分形集的Hausdorff测度与维数研究

金艳玲◎著

山西出版传媒集团
山西经济出版社

图书在版编目(CIP)数据

分形集的 Hausdorff 测度与维数研究 / 金艳玲著. —太原:山西经济出版社, 2017.6
ISBN 978-7-5577-0216-8

Ⅰ. ①分… Ⅱ. ①金… Ⅲ. ①分形学 - 豪斯道夫维数 - 研究 Ⅳ. ①0415.5②0175.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第150652号

分形集的 Hausdorff 测度与维数研究

著　　者: 金艳玲
责任编辑: 解荣慧
装帧设计: 赵　娜

出 版 者: 山西出版传媒集团·山西经济出版社
地　　址: 太原市建设南路 21 号
邮　　编: 030012
电　　话: 0351 - 4922133(市场部)
0351 - 4922085(总编室)
E - mail: scb@ sxjjcb. com(市场部)
zbs@ sxjjcb. com(总编室)
网　　址: www. sxjjcb. com

经 销 者: 山西出版传媒集团·山西经济出版社
承 印 者: 山西省美术印务有限责任公司

开　　本: 880mm × 1230mm　1/32
印　　张: 5.625
字　　数: 120 千字
版　　次: 2017 年 7 月 第 1 版
印　　次: 2017 年 7 月 第 1 次印刷
书　　号: ISBN 978-7-5577-0216-8
定　　价: 29.80 元

前　言

分形几何是现代非线性科学中一个十分重要的研究方向，是处理自然界零碎和复杂现象的有力工具。1975 年，曼德尔布洛特（Mandelbrot）出版了他的法文专著《分形对象：形、机遇与维数》，标志着分形几何作为一门独立的学科正式诞生。自 20 世纪 80 年代以来，分形理论得到广泛的应用，其思想和方法已经渗透到自然科学的各个领域。分形理论的出现改变了人们认识自然的方式和方法，并为人们解决复杂问题开辟了一条新的途径。

经典的几何学用来处理图形规则的研究对象。但人们发现，那些不够光滑、不够规则的集合比经典的几何图形能更好地反映许多自然现象。比如冬天里的雪花、天空中的云朵、人类的大脑、小肠的结构等，对这些远离平衡的非线性复杂系统来说，分形理论就是研究和处理自然和工程中不规则图形的强有力的理论工具。

很自然地，对于规则的二维平面图形，我们会用面积去度量集合的大小；对于三维空间的立体，我们会用体积去度量；对于一个分形集合，我们采用的度量是 Hausdorff 测度。二维平面图形在一维空间上的度量长度是无穷大，在三维空间中的度量体积是零。维数“二”是图形有实际意义的一个指标。所以，自分形几何诞生以来，人们对分形集的 Hausdorff 测度与维数的讨论就从未间断过。其意义非常巨大，尤其是维数概念，被应用在不同的学科中，以揭示一定客观规律及性质。

本书主要介绍了分形几何中的 Hausdorff 测度和维数，全书分为五章。第一章介绍典型的分形集以及分形几何的概念；第二章介绍了测度的基本理论；第三章介绍 Hausdorff 测度的产生与原始定义，并介绍在处理 S – 集中 Hausdorff 测度的性质与结论；第四章给出了一些特殊的分形集的 Hausdorff 测度计算方法和结论；第五章介绍了 Hausdorff 维数的定义、性质、其他分形维数的概念，并展现出部分应用情况。

由于作者学识浅薄，加之时间仓促，书中不妥、错误之处在所难免，敬请读者批评指正。

金艳玲

2017 年 1 月

目　录

第一章　绪　论

第一节　分形理论的建立与发展

分形几何学是经典几何学的拓展。这一学科并没有取代经典几何学,反而丰富和深化了经典几何学。在经典的欧氏几何中,可以用直线、圆锥、球等规则的形状去描述诸如墙、车轮、建筑物等人造物体。这是极自然的事情,因为这些物体本来就是根据欧氏几何的规则图像生成的。然而,在自然界中,还存在着许多极其复杂的形状,如曲折的海岸线、瞬息万变的云彩、缥缈神秘的星系、螺旋形的海贝壳,甚至经济市场的波动等。它们都是复杂的几何形状,用传统的几何语言是无法解释的。分形几何是一门以非规则几何形状为研究对象的几何学。它把物体看作无限嵌套层次的精细结构,并在不同尺度下保持某种形似属性。我们可以在电脑上利用分形的手段建立分形几何具有物理结构的精确模型。因此,分形几何又被称为描述大自然的几何学。

