

KONGJIAN
XINHAO

全国普通高等教育教材“十三五”规划项目

CHULI JI YINGYONG

空间信号 处理及应用

主 编 / 刘 影
副主编 / 程 琳 张有润



电子科技大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

空间信号处理及应用 / 刘影主编. —成都: 电子科技大学出版社, 2016. 11

ISBN 978-7-5647-3631-6

I. ①空… II. ①刘… III. ①空间通信系统—信号处理 IV. ①TN927

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 097343 号

空间信号处理及应用

主 编 刘 影

副主编 程 琳 张有润

出 版: 电子科技大学出版社 (成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦 邮编: 610051)

策划编辑: 岳 慧

责任编辑: 岳 慧

校 对: 兰 凯

主 页: www.uestcp.com.cn

电子邮箱: uestcp@uestcp.com.cn

发 行: 新华书店经销

印 刷: 成都市火炬印务有限公司

成品尺寸: 170mm×240mm 印张 10.25 字数 187 千字

版 次: 2016 年 11 月第一版

印 次: 2016 年 11 月第一次印刷

书 号: ISBN 978-7-5647-3631-6

定 价: 25.00 元

■ 版权所有 侵权必究 ■

◆ 本社发行部电话: 028-83202463; 本社邮购电话: 028-83201495。

◆ 本书如有缺页、破损、装订错误, 请寄回印刷厂调换。

前 言

空间信号处理是信号处理领域中的一个重要组成部分,在雷达、声呐、无线通信、地震勘探、无线电天文学、军事电子对抗等多学科和领域中均具有广泛应用,近几十年来一直是研究的热点问题。

在空间信号处理中,相对于窄带信号而言,宽带信号具有携带大量目标信息,混响背景相关性较弱,有利于目标检测、参数估计以及目标信息特征提取等优点,使宽带阵列信号处理成为阵列信号处理研究的一个重要研究方向。波束形成是阵列信号处理中一项非常重要的任务,其能将波束主瓣对准有用期望信号,旁瓣对准非期望信号,能实现有效地提取期望信号以及提高信噪比的目的。因此,有关空间信号处理的相关知识已成为全国各高校电气工程专业学生必修的专业学习内容。

本教材内容共9章,第1章概括地介绍了信号处理相关概念以及空间信号特点;第2章介绍信号处理中的傅里叶变换理论;第3章介绍信号空间概念;第4章介绍信号空间中的希尔伯特空间概念以及框架理论;第5章介绍短时傅里叶变化理论;第6章介绍小波技术概念;第7章介绍小波滤波器组设计方法以及相应的特性分析;第8章介绍基于小波滤波器组的宽带波束形成技术;第9章介绍基于小波滤波器组的多载波调制系统波束形成技术。

本书由电子科技大学刘影担任主编;国网安徽省电力公司培训中心程琳、电子科技大学张有润担任副主编。四川大学谢驰、黄兰,绵阳师范学院范永胜,安徽电气工程职业技术学院王晓波、周斌参加了编写工作。在编写过程中研究生刘航宇、李娟、周运鸿、赵欣、杨凯强参与了收集并整理资料的工作。在编写本书的过程中,我们参考了许多国内同行专家、学者们的研究成果及文献资料,正是他们的研究工作,使空间信号处理技术向前迈进,在此向他们致谢!

本书的编写与出版得到了国家自然科学基金委(项目编号:61401075)的资助;得到了电子科技大学新编教材建设项目的资助。本书编写得到电子科技大学能源科学与工程学院黄琦教授与左琳教授的热诚关怀与帮助,在此表示衷心的感谢。

由于作者学识水平有限,书中不妥和错误之处在所难免,恳请同行和读者批评指正。

作 者
2016年8月

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 信号的概念	1
1.2 信号的分类	2
1.3 空间信号接收模型	6
1.3.1 窄带信号模型	11
1.3.2 宽带信号模型	12
1.4 阵列波束形成准则	15
1.4.1 窄带波束形成器的优化准则	16
1.4.2 影响波束图的因素	19
思考题与讨论题	20
第 2 章 傅里叶变换	21
2.1 连续周期信号的傅里叶级数变换	22
2.2 连续信号的傅里叶变换	26
2.3 离散周期信号的傅里叶变换级数	29
2.4 离散信号的傅里叶变换	31
2.5 各种变换之间的关系	34
2.5.1 傅里叶变换与傅里叶级数变换	34
2.5.2 傅里叶变换与离散傅里叶变换	35
2.5.3 离散傅里叶级数变换与其他变换的关系	36
2.6 从傅里叶变换到离散傅里叶级数变换	39
2.7 傅里叶变换的局限性	42
思考题与讨论题	44

