普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学

学习指导与习题解析

（第2版）（下）

北京邮电大学高等数学双语教学组 编

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学学习指导与习题解析

（第 2 版）（下）

北京邮电大学高等数学双语教学组　编

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 简 介

本书是以国家教育部非数学专业数学基础课教学指导分委员会制定的工科类本科的高等数学教学大纲为依据，根据北京邮电大学高等数学双语教学组编写的双语《高等数学（第 2 版）》教材而编写的教学辅导书。本书对教材的习题做了全解，对各章的知识要点和学习要求进行了总结，且每章都附有极具针对性的总习题供读者进行自我检测。

本书与北京邮电大学高等数学双语教学组编写的双语《高等数学（第 2 版）》教材相匹配，可与教材同步使用，也可以作为普通高等学校学习高等数学和微积分课程的教学辅导书，是在校大学生和教师必备的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导和习题解析. 下 / 北京邮电大学高等数学双语教学组编. --2 版. -- 北京 ：北京邮电大学出版社，2018.6

ISBN 978-7-5635-5411-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①北… Ⅲ. ①高等数学—双语教学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 086100 号

书　　　名：高等数学学习指导与习题解析（第 2 版）（下）
著作责任者：北京邮电大学高等数学双语教学组　编
责 任 编 辑：刘　佳
出 版 发 行：北京邮电大学出版社
社　　　址：北京市海淀区西土城路 10 号（邮编：100876）
发　行　部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　　销：各地新华书店
印　　　刷：
开　　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　　张：19.25
字　　　数：501 千字
版　　　次：2014 年 3 月第 1 版　2018 年 6 月第 2 版　2018 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-5411-9　　　　定　价：44.00 元

第 2 版前言

《高等数学学习指导与习题解析(第 2 版)》是全英文《Advanced Mathematics(2nd Edition)》及其对应中文版《高等数学(第 2 版)》的配套练习册。该版学习指导与习题解析在内容选取和习题安排上与教材完全匹配,同时也对第 1 版中出现的解答错误和笔误进行了细致的纠正。学生可以利用这本学习指导与习题解析进行内容复习和作业练习。

本书分为上、下两册。下册的第七章至第十一章的知识要点和习题解析分别由默会霞、朱萍、李晓花、袁健华和艾文宝撰写,最后由袁健华和艾文宝审定了下册。由于编者水平有限,书中难免出现不妥、错漏之处,欢迎读者通过邮箱(jianhuayuan@bupt.edu.cn)指出错误和提出建议,以便我们及时纠正。

编 者

第 1 版前言

为了满足高等院校工科类双语数学基础课的教学需要，我们编写了全英文的高等数学教材及其中译本。与一般高等院校使用的中文高等数学和微积分教材相比较，双语高等数学教材在内容编排与讲解上适当吸收了欧美国家微积分教材的一些优点，更注重与后续课程学习和实际应用的衔接。双语教学模式下要学好本课程需要花费更多的精力，为了帮助读者解决学习本课程的困难，给读者一些启示和提供一些方法，我们编写了这本书供读者参考。

本书是为满足在校学生学习双语"高等数学"的需要，由我们在双语教学第一线的教师经过集体讨论、反复推敲、分别执笔编写出来的，与已出版的双语高等数学教材相匹配。本书包括《高等数学学习指导与习题解析(上)》及《高等数学学习指导与习题解析(下)》共两分册。本书也可以作为一般高等院校学生和教师学习高等数学和微积分课程的教学参考书，也可作为学习高等数学的自学辅导书。

本书的内容选取和编排顺序与双语"高等数学"教材一致，以章节为序，按节编排知识要点和习题解答。由于双语教学的特殊模式，教材在编排时作者从淡化运算技巧出发有意删除了一些计算方法和技巧，因而使读者在解题时会遇到一定的困难，本书在习题解答中弥补了这一不足，使读者在计算方法和技巧上有所提高。本书按节编排各节的知识要点，按章提出了学习的基本要求，可以使读者通过自学把知识要点串联在一起，有的放矢地学习，避免遗漏。本书还结合高等数学的教学大纲和重要的知识点，在每章都给出了极具针对性的总习题，以便读者自我测试和掌握学习情况。

本书分为上、下两册出版，全书由袁健华和艾文宝主编。下册的第七章至第十一章的知识要点和习题解析分别由袁健华、朱萍、李晓花、石霞和艾文宝撰写，李晓花还撰写了第十二章，最后由袁健华和艾文宝审定了下册。在本书的编写中还参阅了国内其他作者编写的高等数学习题指导书，在此向这些作者表示感谢。本书在编写过程中得到北京邮电大学、北京邮电大学理学院和国际学院教改项目的支持，作者在此表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，时间仓促，不妥之处在所难免，书中如有错漏之处，欢迎读者通过邮箱(jianhuayuan@bupt. edu. cn)指出错误，以便我们及时纠正。

编　者

目　　录

第七章　无穷级数

第一节　常数项级数的概念和性质

一、知识要点

1. 常数项级数的概念

定义 1　假设有一无穷数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$，将其写成如下和的形式

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots, \tag{1}$$

称为**常数项级数**或**无穷级数**(也常简称为**级数**)，其中 a_n 为该级数的**通项**或者级数的第 n 项.

