，所以 $\tan\alpha$ 也不存在.

(3)因为 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$，根据三角函数定义，$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{3}{\sqrt{a^2+9}}$，

所以 $\frac{3}{\sqrt{a^2+9}}=\frac{1}{2}$，解方程得 $a=\pm 3\sqrt{3}$.

(4)当 $a>0$ 时，根据三角函数定义，$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{3}{\sqrt{a^2+9}},\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{a}{\sqrt{a^2+9}}$；

当 $a=3$ 时，$\sin\alpha=\cos\alpha$；

当 $0<a<3$ 时，因为 $\frac{3}{\sqrt{a^2+9}}>\frac{a}{\sqrt{a^2+9}}$，所以 $\sin\alpha>\cos\alpha$；

当 $a>3$ 时，因为 $\frac{3}{\sqrt{a^2+9}}<\frac{a}{\sqrt{a^2+9}}$，所以 $\sin\alpha<\cos\alpha$.

(5)当 $a<0$ 时，角 α 的终边 OP 在第二象限，角 α 是第二象限的角，所以 $\sin\alpha>0,\cos\alpha<0,\tan\alpha<0$.

【经验分享】　任意角的三角函数实质上是锐角三角函数的扩展，是将锐角三角函数中边的比变为坐标与距离、坐标与坐标的比，记忆方法可用锐角三角函数类比记忆，解决问题时要紧扣三角函数的定义，同时要善于利用数形结合和分类讨论思想.

学习心得

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

一课一练 3(答案及解析见 P82)

1. 角 α 的终边经过 $P(0,b)$,$b\neq 0$,则 $\sin\alpha$ 等于　(　　)

A. 0　B. 1　C. -1　D. ± 1

2. 角 α 的终边在直线 $y=2x$ 上,则 $\cos\alpha$ 等于　(　　)

A. $\pm\frac{1}{5}$　B. $\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$　C. $\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$　D. $\pm\frac{1}{2}$

3. 在 $\triangle ABC$ 中,下列函数值可以是负值的是　(　　)

A. $\sin A$　B. $\cot\frac{A}{2}$

C. $\cos\frac{B+C}{2}$　D. $\tan A$

4. 已知 $\tan\alpha\cdot\cos\alpha>0$,且 $\frac{\cot\alpha}{\sin\alpha}<0$,则 α 在第________象限.

5. $\cos\frac{9\pi}{4}+\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)=$________.

6. 函数 $y=\sin x+\tan x$ 的定义域为________.

7. 已知角 α 的终边上一点 $P(-15a,8a)$($a\in\mathbf{R}$,且 $a\neq 0$),求角 α 的各个三角函数值.

8. 设 $f(x)=\sin\frac{\pi}{3}x$,求 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(72)$ 的值.

9. 求证:$\frac{1+\sec\alpha+\tan\alpha}{1+\sec\alpha-\tan\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

易错追踪

第4课　单位圆与三角函数线

1. 在对三角函数的研究中,数形结合思想起着非常重要的作用,借助单位圆将三角函数中正弦、余弦、正切定义的几何形式表示出来,可以很容易地建立角的终边和单位圆的交点坐标、单位圆中的三角函数线之间的联系,并在角的变化过程中,将这种联系直观地体现出来.

2. 抓住重点:利用与单位圆有关的有向线段,将任意角 α 的正弦、余弦、正切函数值用几何形式表示.需要突破的难点:正确利用与单位圆有关的有向线段,将任意角 α 的正弦、余弦、正切函数值表示出来,即用正弦线、余弦线、正切线表示出来.

第4题　当 $\alpha\in[0,2\pi]$ 时,试比较 $\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$ 的大小.

【分析】　方法一(代数方法):比较法,分类讨论

考查利用正弦、余弦三角函数的定义和正弦、余弦函数在各象限及坐标轴上函数值的符号.因为角 α 在第一、二象限时 $\sin\alpha>0$,在第三、四象限时 $\sin\alpha<0$;角 α 在第一、四象限时 $\cos\alpha>0$,在第二、三象限时 $\cos\alpha<0$,所以 $\sin\alpha$,$\cos\alpha$ 的符号不确定,所以对角 α 分类讨论.利用作差的方法,化简整理 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{y}{r}-\frac{x}{r}=\frac{y-x}{r}(r>0)$,只需判断 α 的终边上任取一点 $P(x,y)$ 中 $y-x$ 的正负即可.

方法二(几何方法):数形结合,分类讨论

如图1:利用与单位圆有关的有向线段,将角 α 的正弦、余弦函数值分别用几何形式表示出来.$\sin\alpha=MP$,$\cos\alpha=OM$.

