

高考调研

COLLEGE
entrance examination
research

数
学

新课标B版必修五

衡水重点中学
★同步精讲精练★

名不见经传的学校 普普通通的老师

连续十年重点升学率 全国第一

却创造了一个 高考的神话

清华北大 人数占河北省总数的三分之一



高考调研

COLLEGE

entrance examination
research

★衡水重点中学
同步精讲精练★

数学

新课标B版必修五

丛书主编：李书恒
本册主编：陈健
编者：苏占舫 刘玉芳 刘柄勋
谢爱萍



河北出版传媒集团
河北少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

衡水重点中学同步精讲精练：新课标B版. 数学. 5：必修 / 李书恒主编. — 石家庄：河北少年儿童出版社，2015.2

(高考调研)

ISBN 978-7-5376-7856-8

I. ①衡… II. ①李… III. ①中学数学课—高中—教学参考资料 IV. ①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第034468号

衡水重点中学同步精讲精练·新课标B版·数学必修五

- 出版 河北出版传媒集团
河北少年儿童出版社
- 通信地址 石家庄市中华南大街172号 邮政编码 050051
- 网址 www.hebcph.com
- 印刷 肃宁县科发印刷厂
- 发行 新华书店
- 开本 880毫米×1230毫米 1/16
- 印张 8
- 字数 192千字
- 版次 2015年2月第1版
- 印次 2015年6月第1次印刷
- 书号 ISBN 978-7-5376-7856-8
- 定价 29.00元



CONTENTS

新 课 标

第一章 解三角形	1
1.1 正弦定理和余弦定理	1
1.1.1 正弦定理	1
1.1.2 余弦定理	5
1.1 习题课 (正、余弦定理的综合应用)	9
1.2 应用举例	13
第一章 章节测试题	18
第二章 数列	20
2.1 数列	20
2.2 等差数列	25
2.2.1 等差数列 (第一课时)	25
2.2.1 等差数列 (第二课时)	29
2.2.2 等差数列的前 n 项和 (第一课时)	33
2.2.2 等差数列的前 n 项和 (第二课时)	37
2.3 等比数列	41
2.3.1 等比数列 (第一课时)	41
2.3.1 等比数列 (第二课时)	45
2.3.2 等比数列的前 n 项和 (第一课时)	50
2.3.2 等比数列的前 n 项和 (第二课时)	54
专题研究一 数列通项的求法	58
专题研究二 特殊数列求和方法	62
第二章 章节测试题	64



CONTENTS



新

课

标

第三章 不等式	66
3.1 不等关系与不等式	66
3.1.1 不等关系与不等式	66
3.1.2 不等的性质	70
3.2 均值不等式	75
3.3 一元二次不等式及其解法	81
3.4 不等式的实际应用 (专题研究)	85
3.5 二元一次不等式 (组) 与简单的线性规划问题	88
3.5.1 二元一次不等式 (组) 所表示的平面区域	88
3.5.2 简单线性规划	93
第三章 章节测试题	99
模块能力检测卷	101
参考答案	103



第一章

解三角形



高考调研，
与你同行

1.1 正弦定理和余弦定理

1.1.1 正弦定理

● 书读百遍

要点1 正弦定理

(1) 在一个三角形中,各边和所对角的_____的比相等,即
_____ = _____ = _____ = $2R$ (其中 R 是 $\triangle ABC$ 外接圆的半径).

(2) 正弦定理的三种变形

① $a = 2R \sin A, b = \underline{\hspace{2cm}}, c = \underline{\hspace{2cm}};$

② $\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \underline{\hspace{2cm}}, \sin C = \underline{\hspace{2cm}};$

③ $a : b : c = \underline{\hspace{2cm}}.$

要点2 三角形内的诱导公式

$\sin(A+B) = \underline{\hspace{2cm}}; \cos(A+B) = \underline{\hspace{2cm}};$

$\tan(A+B) = \underline{\hspace{2cm}};$

$\sin(\frac{A+B}{2}) = \underline{\hspace{2cm}}; \cos(\frac{A+B}{2}) = \underline{\hspace{2cm}};$

$\tan(\frac{A+B}{2}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

要点3 三角形的面积公式

$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

要点4 应用正弦定理解三角形中的常见类型

- (1) 已知三角形的任意两内角与一边,求另一角及另两边;
- (2) 已知三角形的两边与其中一边的对角,可以计算出另一边的对角的正弦值,进而确定这个角和三角形其他的边和角.

● 入木三分

1. 在 $\triangle ABC$ 中,已知两边与其中一边的对角时,怎样确定三角形解的个数?

答:已知 $\triangle ABC$ 的两边 a, b 和角 A 解三角形时,有以下方法:

根据三角函数的性质来判断.

由正弦定理,得 $\sin B = \frac{b \sin A}{a}.$

当 $\frac{b \sin A}{a} > 1$ 时,则无解;

当 $\frac{b \sin A}{a} = 1$ 时,则有一解;

当 $\frac{b \sin A}{a} < 1$ 时,若 $a \geq b$,即 $A \geq B$,则 B 一定为锐角,则有一解;若 $a < b$,即 $A < B$,则有两解.