第 3 章 信号空间	45
3.1 问题的提出	45
3.2 信号空间	46
3.2.1 线性空间	46
3.2.2 赋范信号空间	47
3.2.3 连续时间信号空间的范数	48
3.3 距离空间	50
3.4 内积空间	51
3.5 信号的积分变换	54
3.6 信号表示法	56
思考题与讨论题	63
第 4 章 希尔伯特空间中框架理论	64
4.1 希尔伯特空间	64
4.2 框架的定义及应用	65
4.2.1 框架	65
4.2.2 伪逆的定义	67
4.2.3 对偶框架	70
4.2.4 双正交基 (Riesz 基)	72
4.3 部分重构	73
思考题与讨论题	74
第 5 章 短时傅里叶变化	75
5.1 时频原子	75
5.2 时频能量密度	78
5.3 短时傅里叶变化	79
5.3.1 短时傅里叶变换的时频原子	79
5.3.2 能量关系	80
5.4 离散短时傅里叶变化	83

思考题与讨论题	84
第 6 章 小波变化基础	85
6.1 小波时频原子	85
6.2 小波变化	86
6.3 参数的作用	88
6.3.1 尺度因子	88
6.3.2 位移因子	89
6.4 小波变换的时频特性.....	89
6.5 小波分析的重构原理.....	90
思考题与讨论题	91
第 7 章 小波滤波器组设计与特性分析.....	92
7.1 傅里叶算法的滤波特性分析.....	92
7.1.1 傅里叶算法的滤波器的结构.....	92
7.1.2 采样点数对信号频率分辨率影响.....	95
7.2 小波滤波器组的设计.....	96
7.2.1 构造小波算法滤波器.....	96
7.2.2 小波基函数构造原型滤波器.....	96
7.2.3 小波滤波器组的设计.....	102
7.3 小波滤波器组的特性分析.....	107
7.3.1 滤波器组的特性.....	107
7.3.2 幅频特性分析.....	109
思考题与讨论题	110
第 8 章 小波滤波器组的宽带波束形成.....	112
8.1 宽带波束图	112
8.2 频域宽带波束形成	114
8.2.1 频域波束形成.....	115
8.2.2 时频波束形成算法性能对比分析.....	117

8.3 小波滤波器组的宽带波束形成算法.....	120
8.3.1 时频结合频率不变波束形成.....	120
8.3.2 低旁瓣的波束形成.....	125
8.3.3 稳健的波束形成.....	130
思考题与讨论题	137
第9章 小波滤波器组多载波调制系统的 波束形成.....	138
9.1 多载波系统模型	138
9.1.1 OFDM 系统模型	139
9.1.2 小波滤波器组多载波调制系统模型.....	140
9.2 多载波系统的波束形成.....	143
9.2.1 OFDM 系统的波束形成	143
9.2.2 基于小波滤波器组多载波调制系统的波束形成.....	144
9.2.3 仿真分析	148
思考题与讨论题	152
参考文献	153

第 1 章 绪 论

人们几乎每时每刻都会接触到信号。系统之间传输与交换信息的载体就是信号。在当今信息社会，通信与传感技术、计算技术密切结合，成为整个社会的高级“神经中枢”，没有通信的人类社会是不可想象的。随着通信技术的发展，WiFi 网络热点的覆盖，移动电话的普及，人们从有线通信逐步进入到无线通信时代。对空间信号的处理技术要求也上了一个新的台阶。空间信号广泛存在于雷达、通信、声呐、导航、语音通信系统中，是阵列信号处理的主要内容。阵列波束形成器对失配误差非常敏感，阵列本身任意细小的误差都会引起波束形成性能的剧烈恶化，使得理想条件下设计得到的波束形成器在实际应用中失效。在阵列实际应用中，许多非理想因素不可避免地给阵列系统带来误差，如期望信号波达角不匹配、信号之间的具有相关性等属于信号和环境因素造成的误差。由阵列本身因素造成的误差包括阵元缺损或变形、阵元响应误差，阵元位置校正不够精准、信道响应误差等。另外，信号源快速移动、传播信道衰落、阵列抖动等非平稳环境因素都会使得波束形成器的加权值不能及时进行调整更新，波束形成处理性能会大大下降。因此，在雷达、声呐以及无线通信中我们需要首先研究空间信号的特点。本章介绍了空间信号的概念，空间信号接收模型，阵列处理所涉及的基本原理以及相关基础知识，为后续各章的展开奠定基础。