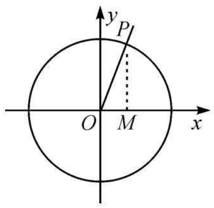

图1

【解析】　(1)当 $0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{4}$ 时,如图2,设角 α 的终边与单位圆交于点 P_1,分别作出正弦线、余弦线,此时 $\sin\alpha=M_1P_1$,$\cos\alpha=OM_1$,因为 $OM_1>M_1P_1$,所以 $\cos\alpha>\sin\alpha$.

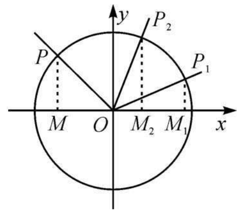

图2

(2)当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时,此时正弦线与余弦线相等,所以 $\cos\alpha=\sin\alpha$.

(3)当 $\frac{\pi}{4}<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时,如图2,设角 α 的终边与单位圆交于点 P_2,分别作出正弦线、余弦线,此时 $\sin\alpha=M_2P_2$,$\cos\alpha=OM_2$,因为 $OM_2<M_2P_2$,所以 $\cos\alpha<\sin\alpha$.

(4)当 $\frac{\pi}{2}<\alpha\leqslant\pi$ 时,如图2,$\sin\alpha=MP\geqslant0$,$\cos\alpha=OM<0$,所以 $\cos\alpha<\sin\alpha$.

(5)同理,当 $\pi<\alpha<\frac{5\pi}{4}$ 时,$\sin\alpha=MP<0$,$\cos\alpha=OM<0$,$OM<MP$,所以 $\cos\alpha<\sin\alpha$.

(6)当 $\alpha=\frac{5\pi}{4}$ 时,此时正弦线与余弦线相等,所以 $\cos\alpha=\sin\alpha$.

(7)当 $\frac{5\pi}{4}<\alpha\leqslant\frac{3\pi}{2}$ 时,$\sin\alpha=MP<0$,$\cos\alpha=OM<0$,$OM>MP$,所以 $\cos\alpha>\sin\alpha$.

(8)当 $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ 时,$\sin\alpha=MP<0$,$\cos\alpha=OM>0$,$OM>MP$,所以 $\cos\alpha>\sin\alpha$.

综上所述,当 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ 时,$\cos\alpha<\sin\alpha$,

当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{5\pi}{4}$ 时,$\cos\alpha=\sin\alpha$,

当 $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$ 时,$\cos\alpha>\sin\alpha$.

【经验分享】　正弦线、余弦线都是与单位圆有关的有向线段,所以作某角的三角函数线时,一定要先作单位圆.三种有向线段的正负与坐标轴正反方向一致,三种有向线段的数量与三种三角函数值相同.利用三角函数线可以比较函数值大小,解三角不等式、方程等.

学习心得

一课一练 4(答案及解析见 P83)

1. 下列判断中错误的是 ( )
   A. 角 α 的终边确定时,它在单位圆中的余弦线就确定了
   B. 单位圆中有相同的正弦线的角相等
   C. 角 α 与角 $\pi+\alpha$ 具有相同的正切线
   D. 有相同的正切线的两个角的终边在同一直线上
2. 下列各式中正确的是 ( )
   A. $\sin\frac{5\pi}{7}>\sin\frac{4\pi}{7}$
   B. $\tan\frac{15\pi}{8}>\tan\left(-\frac{\pi}{7}\right)$
   C. $\cos\frac{9\pi}{4}<\cos\frac{5\pi}{4}$
   D. $\cos\frac{9\pi}{4}<\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$
3. 当 $x\in[0,2\pi]$时,使得不等式 $\cos x\geqslant\frac{1}{2}$成立的 x 的取值范围是 ( )
   A. $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ B. $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$
   C. $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ D. $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{3},2\pi\right]$
4. 比较 sin1,cos1,tan1 的大小,按从大到小的顺序排列:________.
5. 利用三角函数线画出 $\sin\alpha\geqslant\frac{1}{2}$中角 α 的范围.
6. 求函数 $y=\lg(3-4\sin^2x)$的定义域.
7. 已知 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,求证:$\sin\theta<\theta<\tan\theta$.
8. 设 $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$,求证:$\alpha-\beta>\sin\alpha-\sin\beta$.

易错追踪

第5课 同角三角函数的基本关系

1.同角三角函数的基本关系式将"同角"的四种不同的三角函数直接或间接地联系起来，在使用时，一要注意"同角"，对于角的表达形式是至关重要的，如 $\sin^2 4\pi+\cos^2 4\pi=1$ 等；二要注意这些关系式都是对于使它们有意义的那些角而言的，如 $\tan\alpha$ 中的 α 是使得 $\tan\alpha$ 有意义的值，即 $\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$.