常数项级数(1)常记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 或者简单写作 $\sum a_n$.

一般说来，级数的前 n 项和 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(n=1,2,\cdots)$称为此级数的**前 n 项部分和**或者简称为**部分和**，级数部分和构成一个数列称为级数的**部分和数列**，记为数列$\{S_n\}$.

定义 2(收敛与发散)　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列$\{S_n\}$收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **收敛**. 此时，称部分和数列$\{S_n\}$的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k=S$ 为它的**和**，记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=S$. 否则，称级数**发散**. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛与发散统称为敛散性. 收敛级数的和与其部分和的差 $R_n=S-S_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ 称为该级数的 n **阶余项**.

2. 常数项级数的性质

性质 1(线性性质)　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛且它们的和分别为 S 与 $\overline{S}$，则对任意 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n\pm\beta b_n)$也收敛且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n\pm\beta b_n)=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}a_n\pm\beta\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\alpha S\pm\beta\overline{S}.$$

推论　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ 必发散.

性质 2　在收敛级数的项中任意加括号，既不改变级数的收敛性，也不改变它的和(条件是级数项的顺序保持不变).

注意　从级数加括号后的收敛性，不能推断它在未加括号前也收敛.

性质 3　任意删减、增加或改变级数的有限项并不改变原级数的敛散性.

注意　一个级数是否收敛与级数前面有限项的取值无关．但是对于收敛级数来说，去掉或增加有限项后，级数的和一般会发生变化．

性质4(级数收敛的必要条件)　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$，其中 R_n 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的 n 阶余项．

注意　性质4中(1)的逆命题是不成立的．即有些级数虽然通项趋于零，但仍然是发散的．性质4中(1)的逆否命题是成立的．即如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\neq 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 必定发散．

二、习题解答

习题 7.1 A

1．写出下列级数的通项公式．

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$；

(2) $\frac{5}{2}+\frac{5}{6}+\frac{5}{12}+\frac{5}{20}+\frac{5}{30}+\cdots$；

(3) $-\frac{a}{3!}+\frac{a^2}{5!}-\frac{a^3}{7!}+\frac{a^4}{9!}+\cdots$；

(4) $\frac{3\sqrt{x+1}}{2}+\frac{5(x+1)}{2\times 4}+\frac{7(x+1)\sqrt{x+1}}{2\times 4\times 6}+\frac{9(x+1)^2}{2\times 4\times 6\times 8}+\cdots$．

解　设 a_n 为级数的通项，通过观察，不难看出：

(1) $a_n=\frac{1}{2n-1}$；　　(2) $a_n=\frac{5}{n(n+1)}$；

(3) $a_n=(-1)^n\frac{a^n}{(2n+1)!}$；　　(4) $a_n=\frac{(2n+1)(x+1)^{\frac{n}{2}}}{(2n)!!}$．

2．求出下列级数的前 n 项部分和公式，若级数收敛，请求其和．

(1) $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\cdots+\frac{2}{3^{n-1}}+\cdots$；

(2) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$；

(3) $1-2+4-8+\cdots+(-1)^{n-1}2^{n-1}+\cdots$；

(4) $\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots$．

解　(1) 此级数为等比级数，公比 $q=\frac{1}{3}$，故级数的前 n 项部分和为

$$S_n=2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\cdots+\frac{2}{3^{n-1}}=3\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right].$$

不难看出此级数收敛，其和为 $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty} 3\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]=3$．

(2) 此级数为等比级数,公比 $q=-\frac{1}{2}$,故级数的前 n 项部分和为

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right].$$

不难看出此级数收敛,其和为 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]=\frac{2}{3}$.

(3) 此级数为等比级数,公比 $q=-2$,故级数的前 n 项部分和为

$$S_n=1-2+4-8+\cdots+(-1)^{n-1}2^{n-1}=\frac{1-(-2)^n}{3}.$$

不难看出此级数发散.

(4) 由于 $a_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$, $n=1,2,\cdots$,故级数的前 n 项部分和为

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}.\end{aligned}$$

不难看出此级数收敛,其和为 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$.

3. 应用级数收敛的定义及收敛级数的性质判断下列级数的敛散性,若级数收敛,请求其和.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n}{n+1}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;　　(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+1}{q^n}\quad(|q|>2)$.