分形的英文为 Fractal。这个词是由 Mandelbrot 于 1975 创造的,来源于拉丁文"Fractus"。其英文意思是"不规则、支离破碎"的物体。1967 年 Mandelbrot 在美国《Science》杂志上发表题目为《英国的海岸线有多长》的划时代论文标志

着其分形思想的萌芽。1975 年 Mandelbrot 在巴黎出版的法文著作《分形对象:形、机遇与维度》,1977 年在美国出版英文版,同年他又出版了《大自然的分形几何》。但是,这三本书还未对社会和学术界造成太大的影响。直到 1982 年《大自然的分形几何》第二版才得到欧美社会的广泛关注并迅速形成了“分形热”。此书也被分形学界视为分形“圣经”。

分形理论的发展大致可分为三个阶段。

第一阶段为 1875 年至 1925 年。在这一阶段,人们已认识到几类典型的分形集,并且力图对这类集合与经典几何的差别进行描述、分类和刻画。1872 年,维尔斯特拉斯(Weieratrass)证明了一种连续函数——维尔斯特拉斯函数,在任意一点都不具有有限或无限导数。同年,康托尔(Cantor)引入了一类全不连通的紧集,被称为康托三分集。1890 年皮亚诺(Peano)构造出填充平面的曲线。皮亚诺曲线以及其他的例子使拓扑维数得以引入。1904 年科切(Koch)通过初等方法构造了处处不可微的连续曲线——科切曲线,并且讨论了该曲线的性质。波瑞(Perrin)在 1913 年对布朗运动的轨迹图进行了深入的研究,明确指出布朗运动作为运动曲线不具有导数。他的这些论述在 1920 年促使维纳(Wiener)建立了很多布朗运动的概率模型。

第二阶段大致为 1926—1975 年。在这一阶段,人们在分形集的性质研究方面和维数理论的研究都获得了丰硕的成果。贝希柯维奇(Besicovitch)及其他学者的研究工作贯穿了第二阶段。他们研究曲线的维数、分形集的局部性质、分形集的结构等,他们的研究极大地丰富了分形几何理论。

虽然这一时期取得了重要的研究成果，但大部分是关于数学方面的研究，并没涉及其他领域。同时其他学科的发展也面临着分形问题，Mandelbrot 以其独特的思想，研究了强噪声干扰的电子通信、月球的表面、银河系中星体的分布等自然界中的分形现象，并取得了令人瞩目的成就。

第三阶段大致为 1975 年至今。这一阶段是分形几何在各个领域取得全面发展并形成独立学科的阶段。目前，分形的研究已大大地超出了数学范畴，不仅出现在物理的相变理论、材料结构与控制、高分子链的聚合、自然图形的模拟中，而且已扩展到生态、生命、经济、人文等许多领域。在地震、气象的预报预测和石油的多次开采等应用领域，甚至在股票涨落分析等方面，分形也都得到了广泛的应用。由此可见，分形为人们处理复杂对象提供了一个强有力的工具。

在此期间，国际上分形研究的专著纷纷问世，1991 年英国培格曼出版社推出了《混沌、孤子和分形》；1993 年新加坡世界科学出版社推出了《分形——关于大自然复杂几何的交叉科学》杂志。1993 年在匈牙利的布达佩斯召开了“自然科学中的分形——大自然中复杂几何学的国际学术讨论会”。在国内，分形理论的研究发展很快，目前进入平稳发展期。

分形已经被认为是研究复杂的非线性问题的最好的语言和工具。1998年获得菲尔兹奖的麦克马伦就是研究分形与混沌方向的；我国“国家攀登计划”中有关非线性科学等项目中也列举了有关分形理论的五个专题，“国家自然科学基金”中也给出了分形理论及其应用的内容，并指出这是一项前