2.已知任意角的正弦、余弦、正切值中的一个便可以运用基本关系式求出另外的两个，这是同角三角函数关系式的一个基本功能.解题时产生遗漏的主要原因：一是没有确定好或不去确定终边的位置；二是利用平方关系开方时，漏掉了负的平方根.

3.抓住重点：熟悉三个公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$，$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$ 的应用.需要突破的难点：同角三角函数公式运用中的恒等变形.

第5题 已知 $\tan\alpha=2$，求下列各代数式的值：

(1) $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$； (2) $\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$；

(3) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}$； (4) $\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha$；

(5) $\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+3$.

【分析】 考查同角三角函数的基本关系式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$，主要有两个方面的应用：一方面求值（知一求二）；另一方面化简三角函数式.如果这个三角函数式的值的符号可以确定，则可以根据算术平方根的定义直接得到结果；如果这个三角函数式的值的符号不可以确定，则可根据题设条件，经过合理的分类讨论得到结果.

【解析】 方法一：已知 $\tan\alpha$，求出 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$.然后代入进行运算求解.

因为 $\tan\alpha=2$，所以 α 是第一或第三象限角，

当 α 是第一象限角时，$\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，代入所求5个问题运算求解；

当 α 是第三象限角时，$\sin\alpha=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，代入所求5个问题运算求解.

方法二：利用"齐次分式"转化为 $\tan\alpha$ 的表达式.

(1)将 $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ 的分子分母同时除以 $\cos\alpha$，所以

$\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\dfrac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=\dfrac{2+1}{2-1}=3$.

(2) $\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\dfrac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha-1}=\dfrac{2\times2}{4-1}=\dfrac{4}{3}$.

(3)巧用 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，转化为二次齐次式

$\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$.

(4) $\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{\tan^2\alpha-2}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{2}{5}$.

(5) $\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+3$

$=\dfrac{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha+3(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{4\tan^2\alpha+\tan\alpha+3}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{21}{5}$.

【经验分享】 三角函数式的化简，体现了由繁到简的最基本的数学解题原则，它不仅需要熟悉和灵活运用所学的三角公式，还需要熟悉和灵活运用这些公式的等价形式.同时，这类问题还具有较强的综合性，对其他非三角知识的灵活运用也具有较高的要求，如已知 $\tan\alpha$，求关于 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 的代数式的值，如果是（或构造）齐次分式的形式，可转化为正切运算.

学习心得

一课一练 5(答案及解析见 P83)

1. 已知 $\cos\alpha=-\dfrac{8}{17}$，$\alpha$ 在第二象限，则 $\sin\alpha$ 等于　（　　）

A. $\dfrac{15}{17}$　　B. $-\dfrac{15}{17}$

C. $\pm\dfrac{15}{17}$　　D. $\pm\dfrac{8}{15}$

2. 当 $\alpha\in(\pi,2\pi)$，$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$时，$\cos\alpha$ 的值是　（　　）

A. $-\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　　B. $-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

C. $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　　D. $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

3. 已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，则 $\tan\alpha+\cot\alpha$ 的值为　（　　）

A. -4　　B. 4　　C. -8　　D. 8

4. 若 $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}$，则 $\sin\theta\cos\theta=$________，$\tan\theta+\dfrac{1}{\cot\theta}=$________，$\sin^3\theta-\cos^3\theta=$________，$\sin^4\theta+\cos^4\theta=$________.

5. 若 $a\neq0$，且 $\sin x+\sin y=a$，$\cos x+\cos y=a$，则 $\sin x+\cos x=$________.

6. 化简：$\sqrt{1-2\sin40^\circ\cos40^\circ}=$________

7. 已知 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 是关于 x 的方程 $x^2-ax+a=0(a\in\mathbf{R})$ 的两个根.

(1)求 $\sin^3\theta+\cos^3\theta$ 的值；

(2)求 $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$的值.

8. 证明：$\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\tan^2\alpha-1}=\sin\alpha+\cos\alpha$.

9. 已知 α 是三角形的内角，且 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$.

(1)求 $\tan\alpha$ 的值；

(2)把$\dfrac{1}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$用 $\tan\alpha$ 表示出来，并求其值.

