

FEIXIANXING XITONG
SHUANG HOPF FENCHU
LILUN JI YINGYONG

非线性系统 双Hopf分叉理论 及应用

周 艳 编著

内蒙古科学技术出版社

FEIXIANXING XITONG
SHUANG HOPF FENCHA
LILUN JI YINGYONG

非线性系统 双Hopf分叉理论 及应用

周 艳 编著

内蒙古科学技术出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

非线性系统双Hopf分叉理论及应用 / 周艳编著. —
赤峰: 内蒙古科学技术出版社, 2016. 12
ISBN 978-7-5380-2776-1

I. ①非… II. ①周… III. ①非线性系统 (自动化) —
霍普夫分叉—研究 IV. ①TP271

中国版本图书馆CIP数据核字 (2017) 第025723号

非线性系统双Hopf分叉理论及应用

编 著: 周 艳
责任编辑: 许占武
封面设计: 永 胜
出版发行: 内蒙古科学技术出版社
地 址: 赤峰市红山区哈达街南一段4号
网 址: www.nm-kj.com
邮购电话: 0476-8227078
排版制作: 赤峰市阿金奈图文制作有限责任公司
印 刷: 赤峰市阿金奈图文制作有限责任公司
字 数: 150千
开 本: 787mm × 1092mm 1/16
印 张: 7.625
版 次: 2016年12月第1版
印 次: 2017年3月第1次印刷
书 号: ISBN 978-7-5380-2776-1
定 价: 30.00元

如出现印装质量问题, 请与我社联系。电话: 0476-8237455 8225264

序 言

双 Hopf 分叉是发生在高维非线性系统中的一类现象丰富的分叉行为。目前,对 Hopf 分叉的研究已经取得丰富的成果,但对非线性动力系统的双 Hopf 分叉的研究还有待发展。双 Hopf 分叉是一类重要的余维 2 分叉,对应的分叉响应方程存在两对纯虚特征值,并且双 Hopf 分叉点位于非线性系统的两条 Hopf 分叉曲线相交处。

本书主要将用来研究 Hopf 分叉问题的高维 Hopf 分叉定理和奇异性理论进行了推广。首先,推广了高维 Hopf 分叉定理,使其可以应用到共振情形下的非线性动力系统中,并利用推广的 Hopf 分叉定理,研究了一类在面内和横向激励联合作用下蜂窝夹层板的双 Hopf 分叉问题。随后,利用推广的高维 Hopf 分叉定理研究了一类复合材料层合板的双 Hopf 分叉问题,并得到系统在参数空间的分叉图,利用数值模拟,给出了参数空间上不同区域里的系统运动形式。其次,推广了用来研究 Hopf 分叉问题的奇异性理论,引入函数空间上的映射算子和坐标变换,使其可以用来分析共振情形下的非线性动力系统的双 Hopf 分叉问题。利用推广的奇异性理论与数值研究了一类在面内和横向激励联合作用下的薄板和压电复合材料层合板的双 Hopf 分叉问题,在系统参数空间的分叉图的基础上,分析了不同区域里系统的平衡解和周期解的分类问题。

本书比较重视理论方法在实际工程中的应用。但限于篇幅,在有些地方显得不够严密和深入,某些分叉理论、摄动方法和其分析应用也涉及的很少或者没有具体的阐述。我们相信,对这些问题感兴趣的读者可以根据书后参考文献自行查阅。

诚恳地欢迎读者对本书的不足之处进行批评指正。

内蒙古师范大学 周艳

2016 年 11 月

目 录

第 1 章 蜂窝夹层板系统的双 Hopf 分叉分析	1
1.1 共振情形下的高维非线性系统的 Hopf 分叉定理	1
1.2 蜂窝夹层板系统的动力学方程	6
1.3 主参数共振-1:2 内共振情况下蜂窝夹层板的双 Hopf 分叉分析	8
1.4 数值模拟	15
第 2 章 复合材料层合板系统的双 Hopf 分叉	22
2.1 复合材料层合板结构的动力学方程	22
2.2 主参数共振-1:1 内共振情况下复合材料层合板的双 Hopf 分叉分析	27
2.3 数值模拟	32
第 3 章 共振情形下高维非线性系统的奇异性理论与数值研究	40
3.1 共振情形下高维非线性系统的分叉方程	40
3.2 高维非线性系统分叉方程双 Hopf 分叉的分类和普适开折	44
3.3 不存在确定分叉参数的高维非线性系统双 Hopf 分叉分析	49
3.4 具有确定分叉参数的高维非线性系统双 Hopf 分叉分析	53
第 4 章 用奇异性理论研究四边简支矩形薄板的双 Hopf 分叉	65
4.1 薄板的动力学方程	65
4.2 主参数共振-1:3 内共振情况下薄板的双 Hopf 分叉分析	68
4.3 数值模拟	75
第 5 章 用奇异性理论研究压电复合材料层合板的双 Hopf 分叉	82

5.1 压电复合材料层合板的动力学方程.....	82
5.2 主参数共振-1:3 内共振情况下压电层合板的双 Hopf 分叉分析	86
5.3 数值模拟	93
参考文献.....	99
附 录.....	111

第 1 章 蜂窝夹层板系统的 双 Hopf 分叉分析

本章基于高维非线性系统的 Hopf 分叉定理, 研究了在面内激励和横向外激励联合作用下蜂窝夹层板的双 Hopf 分叉。首先利用多尺度方法得到系统在直角坐标和极坐标下的平均方程, 然后应用高维 Hopf 分叉定理研究了平均方程的各类平衡解在分叉参数变化时的分叉行为, 并对系统的各种分叉行为进行了数值模拟。分析结果表明分叉参数变化时蜂窝夹层板存在双 Hopf 分叉行为。