沿的学科交叉的应用基础性的研究,具有广阔的应用前景。

第二节　分形的概念及性质

一、分形的概念

分形的原意是不规则的、支离破碎的,它是一种具有自相似特性的图形、现象或者物理过程。然而什么是分形,迄今为止,没有人给出确切的定义。本节简单介绍由 Mandelbrot 和肯尼思·法尔科内(Kenneth Falconer)给出的概念。

1975 年,在 Mandelbrot 出版的《分形对象:形、机遇与维数》中引入分形这一概念。1982 年和 1986 年他提出过两个关于分形的定义。

定义 1　若一个集合在欧氏空间中的 Hausdorff 维数恒大于其拓扑维数 DT 即:DH > DT,则称该集合为分形集,简称为分形。

定义 2　组成部分以某种方式与整体相似的形体叫分形。

对于定义 1 的理解需要一定的数学基础,定义 2 比较笼统地说明了自然界中的物质只要局部和局部或者局部和整体之间存在自相似性,那么这个物质就是分形。这一比较模糊的概念被人们普遍接受,同时也促进了分形的发展。但 Mandelbrot 本人对这个定义并不满意。因为它把某些分形排除在外。

正如生物学家难以给"生命"严格明确地定义一样,人们很难给分形一个确切的定义。于是数学家 Falconer 通过

列出分形的具体特征对分形的定义加以说明,描述如下。

(1)分形集都具有任意小尺度下的比例细节或者说它具有精细的结构。

(2)分形集不能用传统的几何语言来描述。它既不是满足某些条件的点的轨迹,也不是某些简单方程的解集。

(3)分形集具有某种自相似形式可能是近似的自相似或者统计的自相似。

(4)一般分形集的“分形维数”严格大于它相应的拓扑维数。

(5)在大多数令人感兴趣的情形下,分形集由非常简单的方法定义,可能以变换的迭代产生。

Falconer 指出如果某集合具有上述的所有性质或大部分性质,那么它就是分形。

二、分形的性质

分形的基本性质:局部与整体的自相似性;复杂程度不随尺度变化的无标度性和自仿射性。

1. 自相似性

分形集的自相似性是指分形对象经局部放大后与整体相似的一种性质,分为三类。

(1)精确自相似性。精确自相似性通常只存在于数学方程所产生的规则分形图中,是指局部放大后与整体存在严格的、精确的自相似性。

(2)近似自相似性。也叫作半自相似,这是一种更常见的情况。当我们在不同尺度下观察一个对象时,看到的结构

不是精确的相似。这样的例子有很多,比如我们对树枝进行观察,会发现每次放大所得到的结构与整体相似,却又不精确相似。要注意的是,近似自相似仅存在于一定的尺度范围内,超出该范围,自相似性就不存在了。

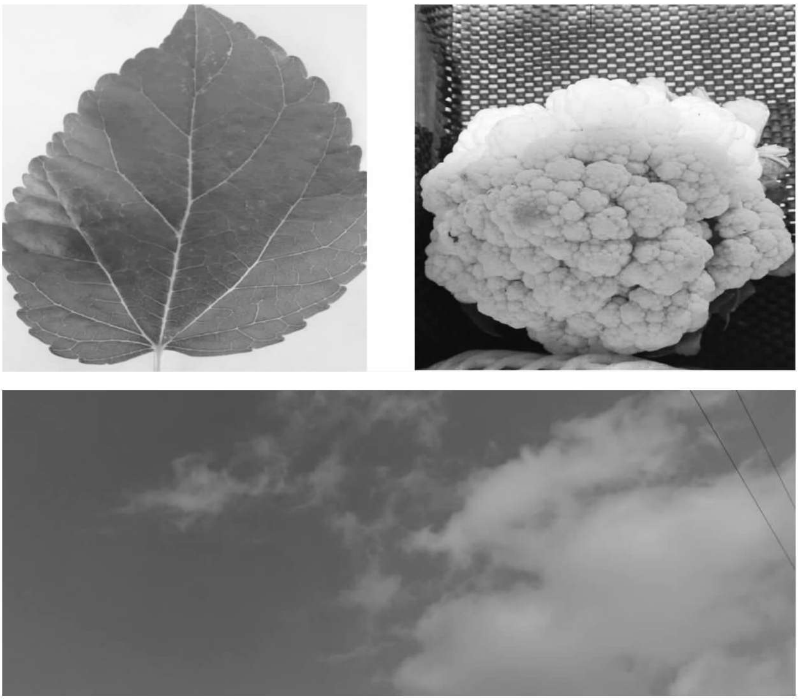

图 1－1　自然界中的分形

(3)统计自相似性。有些自相似性看起来不很明显,但在统计意义下却是相似的。比如某支股票价格波动的时间序列,虽然从曲线和放大图中看不出相似性,但其统计参数是一致的。分形维数随着曲线放大而保持常数,这就是统计