易错追踪

第 6 课　函数名称不变的诱导公式

1. 因为终边相同的角的函数值相等，得到了“$2k\pi+\alpha$”诱导公式，由角的终边的某种对称性，导致终边与单位圆的交点也具有相应的对称性，这样就产生了“$-\alpha$”“$2\pi-\alpha$”“$\pi\pm\alpha$”等诱导公式. 我们知道，$\pi-\alpha$ 角的终边与 α 角的终边关于 y 轴对称；$\pi+\alpha$ 角的终边与 α 角的终边关于原点对称，$\pi-\alpha$ 角的终边与 α 角的终边关于 x 轴对称，所以 $2k\pi+\alpha$、$\pi-\alpha$、$-\alpha$、$2\pi-\alpha$ 各角的三角函数值与 α 角的三角函数值的绝对值相同，符号由各角所在象限的原三角函数的符号来确定.

2. 诱导公式可以帮助我们把任意角的三角函数化为锐角三角函数，它在求任意角的三角函数值时起很大作用，诱导公式更多地运用在三角变换中，特别是诱导公式中的 α 角可以是任意角，即 $\alpha\in\mathbf{R}$，它在终边具有某种对称性的角的三角函数变换中，应用广泛.

3. 抓住重点：$2k\pi+\alpha$，$\pi-\alpha$，$\pi+\alpha$，$-\alpha$，$2\pi-\alpha$ 五组诱导公式的灵活运用，三角函数式的求值、化简和证明等. 需要突破的难点：五组诱导公式的灵活运用.

第 6 题　计算：$\dfrac{\sqrt{1+2\sin290^\circ\cos430^\circ}}{\sin250^\circ+\cos790^\circ}+\cos(-60^\circ)-\sin210^\circ$.

【分析】 在诱导公式的学习中，化归思想贯穿始末，这是典型的数学思想，利用诱导公式将求任意角的三角函数值转化为求锐角的三角函数值.

$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha$　　$\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha$

$\tan(2k\pi+\alpha)=\tan\alpha$　　$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$

$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$　　$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$

$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$　　$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$

$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$　　$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$　　$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$

$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$　　$\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$

$\tan(2\pi-\alpha)=-\tan\alpha$

此题实际上是诱导公式的综合运用，需要把所求的角看成是一个整体的任意角，如诱导公式中将 $2k\pi+\alpha$ 看成第一象限角，将 $\pi-\alpha$ 看成第二象限角，将 $\pi+\alpha$ 看成第三象限角，将 $-\alpha$ 看成第四象限角，将 $2\pi-\alpha$ 看成第四象限角.

【解析】 $\dfrac{\sqrt{1+2\sin290^\circ\cos430^\circ}}{\sin250^\circ+\cos790^\circ}+\cos(-60^\circ)-\sin210^\circ$

$=\dfrac{\sqrt{1+2\sin(360^\circ-70^\circ)\cos(360^\circ+70^\circ)}}{\sin(180^\circ+70^\circ)+\cos70^\circ}+\cos60^\circ-\sin(180^\circ+30^\circ)$

$=\dfrac{\sqrt{1-2\sin70^\circ\cos70^\circ}}{-\sin70^\circ+\cos70^\circ}+\dfrac{1}{2}-(-\sin30^\circ)$

$=\dfrac{\sqrt{\cos^2 70^\circ+\sin^2 70^\circ-2\sin70^\circ\cos70^\circ}}{\cos70^\circ-\sin70^\circ}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{(\cos70^\circ-\sin70^\circ)^2}}{\cos70^\circ-\sin70^\circ}+1=\dfrac{|\cos70^\circ-\sin70^\circ|}{\cos70^\circ-\sin70^\circ}+1.$

因为 $\cos70^\circ<\sin70^\circ$，

所以原式 $=\dfrac{\sin70^\circ-\cos70^\circ}{\cos70^\circ-\sin70^\circ}+1=-1+1=0.$

【经验分享】 诱导公式可以把任意角的三角函数值转化为锐角的三角函数值，基本步骤是：任意负角的三角函数⟶相应的正角的三角函数⟶0 到 2π 角的三角函数⟶锐角的三角函数，这是“负角化正，大角化小”的转化思维. 运用三角函数的诱导公式时应注意的问题：$2k\pi+\alpha$，$\pi-\alpha$，$-\alpha$，$2\pi-\alpha$ 的三角函数值等于 α 的同名函数值，前面加上一个把 α 看成锐角时原函数的符号；可简单记忆为“函数名不变，符号看象限，左边的符号右边站”. 公式中的 α 本身是任意角，也可以根据角之间的对称关系，借助几何图形掌握诱导公式，如：

因为角 α 的终边与角 $\pi+\alpha$ 的终边关于原点对称，所以 $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$；

因为角 α 的终边与角 $-\alpha$ 的终边关于 x 轴对称，所以 $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$；

因为角 α 的终边与角 $\pi-\alpha$ 的终边关于 y 轴对称，所以 $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$.

学习心得

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com