2. 在 $\triangle ABC$ 中,由 $\sin A > \sin B$ 一定能推出 $A > B$ 吗?

答:该结论在 $\triangle ABC$ 中成立.

$\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \sin A > \sin B, \therefore a > b.$

根据大角对大边这一结论,

$\therefore A > B.$

授人以渔

SHOUREN YIYU

授渔·解惑

题型一 已知两角及一边解三角形

例 1 已知在 $\triangle ABC$ 中, $c=10, A=45^\circ, C=30^\circ$, 求 a, b 和 B .

【解析】 $\because \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$,

$$\therefore a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{10 \times \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 10\sqrt{2}$$

$$B = 180^\circ - (A + C) = 180^\circ - (45^\circ + 30^\circ) = 105^\circ.$$

$$\text{又 } \because \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\therefore b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{10 \times \sin 105^\circ}{\sin 30^\circ} = 20 \sin 75^\circ$$

$$= 20 \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 5(\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

题型二 已知两边和其中一边的对角解三角形

例 2 $\triangle ABC$ 中, (1) $a=\sqrt{6}, b=2, B=45^\circ$, 求 C ;

(2) $A=60^\circ, a=\sqrt{2}, b=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 求 B ;

(3) $a=3, b=4, A=60^\circ$, 求 B .

【解析】 (1) 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 得

$$\sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

又 $A \in (0, \pi)$, $\therefore A=60^\circ$ 或 120° .

$\therefore C=75^\circ$ 或 $C=15^\circ$.

$$(2) \text{ 由正弦定理 } \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\therefore B=45^\circ$ 或 135° , 但 $B=135^\circ$ 时, $135^\circ + 60^\circ > 180^\circ$, 这与 $A+B < 180^\circ$ 矛盾, $\therefore B=45^\circ$.

$$(3) \text{ 由正弦定理 } \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} > 1.$$

$\therefore$ 这样的角 B 不存在.

【讲评】 已知两边及一角解三角形时, 如果已确定三角形有解 (如本例 (1)(2)), 可用“大角对大边”来判定是有一解还是有两解, 不必死记硬背某些结论.

探究·思考

探究 1 已知两角及一边可用正弦定理求出三角形的其它元素, 此类题有唯一解.

●思考题 1 (2012 · 潍坊一中月考) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=\sqrt{3}, A=45^\circ, C=75^\circ$, 则 BC 等于 ()

A. $3-\sqrt{3}$

B. $\sqrt{2}$

C. 2

D. $3+\sqrt{3}$

探究 2 已知两边和其中一边的对角, 三角形形状一般不确定, 用正弦定理求解时, 要根据条件判断这个三角形是否有解, 有解时一解还是两解, 具体方法是: 若给出的角是锐角, 这个角的对边小于另一边, 则有两解 (如本例 (1)). 反之则只有一解 (如本例 (2)); 或给出的角是钝角, 且这个角的对边大于另一边, 有一解, 反之则无解. 判断的依据是: 同一三角形中大边 (角) 对大角 (边).

●思考题 2 (1) 已知 $\triangle ABC$ 中, $a=x, b=2, B=45^\circ$, 若这个三角形有两解, 则 x 的取值范围是 _____.

(2) 已知 $\triangle ABC$ 中, $a=\sqrt{2}, b=\sqrt{3}, B=60^\circ$, 那么角 A 等于 ()

A. 135°

B. 90°

C. 45°

D. 30°

(3) 在 $\triangle ABC$ 中, $a=1, b=\sqrt{3}, A=45^\circ$. 则满足此条件的三角形的个数是 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 无数个

题型三 判断三角形的形状

例 3 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a^2 \tan B = b^2 \tan A$, 试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

【思路分析】 观察条件等式的特点, 为边角关系, 首先应用正弦定理将边化为角, 再利用三角公式求解, 亦可应用正弦定理将角化为边的关系进行整理.

【解析】 由已知, 得 $\frac{a^2 \sin B}{\cos B} = \frac{b^2 \sin A}{\cos A}$.

由正弦定理 $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$ (R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径), 得

$$\frac{4R^2 \sin^2 A \sin B}{\cos B} = \frac{4R^2 \sin^2 B \sin A}{\cos A},$$

$$\sin A \cos A = \sin B \cos B.$$

$$\therefore \sin 2A = \sin 2B.$$

$$\therefore 2A \in (0, 2\pi), 2B \in (0, 2\pi),$$

$$\therefore 2A = 2B \text{ 或 } 2A = \pi - 2B, \text{ 即 } A = B \text{ 或 } A + B = \frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 为等腰三角形或直角三角形.}$$

【讲评】 本题容易由 $\sin 2A = \sin 2B$ 得出 $2A = 2B$, 而忽略 $2A = \pi - 2B$.

探究 3 已知三角形中的边和角的“混合”关系等式, 判断三角形的形状时, 有两种方法:

(1) 化边的关系为角的关系, 再进行三角恒等变换, 求出三个角之间的关系式;

(2) 化角的关系为边的关系, 再进行代数恒等变换, 求出三条边之间的关系式.

●思考题 3 根据下列条件, 判断三角形形状.