自相似性。

自然界中的自相似性普遍存在,如海岸线的轮廓、河流水系分布、云层边界、星系分布、植物叶脉、人类的大脑结构等等。但它们大都是近似相似或统计相似的。

2. 无标度性

分形集的无标度性是指在分形对象上任选一个区域对其进行放大或缩小,它的形态、复杂程度、不规则性等均不发生变化的特征。这意味着用不同的尺子去观察对象时,所看到的图案细节都是相同的。与所使用的尺子没有关系。也可以认为这类研究对象没有特征尺度,即无法用长度、面积、体积等度量。无标度性与自相似性有相同点,具有无标度特征的对象必定满足自相似性。

3. 自仿射性

分形集的第三个特性是具有自仿射性。自仿射性是自相似性的推广和延伸。若对象从局部到整体的各个方向上的变化率是相同的,此时变换即为自相似变换;若从局部到整体的各个方向上的变化率是不完全相同的,此时变换即为自仿射变换。

第三节 典型的分形图形

本节,我们将简单介绍分形几何中比较经典的分形图形。

一、康托尔集

德国数学家康托尔(Cantor)在 1883 年构造出康托尔中间三分集,简称康托尔集(Cantor Set)。它是在单位直线段的基础上,将其分成三等分,去掉中间的$\frac{1}{3}$线段,剩下两端的$\frac{1}{3}$线段,即$[0,\frac{1}{3}]$和$[\frac{2}{3},1]$这两条线段;再将剩下的两段分别三等分,再分别去掉各自中间的$\frac{1}{3}$线段,剩下$[0,\frac{1}{9}]$,$[\frac{2}{9},\frac{3}{9}]$,$[\frac{6}{9},\frac{7}{9}]$,$[\frac{8}{9},1]$4 条线段;如此无限分割下去。在无限次分割过程中,每次分割所形成的线段数量越来越多,而线段长度越来越短,极限情况所保留的部分就构成康托尔集。

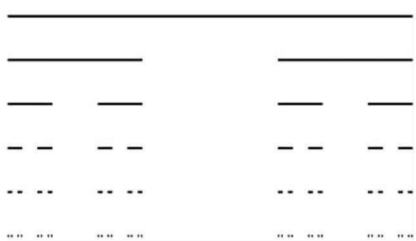

图 1-2　康托尔集的生成

二、康托尔尘

康托尔尘的构造是康托尔集的延伸,它以单位边长的正方形为初始图形,将正方形的各个边进行三等分,将得到 9 个正方形,然后保留四角位置的 4 个小正方形;再对所剩的

4 个小正方形重复划分并保留,依次下去,就得到图 1 -3 所示的康托尔尘。

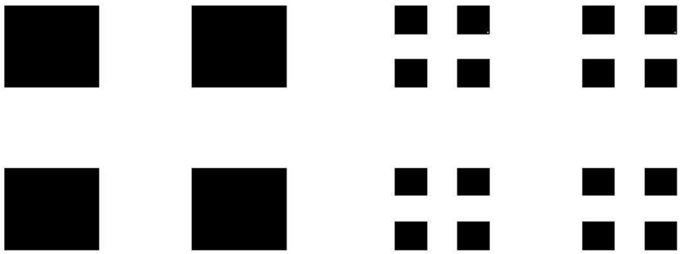

图 1 -3　康托尔尘的生成

三、Box 分形集

Box 分形集的构造与康托尔尘的生成过程相似,只是在三等分后的 9 个小正方形中,保留最中心的和 4 个角处的共 5 个正方形,并对 5 个小正方形递次分割和保留,最终形成的分形集为 Box 分形集,如图 1 -4 所示。