1.1 共振情形下高维非线性系统的Hopf分叉定理

考虑如下 $2n$ 维自治非线性系统

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad x \in \mathbf{R}^{2n}, \quad \mu \in \mathbf{R}, \quad 2n \geq 4, \quad F \in \mathbf{C}^\infty, \quad (1.1)$$

其中 $F(x, \mu)$ 是关于 x 和 μ 的解析函数, 假设 $(0, 0)$ 对一切 μ 是系统(1.1)的平衡点, 即 $F(0, \mu) = 0$ 。记系统(1.1)在零解处的线性化矩阵为 $L(\mu)$, 假设 $L(\mu)$ 在 $\mu = 0$ 附近有两对复共轭特征值 $\alpha(\mu) \pm i$, $b(\mu) \pm ic(\mu)$, 当 $\mu = 0$ 时有 $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) \neq 0$, 并且 $L(\mu)$ 的其余 $n-4$ 个特征值都有非零实部。

为了考虑系统(1.1)的双 Hopf 分叉解, 我们令

$$\alpha(\mu) = \mu, \quad b(\mu) = \beta_1 \mu + \cdots, \quad F_i = \sum c_{m_1 n_1 m_2 n_2} x_1^{m_1} y_1^{n_1} x_2^{m_2} y_2^{n_2}, \quad \bar{x}_i = y_i, \quad i = 1, 2. \quad (1.2)$$

利用坐标的线性变换, 系统(1.1)可以写为

$$\dot{x}_1 = (\mu + i)x_1 + f_1(x_1, y_1, x_2, y_2, \mu), \quad (1.3a)$$

$$\dot{x}_2 = [(\beta(\mu) + i\gamma(\mu))]x_2 + f_2(x_1, y_1, x_2, y_2, \mu). \quad (1.3b)$$

对于系统(1.3)引入如下尺度变换

$$x_i = \varepsilon x_i, \quad y_i = \varepsilon y_i, \quad \mu = \varepsilon^2 \mu, \quad i = 1, 2. \quad (1.4)$$

由线性群计算法则可得系统(1.3)中 f_1 和 f_2 的各变量指数满足如下等式

$$m_{11} - n_{11} - 1 + k(m_{12} - n_{12}) = 0, \quad (1.5a)$$

$$m_{21} - n_{21} + k(m_{22} - n_{22} - 1) = 0. \quad (1.5b)$$

为了讨论系统(1.3)的分叉行为, 我们对式(1.5)中的 k 的取值范围分三种情形进行如下讨论。

(1) $k \geq 4$ 时, 将式(1.2b)代入式(1.2b)则系统(1.2b)可以写为

$$\dot{x}_1 = ix_1 + \varepsilon^2 x_1(\mu + K_1 x_1 y_1) + O(\varepsilon^3), \quad (1.6a)$$

$$\dot{x}_2 = ikx_2 + \varepsilon^2 x_2[(\beta_1 + i\gamma_1)\mu + K_3 x_1 y_1] + O(\varepsilon^3), \quad (1.6b)$$

其中 $K_j = k_{j1} + ik_{j2}$, $j = 1, 3$ 。

假设系统(1.3)的初始平衡解为

$$x_i(0) = \xi_i, \quad y_i(0) = \eta_i, \quad \eta_i = \bar{\xi}_i, i = 1, 2. \quad (1.7)$$

由 Hopf 分叉定理可得系统(1.3)的分叉方程为

$$\Gamma_1 = \xi_1(i\delta + \mu + K_1 \xi_1 \eta_1) + O(\varepsilon) = 0, \quad (1.8a)$$

$$\Gamma_2 = \xi_2[ik\delta + (\beta_1 + i\gamma_1)\mu + K_3 \xi_1 \eta_1] + O(\varepsilon) = 0. \quad (1.8b)$$

系统(1.3)的非退化条件为

$$\frac{\partial(\Gamma_1, \Gamma_2, \bar{\Gamma}_1, \bar{\Gamma}_2)}{\partial(\delta, \mu, \xi_2, \eta_2)} = 2i(\gamma_1 - \beta_1 k_{11})^2 + (P - \gamma_1 k_{11})^2 \neq 0, \quad (1.9)$$

其中 $P = k_{32} - k k_{12}$ 。

(2) $k \leq 3$ 时, 我们可以对式(1.5)中的 k 的取值范围进一步分四种情形来讨论。

(2a) 当 $k = 2$ 时, 考虑系统(1.3), 我们引入如下尺度变换

$$x_i = \varepsilon x_i, \quad y_i = \varepsilon y_i, \quad \mu = \varepsilon \mu, \quad i = 1, 2, \quad (1.10)$$

将式(1.10)代入式(1.3)可得

$$\dot{x}_1 = ix_1 + \varepsilon(\mu x_1 + K_5 x_2 y_1) + O(\varepsilon^2), \quad (1.11)$$

$$\dot{x}_2 = i2x_2 + \varepsilon[\mu(\beta_1 + i\gamma_1)x_2 + K_6 x_1^2] + O(\varepsilon^2). \quad (1.11)$$