(1) 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin A = 2 \sin B \cdot \cos C$, $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, $\frac{\cos A}{a} = \frac{\cos B}{b} = \frac{\cos C}{c}$.

课后巩固

- 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 178^\circ$, $B = 1^\circ$, 则有 ()
 A. $\frac{a}{\sin A} > \frac{b}{\sin B}$ B. $\frac{a}{\sin A} < \frac{b}{\sin B}$
 C. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ D. 以上结论都不对
- 已知在 $\triangle ABC$ 中, $b = 4\sqrt{3}$, $c = 2$, $C = 30^\circ$, 那么解此三角形可得 ()
 A. 一解 B. 两解
 C. 无解 D. 解的个数不确定
- 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $c = 10\sqrt{2}$, $a = \frac{20\sqrt{3}}{3}$, $A = 45^\circ$, 则 $C =$ _____.
- (2009 · 福建) 已知锐角 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$, $BC = 4$, $CA = 3$, 则角 C 的大小为 ()
 A. 75° B. 60°
 C. 45° D. 30°
- 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $b^2 \sin^2 C + c^2 \sin^2 B = 2bc \cos B \cos C$, 试判断三角形的形状.

>>>> 自助餐 <<<<

ZIZHUCAN

例 1 为何说任意一个三角形中, 一边与其所对应的角的正弦值之比都等于该三角形的外接圆的直径, 即 $\frac{a}{\sin A} =$

$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径)?

【解析】 如图 1.1-1, 当 $\triangle ABC$ 为直角三角形时, 直接得到 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 中角 A, B, C 的对边, R 为外接圆半径).

如图 1.1-2, 当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时, 连接 BO 交圆 O 于 D , 连接 CD . 因为 $\angle A = \angle D$, 则在 $\triangle BCD$ 中, $\frac{a}{\sin A} =$

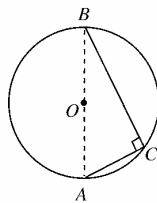


图 1.1-1

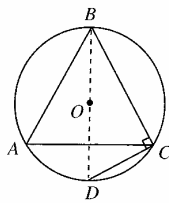


图 1.1-2

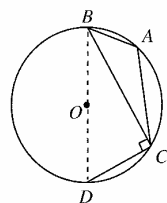


图 1.1-3

$\frac{a}{\sin D} = 2R$, 同理, $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

即 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

如图 1.1-3, 当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形时, 连接 BO 交圆 O 于 D , 连接 CD , $\angle A = 180^\circ - \angle D$, 所以 $\frac{a}{\sin A} =$

$$\frac{a}{\sin(180^\circ - D)} = \frac{a}{\sin D} = 2R, \text{同理, } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

$$\text{即 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

综上所述, 对于任意 $\triangle ABC$, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ 恒成立.

例 2 在 $\triangle ABC$ 中, 设 $\overrightarrow{BC} = a, \overrightarrow{CA} = b, \overrightarrow{AB} = c$, 并且 $a \cdot b = b \cdot c = c \cdot a$. 求证: $\triangle ABC$ 为正三角形.

【证明】如图 1.1-4 所示, 由 $a \cdot b = b \cdot c$, 得 $|a| \cdot |b| \cos(\pi - C) = |b| \cdot |c| \cos(\pi - A)$,
 $\therefore |a| \cos C = |c| \cos A.$

又由正弦定理, 得 $\sin A \cos C = \sin C \cos A.$

$$\therefore \sin(A - C) = 0, \therefore A = C.$$

同理可由 $a \cdot b = c \cdot a$, 得 $B = C.$

$\therefore A = B = C$. 即 $\triangle ABC$ 为等边三角形.

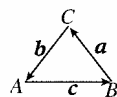


图 1.1-4

一 课 一 卷

YI KE YI JUAN

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\cos B}{b}$, 则 $\angle B$ 的值为 ()

- A. 30° B. 45°
C. 60° D. 90°

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{b}{a}$, 则 $\triangle ABC$ 是 ()

- A. 等腰三角形
B. 等边三角形
C. 直角三角形
D. 等腰三角形或直角三角形

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sqrt{3}a = 2b \sin A$, 则 B 为 ()

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}$
C. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2}{3}\pi$ D. $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5}{6}\pi$

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $A : B : C = 4 : 1 : 1$, 则 $a : b : c$ 为 ()

- A. $3 : 1 : 1$ B. $2 : 1 : 1$
C. $\sqrt{2} : 1 : 1$ D. $\sqrt{3} : 1 : 1$

5. 以下关于正弦定理的叙述或变形中错误的是 ()

- A. 在 $\triangle ABC$ 中, $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$
B. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = b \Leftrightarrow \sin 2A = \sin 2B$
C. 在 $\triangle ABC$ 中, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C}$
D. 在 $\triangle ABC$ 中, 正弦值较大的角所对的边也较大

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 20, b = 10, B = 29^\circ$, 则此三角形解的情况是 ()

- A. 无解 B. 有一解
C. 有两解 D. 有无数个解

7. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $c = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{6}, B = 120^\circ$, 则 a 等于 ()

- A. $\sqrt{6}$ B. 2
C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2}$

8. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\tan A = \frac{1}{3}, C = 150^\circ, BC = 1$, 则 $AB =$ _____.