1.1 信号的概念

信号的概念出现在极为广阔的、各种各样的领域中，在不同的学科中，信号的物理特性是截然不同的。那么什么是“信号”？“信号”一词在人们的日常生活和社会活动中并不陌生，例如，汽车喇叭的声音，人们说话的声音，电视机显示的图像，无线通信中的电磁干扰，电子设

备内部控制以及它与外围设备信息交换的电信号等等，这些都是人们熟悉的信号。但是，如果要严格的给信号下定义，就需要清楚认识信号和消息之间的联系。

消息是原来不知道的知识，它是人类认识客观世界和改造客观世界的知识源泉。获取消息，传输消息，交换消息，从古至今一直是人类基本的社会活动之一。在古代战场告急祖先们可能用击鼓或者烽火方式传递消息，而在现代社会，无线广播技术，GPS 技术，Wi-Fi 技术，4G 技术的广泛应用使得移动电话普及，人们获取消息变得更加容易和轻松，消息借助一定形式的信号从一个地方传递到另一个地方也变得更加容易。因此，我们认为消息通常是用某种物理方式表达出来，通常可以用文字、图像、声音等来表达，它自身并不能传播而是通过一定形式的信号如声信号、光信号、电信号等进行传输和各种相关处理，也就是说我们可以把包含信息的图像、语言、文字等称为消息。而信号是消息的表现形式，消息则是信号的具体内容。

信号从广义上讲是带有信息的随时间变化的物理量或物理现象。由于信号是随时间而变化的，在数学上可以用与时间相关的函数来表示。在数学上，信号可以描述为自变量的函数；或者说，数学表达式是描述信号的基本方法。在信号处理中，由于信号的基本自变量是时间和频率。信号自变量的个数可以是一个也可以是多个，当信号是单个独立变量的函数时，称这种信号为一维信号；当信号为 n 个独立变量的函数时，称为 n 维信号。除了用解析式外，还常用波形图对信号的形态进行形象直观的描述。

1.2 信号的分类

描述信号的基本方法是写出它的数学表达式，而表达式通常是时间函数。在不同的研究领域和场合，人们对信号有不同的分类方法，如根据信号的维度分为一维信号和 multidimensional 信号，从信号的描述上分为确定信号和非确定信号，从信号的幅值和能量上分为能量信号与功率信号，从分析域上分为时域信号与频域信号，从连续性上分为连续时间信号与离散

时间信号。信号波形是被测信号的信号幅度随时间变化的历程，而信号的分类主要是依据信号的波形特征来划分的。

1. 一维信号和多维信号

按照信号的维数，信号可以分为一维信号和多维信号。信号一般是一个或多个独立变量的函数，其中具有一个独立变量的信号常被称为一维信号，如心电图信号、噪声信号等；具有多个独立变量的信号称为多维信号，如电视信号、图像信号等。本书主要以一维信号 $s(t)$ 为对象，其中独立变量 t 的含义可以是时间，也可以是其他物理量。

2. 确定信号与随机信号

对应于某一确定时刻，就有某一确定数值以及与其对应的信号，该信号称为确定信号。对于这种信号，给定某一时刻或者给定某一函数值后，就能确定一个相应的信号值，比如卫星的运行轨迹，机器工作时各个构件的运动轨迹等等。如图 1-1 (a) 为一个线性斜波信号，在 t_1 时刻，对应的数值为 y_1 ，而在 t_2 时刻，对应的数值为 y_2 。确定信号往往可以用相应的函数解析式、图表和波形来表示。