不失一般性, 我们可以记 $K_5 = e^{i\theta_1}$, $K_6 = e^{i\theta_2}$ 。

当 $\varepsilon \neq 0$ 时, 系统(1.11)特征值为 $\lambda = 2i$ 时产生的周期解可以写为

$$x_1 = \xi_1 e^{it}, \quad x_1 = \xi_2 e^{2it}, \quad y_1 = \eta_1 e^{-it}, \quad y_2 = \eta_2 e^{-2it}, \quad (1.12)$$

对应周期解的周期为 $T = 2\pi$ 。由 Hopf 分叉定理易得上述周期解的稳定性。

类似于(1)中的分析, 可得系统(1.3)的分叉方程为

$$\Gamma_1 = \xi_1(i\delta + \mu) + K_5\xi_2\eta_1 + O(\varepsilon) = 0, \quad (1.13a)$$

$$\Gamma_2 = \xi_1[2i\delta + \mu(\beta_1 + i\gamma_1)] + K_6\xi_1^2 + O(\varepsilon) = 0. \quad (1.13b)$$

为了以下分析方便, 不妨设

$$\xi_1 = 1, \quad K_5\xi_2 = \rho e^{i\phi}, \quad K_5K_6 = e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i\theta}. \quad (1.14)$$

将式(1.14)代入式(1.13)并分离实虚部, 得到

$$\mu = -\rho^2 \cos \phi, \quad (1.15a)$$

$$\delta = -\rho^2 \sin \phi, \quad (1.15b)$$

$$\beta_1\rho^2 \cos \phi - \cos(\theta - \phi) = 0, \quad (1.15c)$$

$$2\rho^2 \sin \phi + \gamma_1\rho^2 \cos \phi - \sin(\theta - \phi) = 0. \quad (1.15d)$$

对于固定的 ρ , 由式(1.15c)可得

$$\cos \phi = \sin \theta \times \sqrt{\sin^2 \theta + (\beta_1\rho^2 - \cos \theta)^2}, \quad (1.16a)$$

$$\cos \phi = (\beta_1\rho^2 - \cos \theta) \times \sqrt{\sin^2 \theta + (\beta_1\rho^2 - \cos \theta)^2}. \quad (1.16b)$$

将式(1.16)代入式(1.15c), 我们有

$$2\beta_1\rho^4 + [\gamma_1 \sin \theta + (\beta_1 - 2)\cos \theta]\rho^2 - 1 = 0. \quad (1.17)$$

由以上分析可知, 当 $\varepsilon = 0$ 时, 系统(1.3)在初始平衡点发生双 Hopf 分叉, 并且可能在平衡点分叉出 0, 2 或者 4 个周期解。此时, 系统(1.11)的非退化条件为

$$\left| \frac{\partial(\Gamma_1, \Gamma_2, \bar{\Gamma}_1, \bar{\Gamma}_2)}{\partial(\delta, \mu, \xi_2, \eta_2)} \right|_{\varepsilon=0} = -2i \left[2\beta_1\rho^2 + (2 + \beta_1)\cos(\theta - 2\phi) + \gamma_1 \sin(\theta - 2\phi) + \frac{1}{\rho^2} \right] \neq 0. \quad (1.18)$$

(2b) 当 $k = -2$ 时, 系统(1.3)可以写为

$$\dot{x}_1 = ix_1 + \varepsilon(\mu x_1 + K_5 y_1 y_2) + O(\varepsilon^2), \quad (1.19a)$$

$$\dot{x}_2 = -i2x_2 + \varepsilon[(\beta_1 + i\gamma_1)\mu x_2 + K_6 y_1^2] + O(\varepsilon^2). \quad (1.19b)$$

由式(1.19)以及(2a)中的分析可知, 当 $\varepsilon \neq 0$ 时, 系统(1.19)的分叉方程为

$$\Gamma_1 = \xi_1(i\delta + \mu) + K_5\eta_1\eta_2 + O(\varepsilon) = 0, \quad (1.20a)$$

$$\Gamma_2 = \xi_2[-i2\delta + (\beta_1 + i\gamma_1)\mu] + K_6\eta_1^2 + O(\varepsilon) = 0, \quad (1.20b)$$

其中

$$\eta_1 = 1, \quad K_5\eta_2 = \rho e^{i\phi_1}, \quad \bar{K}_5K_6 = e^{i(\phi_2 - \phi_1)} = e^{-i\phi}. \quad (1.21)$$

将式(1.21)代入式(1.19), 并分离实虚部, 得到

$$\mu = -\rho^2 \cos \phi_1, \quad (1.22a)$$

$$\delta = -\rho^2 \sin \phi_1, \quad (1.22b)$$

$$\beta_1 \rho^2 \cos \phi_1 - \cos(\varphi + \phi_1) = 0, \quad (1.22c)$$

$$2\rho^2 \sin \phi_1 + \gamma_1 \rho^2 \cos \phi_1 + \sin(\varphi + \phi_1) = 0. \quad (1.22d)$$

对于固定的 ρ ，由式(1.22c)可得

$$\cos \phi_1 = -\sin \varphi \times \sqrt{\sin^2 \varphi + (\beta_1 \rho^2 - \cos \varphi)^2}, \quad (1.23a)$$

$$\cos \phi_1 = (\beta_1 \rho^2 - \cos \varphi) \times \sqrt{\sin^2 \varphi + (\beta_1 \rho^2 - \cos \varphi)^2}. \quad (1.23b)$$

将式(1.23)代入式(1.22c)，我们有

$$2\beta_1 \rho^4 + [-\gamma_1 \sin \varphi + (\beta_1 - 2)\cos \varphi]\rho^2 - 1 = 0. \quad (1.24)$$