9. $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 则 $a(\sin C - \sin B) + b(\sin A - \sin C) + c(\sin B - \sin A) =$ _____.

10. 在 $\triangle ABC$ 中, $\lg(\sin A + \sin C) = 2 \lg \sin B - \lg(\sin C - \sin A)$, 则该三角形的形状是 _____.

11. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 45^\circ, a = 2, c = \sqrt{6}$, 解此三角形.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, $C - A = \frac{\pi}{2}, \sin B = \frac{1}{3}$.

(1) 求 $\sin A$ 的值;

(2) 设 $AC = \sqrt{6}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 求证: $\frac{\cos 2A}{a^2} - \frac{\cos 2B}{b^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$.

1.1.2 余弦定理

● 书读百遍

要点1 余弦定理

三角形中任何一边的平方等于其他两边的平方和减去这两边与它们的夹角的余弦的积的两倍. 即:

$$a^2 = \underline{\hspace{2cm}}, b^2 = \underline{\hspace{2cm}}, \\ c^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

要点2 余弦定理的推论

$$\cos A = \underline{\hspace{2cm}}, \cos B = \underline{\hspace{2cm}}, \\ \cos C = \underline{\hspace{2cm}}.$$

要点3 余弦定理及勾股定理

- (1) 如果一个三角形两边的平方和大于第三边的平方, 那么第三边所对的角是 角.
- (2) 如果一个三角形两边的平方和小于第三边的平方, 那么第三边所对的角是 角.
- (3) 如果一个三角形两边的平方和等于第三边的平方, 那么第三边所对的角是 角.

● 入木三分

1. 如何选择正弦定理、余弦定理解三角形?

答: 由三角形的已知的边和角求未知的边和角的过程叫解三角形. 解三角形可以分成以下四种类型:

- (1) 已知两角及一边, 解三角形. (先用正弦定理求出一边, 再求其余边和角);
- (2) 已知两边及一边的对角, 解三角形. (先用正弦定理求出另一边的对角, 再用正弦定理或余弦定理求第三边);
- (3) 已知两边及其夹角, 解三角形. (先用余弦定理求出第三边, 再用正弦定理或余弦定理求出另两角);
- (4) 已知三边, 解三角形. (先用余弦定理的推论, 求出一角, 再用正弦定理求另外的角).

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $b=3, c=3\sqrt{3}, B=30^\circ$, 求 a . 能用余弦定理求解吗?

答: 能. 由余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, 得

$$3^2 = a^2 + (3\sqrt{3})^2 - 2 \times 3 \times 3\sqrt{3} \cos 30^\circ.$$

$$\therefore a^2 - 9a + 18 = 0, \therefore a = 3 \text{ 或 } a = 6.$$

显然, 此类题利用余弦定理较为简单. 解一元二次方程时, 若两根为正, 则有两解, 若有非正根, 则舍去.

>>>> 授人以渔 <<<<

SHOUREN YIYU



授渔·解惑

■ 题型一 已知两边和夹角解三角形

例1 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a=2, b=2\sqrt{2}, C=15^\circ$, 求 A .

【思路分析】 本题主要考查余弦定理及其应用.

思路一: 可用余弦定理求边 c , 再用正弦定理求角 A .

思路二: 可用余弦定理求边 c , 再用余弦定理的推论求角 A .

【解析】 解法一 $\because \cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$,

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$

由余弦定理, 得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 4 + 8 - 2\sqrt{2} \times (\sqrt{6} + \sqrt{2}) = 8 - 4\sqrt{3}$. $\therefore c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

又 $b > a$, $\therefore B > A$. $\therefore A$ 为锐角. 由正弦定理,

$$\text{得 } \sin A = \frac{a}{c} \sin C = \frac{2}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}. \therefore A = 30^\circ.$$

解法二 $\because \cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$,

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$



探究·思考

探究1 本题是已知两边及夹角解三角形. 用正弦定理求角时, 必须注意讨论解的情况, 结合三角形大边对大角的性质, 由于三角形中至少有两个锐角, 那么小边对的角一定是锐角. 在解三角形问题时, 应根据题目中给定的条件, 灵活地选择正弦、余弦定理.

● 思考题1 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=1, BC=2, B=60^\circ$, 则 $AC=$.

由余弦定理,得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 4 + 8 - 2\sqrt{2} \times (\sqrt{6} + \sqrt{2})$
 $= 8 - 4\sqrt{3}$. $\therefore c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

$$\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ 又 } 0^\circ < A < 180^\circ, \therefore A = 30^\circ.$$

题型二 已知三边解三角形

例 2 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a=7, b=3, c=5$,求最大角和 $\sin C$.

【解析】 $\because a > c > b$,

$\therefore A$ 为最大角.

由余弦定理的推论,得

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \times 3 \times 5} = -\frac{1}{2}.$$

又 $\because 0^\circ < A < 180^\circ, \therefore A = 120^\circ$.

$$\therefore \sin A = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$,得

$$\sin C = \frac{c \sin A}{a} = \frac{5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{7} = \frac{5\sqrt{3}}{14}.$$

$\therefore$ 最大角 A 为 $120^\circ, \sin C = \frac{5\sqrt{3}}{14}$.