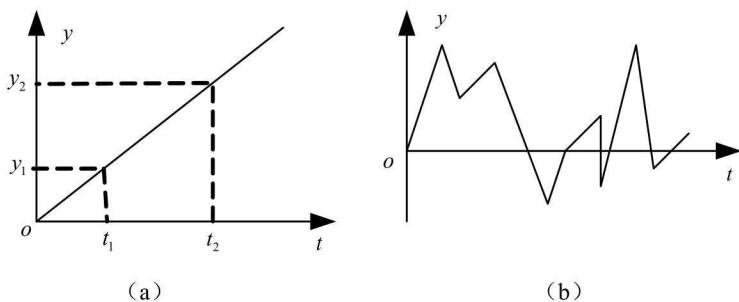


图 1-1 确定信号与随机信号

如果一个信号事先无法预测它的变化趋势，也无法预先知道其变化的相应规律，而只能用概率统计的方法进行描述，则该信号被称为随机信号，如图 1-1 (b) 所示。在实际工作中，我们已经经常会遇见随机信号，比如系统总会受到各种干扰信号的影响，这些干扰信号不仅在不同时刻的信号值是互不相关的，而且在任一时刻信号的幅值和相位都是在不断变化的。因此，从严格意义上讲，绝大多数信号都是随机信号。只不过

我们在研究信号与系统和研究空间信号时，常常忽略一些次要的干扰信号，主要研究占统治地位的信号的性质和变化趋势。本书主要研究确定信号。

3. 连续时间信号与离散时间信号

按照信号自变量 t 的取值特点，信号可以分为连续信号与离散信号。对任意一个信号，如果在定义域内，除有限个间断点外均有定义，则称此信号为连续时间信号。连续时间信号的自变量是连续可变的，而函数值在值域内可以是连续的，也可以是跳变的，用 $y(t)$ 表示。如图 1-1 (a) 中所示的斜坡信号，即是一个连续时间信号。

对任意一个信号，如果自变量仅在离散时间点上有定义，称为离散时间信号，它描述函数的定义域是某些离散点的集合。离散时间信号相邻离散时间点的间隔可以是相等的均匀分布，也可以是不均匀分布，在这些离散时间点之外，信号无定义。定义在等间隔离散时间点上的离散时间信号，称为序列。序列可以表示成函数形式，也可以直接列出序列值或写成序列值的集合。对于均匀分布的离散信号可以表示为 $y(nT)$ 或者 $y(n)$ ，也可称为时间序列。如下例函数表示的信号为一个离散时间信号。其波形图如图 1-2 所示。

$$y(n) = \begin{cases} n & n = 1, 2, 3 \\ 1 & n = -1, -2, \end{cases} \quad (1-1)$$

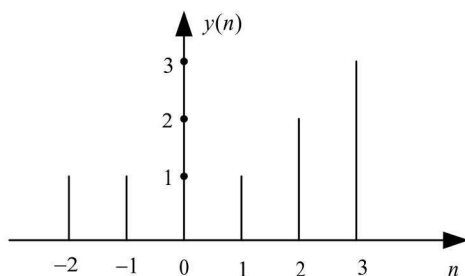


图 1-2 离散信号

在工程应用中，常常将幅值连续可变的信号称为模拟信号，将幅值连续的信号，在固定时间点上取值得到的信号称为取样信号。将幅值只

能取某些固定的值,而在时间上等间隔的离散时间信号称为数字信号。

4. 周期信号与非周期信号

按照信号有无周期,信号可以分为周期信号与非周期信号。周期信号是在一定时间内周而复始,且无始无终的信号。对于连续信号,若存在 $T > 0$, 使

$$y(t) = y(t + nT) \quad n \text{ 为整数} \quad (1-2)$$

对于离散信号,若存在自然数 $N > 0$, 使

$$y(n) = y(n + kN) \quad k \text{ 为整数} \quad (1-3)$$

则称 $y(t)$ 与 $y(n)$ 为周期信号,而 T 与 N 分别为 $y(t)$ 和 $y(n)$ 的周期。对于已知周期信号,如果已知信号在一个周期内的变换情况,就可以确定在定义域中的信号取值。