解 这四个级数都可以先分解 a_n,再判别敛散性,并对收敛级数求和.

(1) 因为 $a_n=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$,所以级数的前 $n+1$ 项部分和为

$$S_{n+1}=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+3}\right).$$

易见 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{n+1}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{2}$,故知原级数收敛,且其和为 $S=\frac{1}{2}$.

(2) 因为 $a_n=\ln\frac{n}{n+1}=[\ln n-\ln(n+1)]$,所以级数的前 n 项部分和为

$$S_n=(\ln 1-\ln 2)+(\ln 2-\ln 3)+\cdots+[\ln n-\ln(n+1)]=-\ln(n+1).$$

易见 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}-\ln(n+1)=-\infty$,所以原级数发散.

(3) 因为 $a_n=\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$,所以级数的前 n 项部分和为

$$\begin{aligned}S_n&=[(\sqrt{3}-\sqrt{2})-(\sqrt{2}-\sqrt{1})]+[(\sqrt{4}-\sqrt{3})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})]+\cdots+\\&\quad[(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})]\\&=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{2}-\sqrt{1}).\end{aligned}$$

易见,$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}[(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{2}-\sqrt{1})]=1-\sqrt{2}$,所以原级数收敛,且其和为 $1-\sqrt{2}$.

(4) 易见 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+1}{q^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{q}\right)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{q}\right)^n$，这是两个等比级数的和. 由于当 $|q|>2$ 时，$\left|\frac{2}{q}\right|<1$，$\left|\frac{1}{q}\right|<1$，故两个级数都收敛，且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{q}\right)^n$ 收敛于 $\frac{q}{q-2}$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{q}\right)^n$ 收敛于 $\frac{q}{q-1}$，从而原级数收敛，且其和

$$S=\frac{q}{q-2}+\frac{q}{q-1}=\frac{2q^2-3q}{(q-1)(q-2)}.$$

4. 写出下列级数的前 5 项，并求出级数的和.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{7}{4^n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$.

解 (1) $a_0=1$，$a_1=-\frac{1}{4}$，$a_2=\frac{1}{4^2}$，$a_3=-\frac{1}{4^3}$，$a_4=\frac{1}{4^4}$.

此级数是等比级数，公比 $q=-\frac{1}{4}$，故级数的前 n 项部分和为

$$S_n=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots+\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{4}{5}\left[1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right].$$

不难看出此级数收敛，其和为 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{4}{5}$.

(2) $a_0=7$，$a_1=\frac{7}{4}$，$a_2=\frac{7}{4^2}$，$a_3=\frac{7}{4^3}$，$a_4=\frac{7}{4^4}$.

此级数是等比级数，公比 $q=\frac{1}{4}$，故级数的前 n 项部分和为

$$S_n=7+\frac{7}{4}+\frac{7}{4^2}+\frac{7}{4^3}+\frac{7}{4^4}+\cdots+\frac{7}{4^{n-1}}=\frac{28}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right].$$

不难看出此级数收敛，其和为 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{28}{3}$.

(3) $a_1=\frac{6}{2}+\frac{1}{3}$，$a_2=\frac{6}{2^2}+\frac{1}{3^2}$，$a_3=\frac{6}{2^3}+\frac{1}{3^3}$，$a_4=\frac{6}{2^4}+\frac{1}{3^4}$，$a_5=\frac{6}{2^5}+\frac{1}{3^5}$.

此级数的 n 项部分和为

$$\begin{aligned}S_n&=\left(\frac{6}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{6}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{6}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)\\&=\left(\frac{6}{2}+\frac{6}{2^2}+\cdots+\frac{6}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)\\&=6\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]+\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right].\end{aligned}$$

不难看出此级数收敛，其和为 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{13}{2}$.

(4) $a_1=\frac{6}{2}-\frac{1}{3}$，$a_2=\frac{6}{2^2}-\frac{1}{3^2}$，$a_3=\frac{6}{2^3}-\frac{1}{3^3}$，$a_4=\frac{6}{2^4}-\frac{1}{3^4}$，$a_5=\frac{6}{2^5}-\frac{1}{3^5}$.

此级数的 n 项部分和

$$\begin{aligned}S_n&=\left(\frac{6}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{6}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{6}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)\\&=\left(\frac{6}{2}+\frac{6}{2^2}+\cdots+\frac{6}{2^n}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)\\&=6\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]-\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right].\end{aligned}$$

不难看出此级数收敛,其和为 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{11}{2}$.

5. 把下列数字表示成分数.

(1) $0.\dot{2}\dot{4}=0.242\,424\cdots$; (2) $0.\dot{4}\dot{1}\dot{4}=0.414\,414\,414\cdots$;

(3) $1.\dot{1}42\,\dot{8}=1.142\,814\,281\,428\cdots$; (4) $2.1\dot{7}\dot{5}=2.175\,75\cdots$.