题型三 判断三角形的形状

例 3 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{b+c}{2c}$ (a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边),判断 $\triangle ABC$ 的形状.

【解析】 在 $\triangle ABC$ 中,

$$\text{法一 } \because \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{b+c}{2c}, \therefore \frac{1+\cos A}{2} = \frac{b}{2c} + \frac{1}{2}, \therefore \cos A = \frac{b}{c}.$$

$$\text{又由余弦定理知 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\therefore \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b}{c}, \therefore b^2 + c^2 - a^2 = 2b^2, \therefore a^2 + b^2 = c^2.$$

$\therefore \triangle ABC$ 是以 C 为直角的直角三角形.

$$\text{法二 由法一知, } \cos A = \frac{b}{c},$$

$$\text{由正弦定理,得 } \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}, \therefore \cos A = \frac{\sin B}{\sin C}.$$

$$\therefore \sin C \cos A = \sin B = \sin [180^\circ - (A+C)]$$

$$= \sin A \cos C + \cos A \sin C.$$

$$\therefore \sin A \cos C = 0.$$

$\because A, C$ 是 $\triangle ABC$ 的内角, $\therefore \sin A \neq 0$.

$\therefore$ 只有 $\cos C = 0, \therefore C = 90^\circ$.

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

探究 2 (1)求 $\sin C$ 也可用下面方法:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{7^2 + 3^2 - 5^2}{2 \times 7 \times 3} = \frac{11}{14}, \therefore C \text{ 为锐角}.$$

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{14}\right)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{14}.$$

(2)在解三角形时,有时既可用余弦定理,也可用正弦定理.

●思考题 2 在 $\triangle ABC$ 中,三边长为连续的自然数,且最大角为钝角,求此三角形的三边长.

探究 3 已知三角形中的边角关系式,判断三角形的形状,有两条思路:

(1)化边为角,再进行三角恒等变换求出三个角之间的关系式;

(2)化角为边,再进行代数恒等变换求出三条边之间的关系式.两种转化主要应用正弦定理和余弦定理.

●思考题 3 (1)在 $\triangle ABC$ 中, $a=2, b=3, c=4$,能判断 $\triangle ABC$ 的形状吗?

(2)在 $\triangle ABC$ 中,已知 $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$,且 $2\cos A \cdot \sin B = \sin C$,试确定 $\triangle ABC$ 的形状.

题型四 综合问题

例4 已知三角形周长 $l=18$, $S_{\triangle}=6\sqrt{3}$, $C=60^\circ$, 求 a, b 边.

【解析】 $\because$ 周长 $l=18$, $S_{\triangle}=6\sqrt{3}$, $C=60^\circ$,

$$\therefore \begin{cases} a+b+c=18, \\ \frac{1}{2}absin60^\circ=6\sqrt{3}, \quad (\text{方程思想的应用}) \\ c^2=a^2+b^2-2abcos60^\circ. \end{cases}$$

$$\text{整理得} \begin{cases} a+b+c=18, & \textcircled{1} \\ ab=24, & \textcircled{2} \\ c^2=a^2+b^2-ab. & \textcircled{3} \end{cases}$$

(从解这个方程组的过程中掌握方法)

将②代入③, 得 $c^2=a^2+b^2-24$. ④

$$\textcircled{1}、\textcircled{4} \text{ 联立得 } \begin{cases} a+b+c=18, & \textcircled{1} \\ c^2=a^2+b^2-24. & \textcircled{4} \end{cases}$$

消去 c , 整理得 $a+b=11$. ⑤

由②、⑤得 $a=3, b=8$ 或 $a=8, b=3$.

例5 钝角 $\triangle ABC$ 中 $\angle B > 90^\circ$, $a=2x-5$, $b=x+1$, $c=4$, 求 x 的取值范围.

【解析】 因为 $B > 90^\circ$, 所以 A, C 均为锐角, 由题设应有

$$\begin{cases} b > a, \\ b > c, \\ a+c > b, \\ \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} < 0. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x+1 > 2x-5, \\ x+1 > 4, \\ 2x-5+4 > x+1, \\ (2x-5)^2+4^2-(x+1)^2 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < 6, \\ x > 3, \\ x > 2, \\ 3x^2-22x+40 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 < x < 6, \\ \frac{10}{3} < x < 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{10}{3} < x < 4.$$

故 x 的取值范围是 $(\frac{10}{3}, 4)$.

探究4 余弦定理和正弦定理一样, 都是围绕着三角形进行边角转换的, 所以在有关三角形的题目中, 要有意识的考虑用哪个定理更合适, 还是两个定理都要用, 要抓住两个定理应用的信息, 一般地, 如果遇到的式子含角的余弦或是边的二次式, 要考虑用余弦定理; 反之, 若是遇到的式子含角的正弦和边的一次式, 则大多用正弦定理, 若是以上特征不明显, 则要考虑两个定理都有可能用.

●思考题4 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边, S 是 $\triangle ABC$ 的面积, 若 $a=4, b=5, S=5\sqrt{3}$, 求 c 的长度.

探究5 (1) 解决本题的关键在于合理、充分地运用条件 $\angle B > 90^\circ$.