不满足式(1-2)或式(1-3)的信号称为非周期信号,它的幅值在时间上不具有周而复始变化的特性,即不具有周期性。非周期信号可以看作是无穷大的周期信号,即在有限时间范围内其波形不重复出现,如一段正弦信号。非周期信号又称为脉冲信号或有限长信号。一个无限长信号,如果不是周而复始的,也是非周期信号,如指数信号。

5. 能量信号和功率信号

从信号能量或功率角度来研究信号十分有用,如用在无线通信波束形成中,可研究波束指向,形成特定波束。

将一个电压或电流信号 $f(t)$ 加到单位电阻上,则在该电阻上产生的瞬时功率为 $|f(t)|^2$, 在一段时间 $(-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2})$ 内消耗一定的能量为

$$E = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} |f(t)|^2 dt \quad (1-4)$$

把该能量对时间区域取平均值,即得信号在此区间内的平均功率为

$$P = \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} |f(t)|^2 dt \quad (1-5)$$

若将时间区域无限扩展到区域 $(-\infty, +\infty)$, 信号满足条件式(1-6), $f(t)$ 称为能量信号。

$$E = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} |f(t)|^2 dt < \infty \quad (1-6)$$

同样, 对于离散信号 $f(n)$, 能量为

$$E = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 \quad (1-7)$$

即如果一个信号在无限大时间区域内信号的能量 E 为有限值, 而平均功率 P 为零, 则称该信号为能量有限信号或能量信号。仅在有限时间区间不为 0 的信号是能量信号, 如单个矩形脉冲信号。

将时间区域 $(-\infty, +\infty)$ 无限扩展, 信号满足条件(1-8)称为功率信号。

$$P = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} |f(t)|^2 dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} E < \infty \quad (1-8)$$

对于离散信号 $f(n)$ 平均功率为

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 \quad (1-9)$$

如果在无限大时间区域内信号的功率为一有限值, 则称为功率有限信号或功率信号。功率信号的能量 E 无限大。幅度有限的周期信号、随机信号等属于功率信号。

根据能量信号和功率信号的定义, 显然可以得出: 时限信号(在有限时间区域内存在非零值的信号)是能量信号, 周期信号是功率信号, 非周期信号可能是能量信号, 也可能是功率信号。

1.3 空间信号接收模型

空间信号是在空间的某个辐射源产生并在空间中经过相应的媒介传播, 最后入射到天线阵列的电磁波信号。天线阵列, 顾名思义, 就是将一组天线阵元按一定方式放置在空间中的不同位置上接收空间信号并进行处理的一种装置。阵列信号处理即利用天线阵列接收空间信号并对接收信号进行处理, 它是现代信号处理的一个重要分支。而现代数字信号处理技术与并行处理技术的发展, 又极大地促进了阵列信号处理的发展, 特别是随着超大规模集成电路的迅速发展, 各种先进阵列信号处理系统

不断地推出,使得阵列信号处理的研究与应用蓬勃发展。阵列信号处理的应用前景非常广阔,包括雷达、声呐、声学、无线通信、医学诊断、地震勘探、射电天文学等多领域。

阵列信号处理的主要技术包括波束形成。波束形成的主要目的是在空间方向上形成主波束来接收期望信号,形成超低旁瓣用于抑制干扰和不感兴趣信号。波束形成本质上是一种空域滤波技术,在无线通信、雷达、声呐中得到了较好的应用。波束形成器就是利用天线阵列对信号进行采样,然后对接收信号数据进行加权合并处理,得到阵列系统输出的处理器。

设在空间 p_0 点有信号源为 $s(t, p_0)$, t 为时间参数, p_0 为空间中的位置向量。空间任意 p 点的三维空间坐标表示为 (p_x, p_y, p_z) , 相应的球形坐标系中表示为 $(\|p\|\sin\phi\cos\theta, \|p\|\sin\phi\sin\theta, \|p\|\cos\phi)$, 如图 1-3 所示。