因此，当 $\varepsilon = 0$ 时，系统(1.3)在零平衡点发生双 Hopf 分叉，并且可能从零平衡点分叉出 0, 2 或者 4 个周期解。此时，系统(1.19)的非退化条件为

$$\left| \frac{\partial(\Gamma_1, \Gamma_2, \bar{\Gamma}_1, \bar{\Gamma}_2)}{\partial(\delta, \mu, \xi_2, \eta_2)} \right|_{\varepsilon=0} = 2i \left[2\beta_1 \rho^2 + (2 + \beta_1)\cos(\varphi + 2\phi_1) - \gamma_1 \sin(\varphi + 2\phi_1) + \frac{1}{\rho^2} \right] \neq 0. \quad (1.25)$$

(2c) 当 $k = 3$ 时，根据式(1.5)，我们可将系统(1.3)写为

$$\dot{x}_1 = ix_1 + \varepsilon^2(\mu x_1 + K_1 x_1^2 y_1 + K_2 x_1 x_2 y_2 + K_5 y_1^2 x_2) + O(\varepsilon^3), \quad (1.26a)$$

$$\dot{x}_2 = i3x_2 + \varepsilon^2((\beta_1 + i\gamma_1)\mu x_2 + K_3 x_1 y_1 x_2 + K_4 x_2^2 y_2 + K_6 x_1^3) + O(\varepsilon^3), \quad (1.26b)$$

其中 $K_5 \neq 0$, $K_6 \neq 0$ 。

当 $\varepsilon \neq 0$ 时，我们得到系统(1.26)的分叉方程为

$$\Gamma_1 = (i\delta + \mu + K_1 \xi_1 \eta_1 + K_2 \xi_2 \eta_2)\xi_1 + k_5 \eta_1^2 \xi_2 + O(\varepsilon) = 0, \quad (1.27a)$$

$$\Gamma_2 = [i3\delta + (\beta_1 + i\gamma_1)\mu + K_3 \xi_1 \eta_1 + K_4 \xi_2 \eta_2]\xi_2 + K_6 \xi_1^2 + O(\varepsilon) = 0. \quad (1.27b)$$

记 $K_j = K_{ji} + iK_{j2}$, $j = 1, \dots, 6$ 。取 $\xi_1 = 1$ ，由式(1.27)可知，当 $\varepsilon = 0$ 时，方程(1.26)

可以写为

$$\delta + K_{12} + K_{22}\rho^2 + \rho \sin \phi = 0, \quad (1.28a)$$

$$\mu + K_{11} + K_{12}\rho^2 + \rho \cos \phi = 0, \quad (1.28b)$$

$$(\mu\beta_1 + K_{31} + K_{41}\rho^2)\rho + \cos(\theta - \phi) = 0, \quad (1.28c)$$

$$(3\delta + \mu\gamma_1 + K_{32} + K_{42}\rho^2)\rho + \sin(\theta - \phi) = 0. \quad (1.28d)$$

由式(1.28a)和(1.28b)，可得

$$\delta = -K_{12} - K_{22}\rho^2 - \rho \sin \phi, \quad (1.29a)$$

$$\mu = -K_{11} - K_{12}\rho^2 - \rho \cos \phi. \quad (1.29b)$$

将式(1.29b)代入式(1.28c), 可得

$$\sin \phi = \frac{1}{N^2} \left[-\rho M \sin \theta + (\cos \theta - \beta_1 \rho^2) \sqrt{N^2 - \rho^2 M^2} \right], \quad (1.30a)$$

$$\cos \phi = \frac{1}{N^2} \left[-\rho M (\cos \theta - \beta_1 \rho^2) - \sin \theta \sqrt{N^2 - \rho^2 M^2} \right], \quad (1.30b)$$

其中

$$\begin{aligned} A_0 &= K_{31} - \beta_1 K_{11}, \quad B_0 = K_{41} - \beta_1 K_{21}, \quad M = A_0 + \rho^2 B_0, \\ N^2 &= 1 - 2\beta_1 \rho^2 \cos \theta + \beta_1^2 \rho^4. \end{aligned} \quad (1.31)$$

将式(1.29)和(1.30)代入式(1.28d), 可得

$$\begin{aligned} \rho \times \left\{ (A + \rho^2 B) N^2 + \rho^2 M \left[(3 + \beta_1) \sin \theta + \gamma_1 \cos \theta - \gamma_1 \beta_1 \rho^2 \right] \right\} \\ = \sqrt{N^2 - \rho^2 M^2} \times \left\{ -3\rho^4 \beta_1 + \rho^2 [(3 + \beta_1) \cos \theta - \gamma_1 \sin \theta] + 1 \right\}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

其中 $A = K_{32} - 3K_{12} - \gamma_1 K_{11}$, $B = K_{42} - 3K_{22} - \gamma_1 K_{21}$ 。

由以上分析可知, 系统(1.21)在平衡点处将发生双 Hopf 分叉, 并且在平衡点处将分叉出 7 个周期解。

(1.4) 当 $k = -3$ 时, 根据式(1.5), 我们可将系统(1.3)写为

$$\dot{x}_1 = ix_1 + \varepsilon^2 (\mu x_1 + K_1 x_1 y_1^2 + K_2 x_2 y_1 y_2 + K_5 x_1^2 y_2) + O(\varepsilon^3), \quad (1.33a)$$

$$\dot{x}_2 = -i3x_2 + \varepsilon^2 ((\beta_1 + i\gamma_1)\mu x_2 + K_3 x_1 y_1 y_2 + K_4 x_2 y_2^2 + K_6 y_1^3) + O(\varepsilon^3), \quad (1.33b)$$