(2) 在解斜三角形问题中, 会经常用到除正、余弦定理外的其他知识, 如:

在 $\triangle ABC$ 中, 设三内角 A, B, C 对应的三边分别为 a, b, c , 则有:

$$\textcircled{1} A+B+C=\pi;$$

$$\textcircled{2} a+b > c \text{ 或 } a+c > b \text{ 或 } b+c > a;$$

$$\textcircled{3} \text{ 大角对大边, 小角对小边;}$$

$$\textcircled{4} \text{ 特殊的条件恒等式: } \sin A = \sin(B+C),$$

$$\sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B+C}{2} \text{ 等}.$$

●思考题5 已知钝角三角形的三边分别为 $x+1, x+2$ 和 x , 则 x 的取值范围是_____.

课后巩固

- 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 下列等式不成立的是 ()
 A. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$ B. $b^2 = c^2 + a^2 - 2accosB$
 C. $cosA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ D. $cosC = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2ab}$
- 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a^2 + c^2 - b^2 = \sqrt{3}ac$, 则角 B 的值为 ()
 A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$
 C. $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$
- 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=1, BC=2, B=60^\circ$, 则 $AC=$ _____.
- 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 当 $a^2 + b^2 < c^2$ 时, $\triangle ABC$ 的形状是 ()
 A. 直角三角形 B. 锐角三角形
 C. 钝角三角形 D. 不确定
- 在 $\triangle ABC$ 中, $a=2, b=5, c=6$, 则 $cosB$ 等于 ()
 A. $\frac{15}{24}$ B. $\frac{65}{24}$
 C. $\frac{57}{60}$ D. $-\frac{7}{20}$

>>>> 自助餐 <<<<

ZIZHUCAN

已知两边及一边的对角解三角形

例 1 $\triangle ABC$ 中, 已知 $b=3, c=3\sqrt{3}, B=30^\circ$, 求角 A , 角 C 和边 a .

【解析】法一 由余弦定理

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB,$$

$$\text{得 } 3^2 = a^2 + (3\sqrt{3})^2 - 2a \times 3\sqrt{3} \times \cos 30^\circ.$$

$$\therefore a^2 - 9a + 18 = 0, \text{ 得 } a=3 \text{ 或 } 6.$$

$$\text{当 } a=3 \text{ 时, } A=30^\circ, \therefore C=120^\circ.$$

$$\text{当 } a=6 \text{ 时, 由正弦定理得 } \sin A = \frac{asinB}{b} = \frac{6 \times \frac{1}{2}}{3} = 1.$$

$$\therefore A=90^\circ, \therefore C=60^\circ.$$

法二 由 $b < c, B=30^\circ$,

$$b > csin30^\circ = 3\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ 知本题有两解.}$$

$$\text{由正弦定理得 } \sin C = \frac{csinB}{b} = \frac{3\sqrt{3} \times \frac{1}{2}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore C=60^\circ \text{ 或 } 120^\circ.$$

当 $C=60^\circ$ 时, $A=90^\circ$, 由勾股定理, 得

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6.$$

当 $C=120^\circ$ 时, $A=30^\circ$, $\triangle ABC$ 为等腰三角形,

$$\therefore a=3.$$

探究 可比较两种解法, 从中体会各自的优点, 三角形中已知两边和一角, 有两种解法. 从而摸索出适合自己思维的解题规律和方法. 方法一利用余弦定理列出关于 a 的等量关系建立方程, 运用解方程的方法求出 a 边的长, 这样可免去判断取舍的麻烦. 方法二直接运用正弦定理, 先求角再求边.

>>>> 一课一卷 <<<<

YIKE YIJUAN

- 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边分别为 a, b, c . 若 $a=c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$, 且 $\angle A=75^\circ$, 则 $b=$ ()
 A. 2 B. $4+2\sqrt{3}$
 C. $4-2\sqrt{3}$ D. $\sqrt{6}-\sqrt{2}$
- 在 $\triangle ABC$ 中, $b=\sqrt{3}, c=3, B=30^\circ$, 则 a 为 ()
 A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$
 C. $\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{3}$ D. 2
- 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin B \sin C + \sin^2 C$, 则 A 等于 ()
 A. 30° B. 60° C. 120° D. 150°
- 若 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边, 且 $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} > 1$, 则 $\triangle ABC$ 一定是 ()
 A. 直角三角形 B. 等边三角形
 C. 锐角三角形 D. 钝角三角形
- 边长 5、7、8 的三角形的最大角与最小角的和是 ()
 A. 90° B. 120° C. 135° D. 150°
- 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a:b:c=3:5:7$, 则这个三角形最大角的外角是 ()
 A. 30° B. 60° C. 90° D. 120°
- 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=7, AC=6, M$ 是 BC 的中点, $AM=4$, 则 BC 等于 ()
 A. $\sqrt{21}$ B. $\sqrt{106}$
 C. $\sqrt{69}$ D. $\sqrt{154}$
- 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $(a^2 + c^2 - b^2) \tan B = \sqrt{3}ac$, 则角 B 的值为 ()

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$

D. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$

9. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a\cos A + b\cos B = c\cos C$, 则 $\triangle ABC$ 是 ()

A. 等腰三角形

B. 直角三角形

C. 等腰直角三角形

D. 等边三角形

10. 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C , $B = \frac{\pi}{3}$ 且 $AB = 1, BC = 4$, 则边 BC 上的中线 AD 的长为 _____.