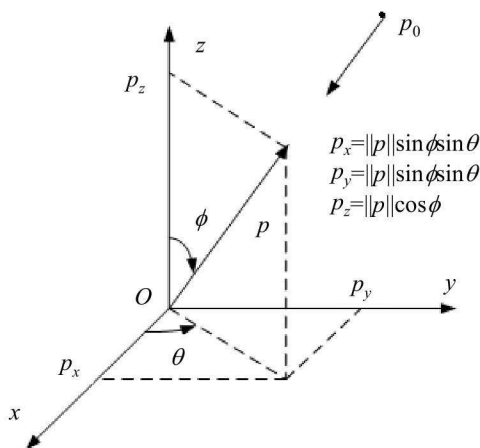


图 1-3 任意点的三维空间坐标

根据电磁场理论的麦克斯韦方程,假设信号源从空间 p_0 点传播到空间 p 点的表达式为

$$s(t, p) = \frac{A}{\|p - p_0\|^2} e^{j2\pi F_c \left(t - \frac{\|p - p_0\|}{c} \right)} \quad (1-10)$$

在式(1-10)中, A 是电磁波信号的幅度, F_c 为信号的载波频率, c 为电磁波在媒介中的传播速度。由此可见,天线的主要功能是将空间传播

的电磁波转化为可测量的电压或者电流。传统上常使用单根天线来接收信号，而单天线系统只能通过机械的改变尺寸或方位来抑制干扰、提取期望信号，不能自适应地改变对信号的响应。将一组天线按一定方式依次摆放在空间的不同位置上就构成了天线阵列，天线阵列可以获取空间源信号数据，然后运用相应的方法进行相关信号处理来获取所需的信息。由于天线阵列能克服单天线系统的不足而受到广泛的关注。天线阵列由两部分组成：天线阵元以及多个天线阵元构成阵列的空间几何形状。不同天线阵元本身具有各自的空频响应特性，如阵元的响应特性灵敏度函数与信号的方位和频率相关，即通常所说的阵元具有方向性。

天线阵元可分为全向天线阵元和有向天线阵元。全向天线阵元是各向同性的，阵元对周围空间具有相同的响应灵敏度，并且认为组成宽带阵列的各个阵元在整个工作频带内具有平坦响应。有向天线阵元表示阵元响应是空间方位的函数，随着空间方位的变化而改变，构成宽带阵列的各阵元在不同的工作频率具有不同的方向响应。

天线阵列可以分为：线阵、平面阵和体积阵。线阵和平面阵是体积阵的特例，线阵是平面阵的特例。在阵列信号处理中，最常用的阵列结构有均匀线性阵、均匀圆阵和均匀分布圆弧阵。这里的圆弧阵是圆阵的一部分，线阵和圆阵是最基本的阵列结构，平面阵和体积阵是任意几何结构阵列。由于天线阵元构成阵列的形状多样，先考虑最为一般的情况。

图 1-4 给出了一个由 M 阵元组成的任意几何结构阵列。

任意选定空间中的某阵元作为参考点，并以该参考点作为坐标原点建立直角坐标系，则阵列中各阵元的位置向量在直角坐标系中的三维坐标表示为

$$\mathbf{p}_m = [p_{xm}, p_{ym}, p_{zm}]^T \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (1-11)$$

式(1-11)中， $()^T$ 表示转置符号。假定一个平面波点源信号以 $\varphi = (\theta, \phi)$ 的空间方位角度入射到任意三维阵列，其中 θ 与 ϕ 分别代表入射信号的水平方位角和竖直俯仰角，信号沿传播方向的单位向量可以被定义为