其中 $K_5 \neq 0$, $K_6 \neq 0$ 。

当 $\varepsilon \neq 0$ 时, 我们得到系统(1.33)的分叉方程为

$$\Gamma_1 = (i\delta + \mu + K_1 \xi_1 \eta_1 + K_2 \eta_2^2) \xi_1 + k_5 \eta_1^2 \eta_2 + O(\varepsilon) = 0, \quad (1.34a)$$

$$\Gamma_2 = [-i3\delta + (\beta_1 + i\gamma_1)\mu + K_3 \xi_1 \eta_1 + K_4 \eta_2^2] \xi_2 + K_6 \eta_1^2 + O(\varepsilon) = 0. \quad (1.34b)$$

记 $K_j = K_{j1} + iK_{j2}$, $j = 1, \dots, 6$ 。取 $\eta_1 = 1$, 由式(1.34)可知, 当 $\varepsilon = 0$ 时, 方程(1.33)可以写为

$$\delta + K_{12} + K_{22} \rho^2 + \rho \sin \phi = 0, \quad (1.35a)$$

$$\mu + K_{11} + K_{12} \rho^2 + \rho \cos \phi = 0, \quad (1.35b)$$

$$(\mu \beta_1 + K_{31} + K_{41} \rho^2) \rho + \cos(\theta + \phi) = 0, \quad (1.35c)$$

$$(3\delta + \mu \gamma_1 + K_{32} + K_{42} \rho^2) \rho - \sin(\theta + \phi) = 0. \quad (1.35d)$$

由式(1.35a)和(1.35b), 可得

$$\delta = -K_{12} - K_{22} \rho^2 - \rho \sin \phi, \quad (1.36a)$$

$$\mu = -K_{11} - K_{12} \rho^2 - \rho \cos \phi. \quad (1.36b)$$

将式(1.36b)代入式(1.35c), 我们得到

$$\sin \phi = \frac{1}{N^2} \left[\rho M \sin \theta + (\cos \theta - \beta_1 \rho^2) \sqrt{N^2 - \rho^2 M^2} \right], \quad (1.37a)$$

$$\cos \phi = \frac{1}{N^2} \left[-\rho M (\cos \theta - \beta_1 \rho^2) + \sin \theta \sqrt{N^2 - \rho^2 M^2} \right], \quad (1.37b)$$

其中

$$\begin{aligned} A_0 &= K_{31} - \beta_1 K_{11}, \quad B_0 = K_{41} - \beta_1 K_{21}, \quad M = A_0 + \rho^2 B_0, \\ N^2 &= 1 - 2\beta_1 \rho^2 \cos \theta + \beta_1^2 \rho^4. \end{aligned} \quad (1.38)$$

将式(1.36)和(1.37)代入式(1.35d), 可得

$$\begin{aligned} \rho \times \left\{ (A + \rho^2 B) N^2 - \rho^2 M \left[(3 + \beta_1) \sin \theta + \gamma_1 \cos \theta - \gamma_1 \beta_1 \rho^2 \right] \right\} \\ = \sqrt{N^2 - \rho^2 M^2} \times \left\{ -3\rho^4 \beta_1 + \rho^2 \left[(3 + \beta_1) \cos \theta + \gamma_1 \sin \theta \right] + 1 \right\}, \end{aligned} \quad (1.39)$$

其中 $A = K_{32} - 3K_{12} - \gamma_1 K_{11}$, $B = K_{42} - 3K_{22} - \gamma_1 K_{21}$ 。

由以上分析可知, 系统(1.33)在平衡点将会发生双 Hopf 分叉, 并且可能在平衡点分叉出 7 个周期解。利用高维非线性系统 Hopf 分叉定理研究共振系统的双 Hopf 分叉问题, 最大的困难就是如何求出系统的分叉方程, 以及如何判断分叉解的分类。

1.2 蜂窝夹层板系统的动力学方程

我们研究四边简支蜂窝夹层板的非线性动力学特性, x 方向的面内载荷和横向面外载荷如图1.1所示, 在蜂窝夹层板的振动过程中考虑阻尼的影响。蜂窝夹层板的长、宽、高分别为 a , b 和 h , 直角坐标 Oxy 位于蜂窝夹层板的中性面内, z 轴向下, 设蜂窝夹层板内任一点沿 x , y 和 z 方向的位移分别为 u , v 和 w , 沿着 x 方向作用的面内载荷为 $p = p_0 + p_1 \cos \Omega_2 t$, 横向载荷为 $f = F(x, y) \cos \Omega_1 t$ 。蜂窝夹层板分为三层, 上下蒙皮是完全相同的各向同性材料, 蒙皮层厚度为 h_f 。中间由正六边形蜂窝芯层隔开, 蜂窝芯轴向为坐标 z 方向, 蜂窝芯厚度为 h_e 。由Gibson经典理论可知, 正六边形蜂窝芯层为面内