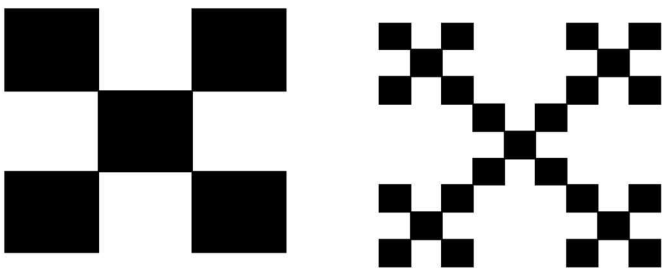

图 1 -4　Box 分形集的生成

四、柯赫曲线

柯赫曲线(Koch Curve)是最经典的分形几何图形,它由瑞典数学家柯赫于1904年提出。该曲线的生成与康托尔集相似:首先对单位长直线段三等分,将中间的1/3去掉并用边长同为1/3的等边三角形的另外两边替换;再对4条线段中的每一条重复上述过程,如此重复下去,便得到柯赫曲线。见图1-5。它是处处连续但处处不可微,长度为无穷的不光滑曲线。

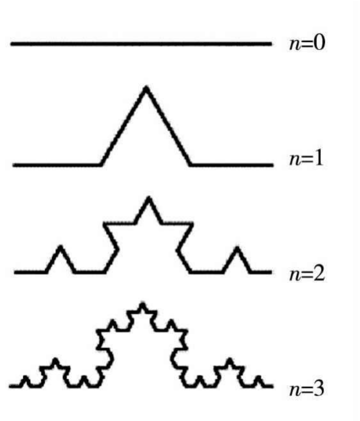

图1-5 柯赫曲线

五、谢尔宾斯基三角垫

以波兰数学家谢尔宾斯基(Sierpinski)命名的谢尔宾斯基三角垫的构造过程:先将一个单位边长的等边三角形的三条边分别二等分,将三条边的中点连接起来,形成一个小的等边三角形,并将其剔除,剩下的3个小等边三角形重复上述操作,如此下去,得到谢尔宾斯基三角垫。

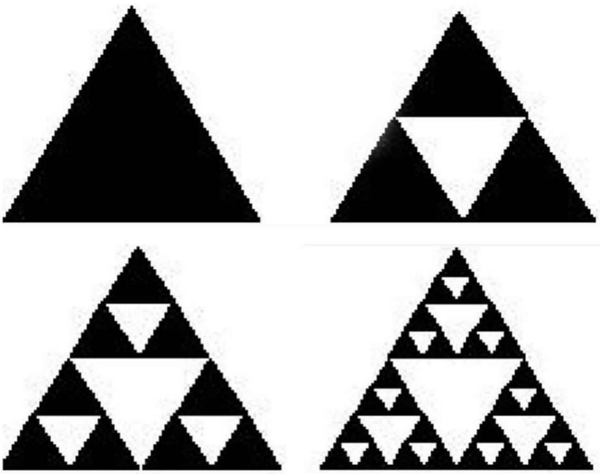

图 1－6　谢尔宾斯基三角垫

六、门格尔海绵

1926 年，澳大利亚数学家门格尔（Menger）首次提出在三维空间上构造分形。将一个单位立方体等分，分割成 27 个小立方体，然后去掉 6 个面中心和立方体中心的 7 个小立方体，剩余的 20 个小立方体继续如上步骤，分割下去，得到门格尔海绵。

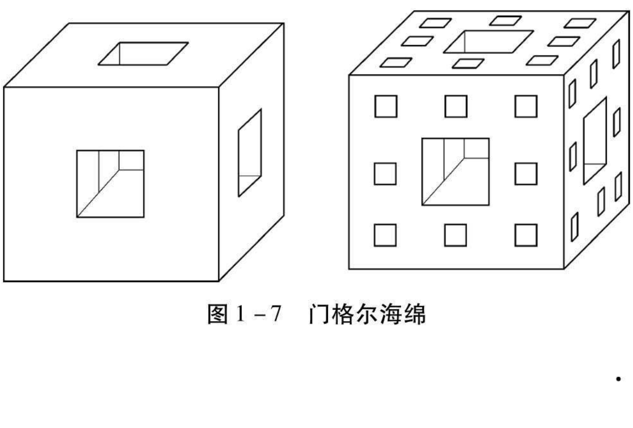

图 1－7　门格尔海绵