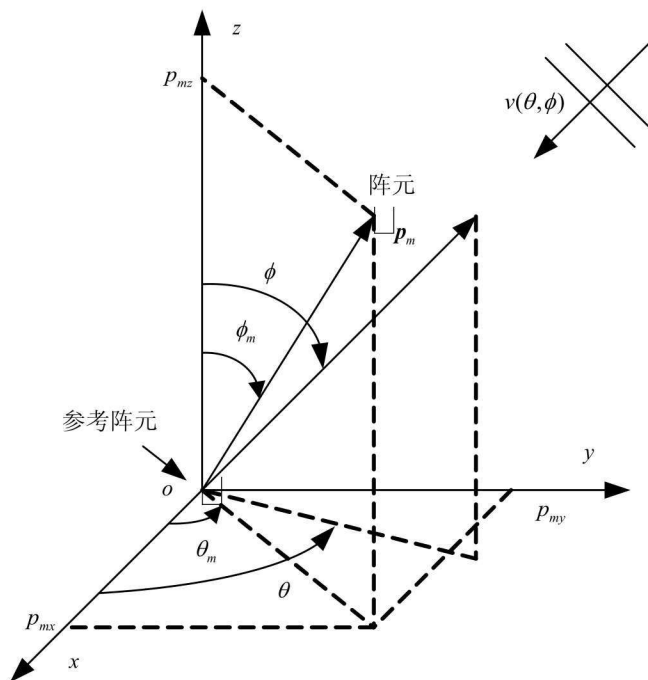


图 1-4 任意空间结构阵列模型

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\varphi) &= \mathbf{v}(\theta, \phi) \\ &= -[\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi]^T \end{aligned} \quad (1-12)$$

式(1-12)中，负号表示信号传播方向与阵列接收的方向相反。由于阵列中各阵元与信号源之间的距离各不相同，使得信号通过空间传播到达每个阵元的传播时间不同。

假设阵列参考点阵元接收到的信号波形为 $s(t)$ ，则信号传播到达第 m 阵元所需要的时间相对于参考点阵元的时间延迟为

$$\begin{aligned} \tau_m(\varphi) &= \mathbf{v}^T(\varphi) \cdot \mathbf{p}_m / c \\ &= -[p_{xm} \sin \phi \cos \theta + p_{ym} \sin \phi \sin \theta + p_{zm} \cos \phi] \quad (1-13) \\ &= -[p_m \sin \phi_m \sin \phi \cos(\theta - \theta_m) + p_m \cos \phi_m \cos \theta] \end{aligned}$$

因此，第 m 阵元接收到的信号为

$$s_m(t) = s[t - \tau_m(\varphi)] \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (1-14)$$

对于一个 M 阵元构成的天线阵列，其接收到的信号波形用向量的形

式表示为

$$\mathbf{x}(t)=[s_1(t), s_2(t), \cdots, s_M(t)]^T \quad (1-15)$$

式(1-15)中, $\mathbf{x}(t)$ 为一个 $M \times 1$ 维的列向量, $s_m(t)$ 为第 m 阵元接收到的信号, 将第 m 阵元接收到的信号波形进行傅立叶变换, 得到相应的信号频谱为

$$\begin{aligned} s_m(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_m(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_m[t - \tau_m(\varphi)] e^{-j\omega t} dt \\ &= e^{-j\omega \tau_m(\varphi)} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= s(\omega) e^{-j\omega \tau_m(\varphi)} \end{aligned} \quad (1-16)$$

式(1-16)中, ω 是信号的角频率, 它与频率 f 满足 $\omega=2\pi f$ 的关系, 参考点阵元接收信号 $s(t)$ 的频谱为

$$s(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1-17)$$

将阵列中阵元接收到的信号频谱以向量形式表达, 得到空间接收信号的向量模型为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\omega) &= [s_1(\omega), s_2(\omega), \cdots, s_M(\omega)]^T \\ &= [e^{-j\omega \tau_1(\varphi)}, e^{-j\omega \tau_2(\varphi)}, \cdots, e^{-j\omega \tau_M(\varphi)}]^T \cdot s(\omega) \end{aligned} \quad (1-18)$$

定义 $\mathbf{a}(\omega, \varphi) = [e^{-j\omega \tau_1(\varphi)}, e^{-j\omega \tau_2(\varphi)}, \cdots, e^{-j\omega \tau_M(\varphi)}]^T$ 为阵列响应向量, 则式(1-18)表示为

$$\mathbf{x}(\omega) = \mathbf{a}(\omega, \varphi) \cdot s(\omega) \quad (1-19)$$

根据信号角频率 ω 与信号频率 f 之间的关系, 阵列响应向量可以写成如下等效形式

$$\mathbf{a}(f, \varphi) = [e^{-j2\pi f \tau_1(\varphi)}, e^{-j2\pi f \tau_2(\varphi)}, \cdots, e^{-j2\pi f \tau_M(\varphi)}]^T \quad (1-20)$$

由式(1-20)可见, 阵列响应向量是信号频率和空间方位角的函数, 不同频率信号经过同一阵列有着不同的阵列响应向量, 同一频率信号在不同的入射角下也会有着不同的阵列响应向量。