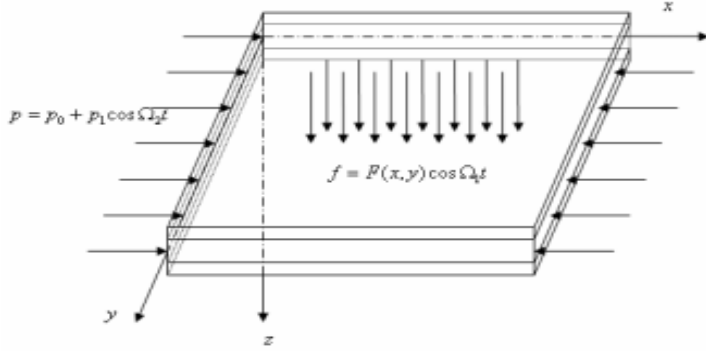


图1.1 蜂窝夹层板模型

各向同性材料。假设蒙皮与蜂窝芯结合紧密，不会脱开，并且粘结层很薄，其本身不发生变形，即各层板之间变形连续。

根据Hamilton原理及Reddy高阶剪切变形理论，得到蜂窝夹层板的非线性动力学方程为

$$A_{11}u_{,xx} + A_{66}u_{,yy} + (A_{12} + A_{66})v_{,xy} + A_{11}w_{,x}w_{,xx} + A_{66}w_{,x}w_{,yy} + (A_{12} + A_{66})w_{,y}w_{,xy} = I_0\ddot{u}, \quad (1.40a)$$

$$A_{66}v_{,xx} + A_{22}v_{,yy} + (A_{21} + A_{66})u_{,xy} + A_{66}w_{,y}w_{,xx} + A_{22}w_{,y}w_{,yy} + (A_{21} + A_{66})w_{,x}w_{,xy} = I_0\ddot{v}, \quad (1.40b)$$

$$\begin{aligned} & -D_{11}w_{,xxxx} - (D_{12} - 4D_{66} - D_{21})w_{,yyxx} - D_{22}w_{,yyyy} + \left(A_{21}\left(u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2\right) + A_{22}\left(v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2\right) \right) w_{,yy} \\ & + (A_{21}(u_{,yx} + w_{,x}w_{,yx}) + A_{22}(v_{,yy} + w_{,y}w_{,yy}) + A_{66}(u_{,yx} + v_{,xx} + w_{,xx}w_{,y} + x_{,x}w_{,yx})w_{,y})w_{,y} \\ & + (A_{11}(u_{,xx} + w_{,x}w_{,xx}) + A_{12}(v_{,yx} + w_{,y}w_{,yx}) + A_{66}(v_{,yx} + u_{,yy} + w_{,yy}w_{,x} + w_{,y}w_{,yx}))w_{,x} \\ & + \left(A_{11}\left(u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2\right) + A_{12}(v_{,y} + w_{,y}^2) - p \right) w_{,xx} + 2A_{66}(u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y})w_{,yx} \\ & + q - c\dot{w} = I_0\ddot{w}. \end{aligned} \quad (1.40c)$$

四边简支蜂窝夹层板的边界条件如下，

在 $x=0$ 和 a 处，

$$v_0 = w_0 = \phi_y = M_{xx} = 0, \quad \int_0^b N_{xx}|_{x=0,a} dy = \int_0^b (p_0 - p_1 \cos \Omega_2 t) dy, \quad (1.41a)$$

在 $y=0$ 和 b 处，

$$u_0 = w_0 = \phi_x = M_{yy} = 0, \quad N_{yy}|_{y=0,b} = 0. \quad (1.41b)$$

考虑蜂窝夹层板的主参数共振-1:2 内共振情况, 方程(1.40)的模式函数取为

$$u_0 = u_1 \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (1.42a)$$

$$v_0 = v_1 \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}, \quad (1.42b)$$

$$w_0 = w_1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + w_2 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (1.42c)$$

$$\phi_x = \phi_1(t) \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \phi_2(t) \cos \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (1.42d)$$

$$\phi_y = \phi_3(t) \cos \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi x}{a} + \phi_4(t) \cos \frac{\pi y}{b} \sin \frac{2\pi x}{a}. \quad (1.42e)$$

横向激励的表达式为

$$F = F_1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + F_2 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (1.43)$$

引入无量纲变换

$$\bar{w}_1 = \frac{w_1}{H}, \quad \bar{w}_2 = \frac{w_2}{H}, \quad \bar{t} = t\sqrt{\Omega_1\Omega_2}. \quad (1.44)$$

为了便于分析, 去掉参数和变量上面的符号“-”, 利用Galerkin方法进行离散, 我们得到四边简支蜂窝夹层板的二自由度非线性动力学方程为

$$\begin{aligned} \ddot{w}_1 + \mu_1 \dot{w}_1 + \omega_1^2 w_1 + \alpha_{11} \cos \Omega_2 t w_1 + \beta_{11} w_1 w_2^2 \\ + \beta_{12} w_1^2 w_2 + \beta_{13} w_1^3 + \beta_{14} w_2^3 = f_1 \cos \Omega_1 t, \end{aligned} \quad (1.45a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{w}_2 + \mu_2 \dot{w}_2 + \omega_2^2 w_2 + \alpha_{21} \cos \Omega_2 t w_2 + \beta_{21} w_1^2 w_2 \\ + \beta_{22} w_1 w_2^2 + \beta_{23} w_2^3 + \beta_{24} w_1^3 = f_2 \cos \Omega_1 t. \end{aligned} \quad (1.45b)$$