11. 设 $\triangle ABC$ 三边长分别为 15, 19, 23, 现将三边长各减去 x 后, 得一钝角三角形, 则 x 的范围为 _____.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 边 a, b 的长是方程 $x^2 - 5x + 2 = 0$ 的两个根, $C = 120^\circ$, 则边 $c =$ _____.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 三个角 A, B, C 的对边边长分别为 $a = 3, b = 4, c = 6$, 则 $b\cos A + c\cos B + a\cos C$ 的值为 _____.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且满足

$$\cos \frac{A}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3.$$

(1) 求 $\triangle ABC$ 的面积; (2) 若 $c = 1$, 求 a 的值.

1.1 习题课(正、余弦定理的综合应用)

授人以渔 <<<<

SHOUREN YIYU



授渔·解惑

题型一 求三角形的面积

例 1 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $B = 30^\circ, AB = 2\sqrt{3}, AC = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【解析】解法一 $\because AB = 2\sqrt{3}, AC = 2, B = 30^\circ$,

由正弦定理, 可得 $\sin C = \frac{AB \cdot \sin B}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because AB > AC, \therefore C > B$, 则 C 有两解.

① 当 C 为锐角时, $C = 60^\circ, A = 90^\circ$,

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = 2\sqrt{3}.$$

② 当 C 为钝角时, $C = 120^\circ, A = 30^\circ$,

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \sqrt{3}.$$

解法二 设 $BC = a, AC = b, AB = c$,

由余弦定理, 得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$.

$$\therefore 2^2 = a^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2a \times 2\sqrt{3} \cos 30^\circ.$$

即 $a^2 - 6a + 8 = 0$, 解得 $a = 2$ 或 $a = 4$.

$$\text{① 当 } a = 2 \text{ 时, } S = \frac{1}{2} ac \sin B = \sqrt{3};$$

$$\text{② 当 } a = 4 \text{ 时, } S = \frac{1}{2} ac \sin B = 2\sqrt{3}.$$



探究·思考

探究 1 (1) 求解三角形面积公式较多, 除 $S = \frac{1}{2} \times$

底 $\times$ 高外, $S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B$ 也应

用较广.

(2) 先用正弦定理求三角形, 进而用公式求三角形的面积.

●思考题 1 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 1, $\tan B = \frac{1}{2}, \tan C = -2$, 求 $\triangle ABC$ 的边长以及 $\triangle ABC$ 外接圆的面积.

题型二 正、余弦定理的综合问题

例 2 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 对边的边长分别是 a, b, c , 已知 $c=2, C=\frac{\pi}{3}$.

- (1) 若 $\triangle ABC$ 的面积等于 $\sqrt{3}$, 求 a, b ;
 (2) 若 $\sin B=2\sin A$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解析】 (1) $\because S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$,
 $\therefore ab=4$. ①
 $\because c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=(a+b)^2-2ab-2ab\cos C$
 $= (a+b)^2-12=4$,
 $\therefore a+b=4$. ②
 由 ①② 可得 $a=2, b=2$.
 (2) $\because \sin B=2\sin A, \therefore b=2a$.
 又 $\because c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=(a+b)^2-3ab=4$,
 $\therefore a=\frac{2\sqrt{3}}{3}, b=\frac{4\sqrt{3}}{3}, \therefore S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

例 3 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos B=-\frac{5}{13}, \cos C=\frac{4}{5}$.

- (1) 求 $\sin A$ 的值;
 (2) 设 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{33}{2}$, 求 BC 的长.

解析】 (1) 由 $\cos B=-\frac{5}{13}$, 得 $\sin B=\frac{12}{13}$.
 由 $\cos C=\frac{4}{5}$, 得 $\sin C=\frac{3}{5}$.
 所以 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\frac{33}{65}$.
 (2) 由 $S_{\triangle ABC}=\frac{33}{2}$, 得
 $\frac{1}{2}\times AB\times AC\times \sin A=\frac{33}{2}$.
 由 (1) 知 $\sin A=\frac{33}{65}$.
 故 $AB\times AC=65$.
 又 $AC=\frac{AB\times \sin B}{\sin C}=\frac{20}{13}AB$,
 故 $\frac{20}{13}AB^2=65, AB=\frac{13}{2}$.
 所以 $BC=\frac{AB\times \sin A}{\sin C}=\frac{11}{2}$.

题型三 证明恒等式

例 4 (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,
 证明: $\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{\sin(A-B)}{\sin C}$.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 记外接圆半径为 R . 求证: $2R\sin(A-B)=\frac{a^2-b^2}{c}$.

探究 2 本题考查的是三角形中的基本运算, 直接借助于正余弦定理以及三角形的面积公式就可解决.

●思考题 2 如图 1.1-5, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=2$, $BC=1, \cos C=\frac{3}{4}$.

- (1) 求 AB 的值;
 (2) 求 $\sin(2A+C)$ 的值.