1.3 主参数共振-1:2内共振情况下蜂窝夹层板的双Hopf分叉分析

在本节中, 我们利用 1.2 中的理论研究参数激励与外激励联合作用下蜂窝夹层板的双 Hopf 分叉特性。为了利用多尺度法进行研究, 将方程(1.45)中的阻尼项、参数激励项、外激励项和非线性项添加小扰动项 ε , 得到如下方程

$$\begin{aligned} \ddot{w}_1 + \varepsilon \mu_1 \dot{w}_1 + \omega_1^2 w_1 + \varepsilon \alpha_{11} \cos \Omega_2 t w_1 + \varepsilon \beta_{11} w_1 w_2^2 \\ + \varepsilon \beta_{12} w_1^2 w_2 + \varepsilon \beta_{13} w_1^3 + \varepsilon \beta_{14} w_2^3 = \varepsilon f_1 \cos \Omega_1 t, \end{aligned} \quad (1.46a)$$

$$\ddot{w}_2 + \varepsilon \mu_2 \dot{w}_2 + \omega_2^2 w_2 + \varepsilon \alpha_{21} \cos \Omega_2 t w_2 + \varepsilon \beta_{21} w_1^2 w_2$$

$$+ \varepsilon \beta_{22} w_1 w_2^2 + \varepsilon \beta_{23} w_2^3 + \varepsilon \beta_{24} w_1^3 = \varepsilon f_2 \cos \Omega_1 t. \quad (1.46b)$$

考虑蜂窝夹层板的主参数共振-1:2 内共振的情况, 共振关系如下

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega, \quad \omega_1^2 = \frac{1}{4} \Omega^2 + \sigma_1, \quad \omega_2^2 = \Omega^2 + \sigma_2, \quad (1.47)$$

其中 σ_1 和 σ_2 为调谐参数, 为了分析方便, 令 $\Omega = 2$ 。

设方程(1.46)的一致渐近解为

$$w_n(t, \varepsilon) = w_{n0}(T_0, T_1) + \varepsilon w_{n1}(T_0, T_1) + \dots, \quad n=1, 2, \quad (1.48)$$

其中 $T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon t$ 。

则有微分算子

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} \frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial T_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots, \quad (1.49a)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = (D_0 + \varepsilon D_1 + \dots)^2 = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots, \quad (1.49b)$$

其中 $D_k = \frac{\partial}{\partial T_k}$, $k=0, 1$ 。

将式(1.47)-(1.49)代入方程(1.46), 令等式两边 ε 同次幂的系数相等, 得到

ε^0 阶

$$D_0^2 w_{10} + w_{10} = 0, \quad (1.50a)$$

$$D_0^2 w_{20} + 4w_{20} = 0. \quad (1.50b)$$

ε^1 阶

$$\begin{aligned} D_0^2 w_{11} + w_{11} = & -2D_0 D_1 w_{10} - \mu_1 D_0 w_{10} - \sigma_1 w_{10} - \alpha_{11} \cos 2t w_{10} - \beta_{11} w_{10} w_{20}^2 \\ & - \beta_{12} w_{10}^2 w_{20} - \beta_{13} w_{10}^3 - \beta_{14} w_{20}^3 + f_1 \cos 2t, \end{aligned} \quad (1.51a)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 w_{21} + 4w_{21} = & -2D_0 D_1 w_{20} - \mu_2 D_0 w_{20} - \sigma_2 w_{20} - \alpha_{21} \cos 2t w_{20} - \beta_{21} w_{10}^2 w_{20} \\ & - \beta_{22} w_{10} w_{20}^2 - \beta_{23} w_{20}^3 - \beta_{24} w_{10}^3 + f_2 \cos 2t. \end{aligned} \quad (1.51b)$$

方程(1.46)复数形式的解为

$$w_{n0} = A_n(T_1) e^{inT_0} + \bar{A}_n(T_1) e^{-inT_0}, \quad (1.52)$$

其中 $n=1, 2$ 。

将式(1.52)代入式(1.51), 可得

$$\begin{aligned} D_0^2 w_{11} + w_{11} = & \left[-2iD_1 A_1 - i\mu_1 A_1 - \sigma_1 A_1 - \frac{1}{2} \alpha_{11} \bar{A}_1 - 2\beta_{11} A_1 A_2 \bar{A}_2 - 3\beta_{132} A_1^2 \bar{A}_1 \right] e^{iT_0} \\ & + \text{cc} + \text{NST}, \end{aligned} \quad (1.53a)$$

$$D_0^2 w_{21} + 4w_{21} = \left[-4iD_1 A_2 - 2i\mu_2 A_2 - \sigma_2 A_2 - 2\beta_{21} A_1 \bar{A}_1 A_2 - 3\beta_{23} A_2^2 \bar{A}_2 + \frac{1}{2} f_2 \right] e^{2iT_0} + \mathbf{cc} + \mathbf{NST}, \quad (1.53b)$$

其中 $\mathbf{cc}$ 为长期项的复共轭项, $\mathbf{NST}$ 为不产生长期项的所有项。

消去长期项, 我们得到方程(1.46)复数形式的平均方程为

$$D_1 A_1 = -\frac{1}{2} \mu_1 A_1 + \frac{1}{2} i \sigma_1 A_1 + \frac{1}{4} i \alpha_{11} \bar{A}_1 + i \beta_{11} A_1 A_2 \bar{A}_2 + \frac{3}{2} i \beta_{13} A_1^2 \bar{A}_1, \quad (1.54a)$$

$$D_1 A_2 = -\frac{1}{2} \mu_2 A_2 + \frac{1}{4} i \sigma_2 A_2 + \frac{1}{2} i \beta_{21} A_1 \bar{A}_1 A_2 + \frac{3}{4} i \beta_{23} A_2^2 \bar{A}_2 - \frac{1}{8} i f_2. \quad (1.54b)$$