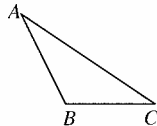


图 1.1-5

●思考题 3 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边长分别为 a, b, c , 已知 $a^2-c^2=2b$, 且 $\sin A\cos C=3\cos A\sin C$, 求 b .

探究 3 利用正、余弦定理证明与三角形有关的三角恒等式, 要紧紧把握正、余弦定理中所反映的三角形中的边角关系来处理. 正弦定理常用来把边转化为角, 余弦定理常用来把角转化为边. 另外还要运用三角形及三角函数的其他运算性质.

【思路分析】 由等号左(右)边的 a^2, b^2, c^2 , 运用余弦定理进行转化, 由等号左(右)边的正弦值, 想到运用正弦定理转化.

【证明】 (1) 由余弦定理,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B,$$

两式相减, 得

$$a^2 - b^2 = b^2 - a^2 - 2bc \cos A + 2ca \cos B,$$

$$\therefore \frac{a^2 - b^2}{c^2} = \frac{a \cos B - b \cos A}{c}.$$

由正弦定理, 知 $\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C}, \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}$.

$$\therefore \frac{a^2 - b^2}{c^2} = \frac{\sin A \cos B - \sin B \cos A}{\sin C} = \frac{\sin(A - B)}{\sin C}.$$

(2) 由正弦定理的变形形式, $\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}$ 及由等号左边的 a^2, b^2, c^2 , 运用余弦定理进行转化, 即可得.

$$\text{左边} = 2R(\sin A \cos B - \cos A \sin B) = a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - b \cdot$$

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2 - b^2}{c} = \text{右边}.$$

●思考题 4 在 $\triangle ABC$ 中, 求证:

$$(1) \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 C};$$

$$(2) a^2 + b^2 + c^2 = 2(bc \cos A + ca \cos B + ab \cos C)$$

课后巩固

- 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a = 2b \cdot \sin A$, 则 B 等于 ()
A. 30° 或 60° B. 45° 或 60°
C. 60° 或 120° D. 30° 或 150°
- 等腰三角形的周长为 8, 底边为 2, 则底角的余弦值等于 ()
A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B. $2\sqrt{2}$
C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
- 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = 7, c = 5, A = 120^\circ$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 _____.
- 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = 2, b = 2\sqrt{2}, C = 15^\circ$, 求 A .
- 已知在 $\triangle ABC$ 中, $a^2 = b(b + c)$, 求证: $A = 2B$.

>>>> 一课一卷 <<<<

YI KE YI JUAN

- 已知方程 $x^2 \sin A + 2x \sin B + \sin C = 0$ 有重根, 则 $\triangle ABC$ 的三边 a, b, c 满足关系式 ()
A. $b = ac$ B. $b^2 = ac$
C. $a = b = c$ D. $c = ab$
- 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $A = 30^\circ$, 且 $3a = \sqrt{3}b = 12$, 则 c 的值为 ()
A. 4 B. 8
C. 4 或 8 D. 无解
- 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 60^\circ, AB = 2$, 且 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则边 BC 的长为 ()
A. $\sqrt{3}$ B. 3
C. $\sqrt{7}$ D. 7
- 在 $\triangle ABC$ 中, $2a \cos B = c$, 则 $\triangle ABC$ 是 ()
A. 等腰三角形 B. 直角三角形
C. 等腰直角三角形 D. 等边三角形
- 已知锐角三角形的边长分别是 3, 5, x , 则 x 的取值范围是 ()
A. $1 < x < \sqrt{5}$ B. $4 < x < \sqrt{30}$
C. $1 < x < 4$ D. $4 < x < \sqrt{34}$
- 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\sin A : \sin B = \sqrt{2} : 1, c^2 = b^2 + \sqrt{2}bc$, 则三内角 A, B, C 的度数依次是 _____.

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 若 $(\sqrt{3}b - c)\cos A = a\cos C$, 则 $\cos A =$ _____.
8. 设锐角三角形 ABC 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $a = 2b\sin A$.
- (1) 求 B 的大小;
- (2) 若 $a = 3\sqrt{3}, c = 5$, 求 b .

9. (1) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 已知 $A = 2B$, 试求 $\frac{a}{b}$ 的取值范围.
- (2) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $c = 1, b = 2$, 求角 C 的最大值.

10. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 45^\circ, AC = \sqrt{10}, \cos C = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.
- (1) 求 BC 边的长;
- (2) 记 AB 的中点为 D , 求中线 CD 的长.

11. 在 $\triangle ABC$ 中, A, B 为锐角, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $\sin A = \frac{\sqrt{5}}{5}, \sin B = \frac{\sqrt{10}}{10}$.
- (1) 求 $A + B$ 的值;
- (2) 若 $a - b = \sqrt{2} - 1$, 求 a, b, c 的值.

12. 已知函数 $f(x) = 2\sin x \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \cos x \sin \varphi - \sin x$ ($0 < \varphi < \pi$) 在 $x = \pi$ 处最小值.
- (1) 求 φ 的值;
- (2) 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边. 已知 $a = 1, b = \sqrt{2}, f(A) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 求角 C .