令

$$A_1(T_1) = x_1(T_1) + ix_2(T_1), \quad (1.55a)$$

$$A_2(T_1) = x_3(T_1) + ix_4(T_1). \quad (1.55b)$$

将方程(1.55)代入方程(1.54), 并分离实部和虚部, 得到系统(1.46)的直角坐标形式的平均方程为

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{2} \mu_1 x_1 - \left(\frac{1}{2} \sigma_1 - \frac{1}{4} \alpha_{11} \right) x_2 - \beta_{11} x_2 (x_3^2 + x_4^2) - \frac{3}{2} \beta_{13} x_2 (x_1^2 + x_2^2), \quad (1.56a)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{2} \mu_1 x_2 + \left(\frac{1}{2} \sigma_1 + \frac{1}{4} \alpha_{11} \right) x_1 + \beta_{11} x_1 (x_3^2 + x_4^2) + \frac{3}{2} \beta_{13} x_1 (x_1^2 + x_2^2), \quad (1.56b)$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{1}{2} \mu_2 x_3 - \frac{1}{4} \sigma_2 x_4 - \frac{1}{2} \beta_{21} x_4 (x_1^2 + x_2^2) - \frac{3}{4} \beta_{23} x_4 (x_3^2 + x_4^2), \quad (1.56c)$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{1}{2} \mu_2 x_4 + \frac{1}{4} \sigma_2 x_3 + \frac{1}{2} \beta_{21} x_3 (x_1^2 + x_2^2) + \frac{3}{4} \beta_{23} x_3 (x_3^2 + x_4^2) - \frac{1}{4} f_2. \quad (1.56d)$$

设

$$A_n = \frac{1}{2} a_n e^{i\phi_n}, \quad (n=1, 2). \quad (1.57)$$

将式(1.57)代入式(1.54), 得到系统(1.46)极坐标形式的平均方程为

$$\dot{a}_1 = -\frac{1}{2} \mu_1 a_1 + \frac{1}{4} \alpha_{11} a_1 \sin 2\phi_1, \quad (1.58a)$$

$$a_1 \dot{\phi}_1 = \frac{1}{2} \sigma_1 a_1 + \frac{1}{4} \alpha_{11} a_1 \cos 2\phi_1 + \frac{1}{4} \beta_{11} a_1 a_2^2 + \frac{3}{8} \beta_{13} a_1^3, \quad (1.58b)$$

$$\dot{a}_2 = -\frac{1}{2} \mu_2 a_2 - \frac{1}{4} f_2 \sin \phi_2, \quad (1.58c)$$

$$a_2 \dot{\phi}_2 = \frac{1}{4} \sigma_2 a_2 + \frac{1}{8} \beta_{21} a_1^2 a_2 + \frac{3}{16} \beta_{23} a_2^3 - \frac{1}{4} f_2 \cos \phi_2. \quad (1.58d)$$

在以下分析中, 我们主要考虑蜂窝夹层板可能存在的各种平衡点分叉以及平衡点附近可能存在的周期解。方程(1.56)在零解处的 Jacobi 矩阵为

$$J = D_x X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\mu_1 & -\frac{1}{2}\sigma_1 + \frac{1}{4}\alpha_{11} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sigma_1 + \frac{1}{4}\alpha_{11} & -\frac{1}{2}\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\mu_2 & -\frac{1}{4}\sigma_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\sigma_2 & -\frac{1}{2}\mu_2 \end{bmatrix}. \quad (1.59)$$

特征多项式为

$$f(\lambda) = \left[\lambda^2 + \mu_1 \lambda + \frac{1}{4} \left(\mu_1^2 + \sigma_1^2 - \frac{1}{4} \alpha_{11}^2 \right) \right] \times \left[\lambda^2 + \mu_2 \lambda + \frac{1}{4} \left(\mu_2^2 + \frac{1}{4} \sigma_2^2 \right) \right]. \quad (1.60)$$

我们得到平衡点稳定条件为

$$\mu_1^2 + \sigma_1^2 - \frac{1}{4} \alpha_{11}^2 > 0 \quad \text{和} \quad \mu_2^2 + \frac{1}{4} \sigma_2^2 > 0. \quad (1.61)$$

当 $\mu_2^2 + \frac{1}{4} \sigma_2^2 > 0$ 时, 方程(1.56)零解的稳定性临界线为

$$L_1: \mu_1^2 + \sigma_1^2 - \frac{1}{4} \alpha_{11}^2 = 0. \quad (1.62)$$

式(1.56)有三个负实部特征值和一个零特征值, 由奇异性理论可知系统(1.56)的零平衡点在稳定性临界线 L_1 上发生静态分叉, 对应于系统(1.46)的第一类型的周期解, 即方程(1.56)的解 $(x_1, x_2, 0, 0)$ 或者方程(1.58)的解 $(a_1, 0)$ 。因此, 系统(1.46)第一类型的周期解可以表示为

$$a_1^2 = \frac{-4\sigma_1 + 2\sqrt{\alpha_{11}^2 - 4\mu_1^2}}{3\beta_{13}}, \quad a_2 = 0. \quad (1.63)$$

当 $\mu_1^2 + \sigma_1^2 - \frac{1}{4} \alpha_{11}^2 > 0$ 时, 系统(1.56)零解的稳定性临界线为

$$L_2: \mu_2^2 + \frac{1}{4} \sigma_2^2 = 0, \quad (1.64)$$

因此, 方程(1.56)的第二类型周期解可以表示为

$$a_1 = 0, \quad a_2^2 = -\frac{4\sigma_2}{3\beta_{23}}. \quad (1.65)$$

通过以上分析可知, 方程(1.56)有下列形式的解