解 这四个循环小数都可以写作级数形式.

(1) $0.\dot{2}\dot{4}=0.242\,424\cdots=\frac{24}{100}+\frac{24}{100^2}+\frac{24}{100^3}+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{24}{100^n}$.

这是一个公比为$\frac{1}{100}$的等比级数,此级数收敛,且和为 $S=\frac{8}{33}$,于是 $0.\dot{2}\dot{4}=\frac{8}{33}$.

(2) $0.\dot{4}\dot{1}\dot{4}=0.414\,414\,414\cdots=\frac{414}{1\,000}+\frac{414}{1\,000^2}+\frac{414}{1\,000^3}+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{414}{1\,000^n}$.

这是一个公比为$\frac{1}{1\,000}$的等比级数,此级数收敛,且和为 $S=\frac{46}{111}$,于是 $0.\dot{4}\dot{1}\dot{4}=\frac{46}{111}$.

(3) $1.\dot{1}42\,\dot{8}=1.142\,814\,281\,428\cdots=1+\frac{1\,428}{100^2}+\frac{1\,428}{100^4}+\frac{1\,428}{100^6}+\cdots=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\,428}{100^{2n}}$.

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\,428}{100^{2n}}$是一个公比为$\frac{1}{100^2}$的等比级数,此级数收敛,且和为 $S=\frac{476}{3\,333}$,于是

$$1.\dot{1}42\,\dot{8}=1+\frac{476}{3\,333}=\frac{3\,809}{3\,333}.$$

(4) $2.1\dot{7}\dot{5}=2.175\,75\cdots=2.1+\frac{1}{10}\times\frac{75}{100}+\frac{1}{10}\times\frac{75}{100^2}+\frac{1}{10}\times\frac{75}{100^3}+\cdots=\frac{21}{10}+\frac{75}{10}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{100^n}$.

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{100^n}$是一个公比为$\frac{1}{100}$的等比级数,此级数收敛,且和为 $S=\frac{1}{99}$,于是

$$2.1\dot{7}\dot{5}=\frac{21}{10}+\frac{75}{10}\times\frac{1}{99}=\frac{359}{165}.$$

6. 根据收敛级数的性质判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{2^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2^n}\right)$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\ln\left(1+\frac{x}{n^2}\right)\quad(x\in\mathbf{R})$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\mathrm{e}}\neq0$,不满足级数收敛的必要条件,所以原级数发散.

(2) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2^n\sin\frac{\pi}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2^n\cdot\frac{\pi}{2^n}\right)=\pi\neq0$,不满足级数收敛的必要条件,所以

原级数发散.

(3) 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛,因此由收敛级数的性质知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2^n}\right)$发散.

(4) 由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\ln\left(1+\frac{x}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{x}\cdot x}=x$,故当 $x\neq0$ 时,原级数发散;而当 $x=0$ 时,原级数的各项都为 0,从而原级数是收敛的.

7. 若一个级数的 n 项部分和表示为 $S_n=\frac{2n}{n+1}$,求出相应的级数并求其和.

解 易见 $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{2}{n(n+1)}$,因此所求的级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2}{1\times2}+\frac{2}{2\times3}+\frac{2}{3\times4}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)}+\cdots.$$

此级数的和为

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2.$$

8. 证明:若两个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$,其中一个发散,一个收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$是发散的;若两个级数都是发散的,则此结论是否成立?

证 (1) 假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛. 下面用反证法证明级数数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$是发散的.

假设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$收敛,则由收敛级数的性质知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)-\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 也收敛,从而与题设矛盾. 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$发散.

同理可证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$是发散的.

(2) 若两个级数都是发散的,此结论也不一定成立.

设 $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=-\frac{1}{n}$,则 $a_n+b_n=0$, $a_n-b_n=\frac{2}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=0$ 是收敛的,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$ 是发散的.

9. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的前 $2n$ 项部分和为 S_{2n},且$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=A$. 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,且其和为 A.

证 因为$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=A$,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}+a_{2n+1})=A$. 从而$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=A$,故级数收敛,且其和为 A.

习题 7.1 B

1. 判断下列命题是否正确? 如果正确,请给出证明;否则,请举出反例.

(1) 若 $a_n\leqslant b_n$ 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(a_n>0)$收敛,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda<1$ 或$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lambda<1$;

(3) 如果数列$\{a_n\}$是单调递减的，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛；

(4) 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$也发散.

解 (1) 不一定. 若这两个级数的各项都是非负的，且满足此命题条件，则此命题成立. 但是一般情况下不一定成立. 例如，设$b_n=\sin\frac{\pi}{5^n}$，$a_n=-1$，易见$a_n<b_n$，但级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散.

(2) 错误. 设$a_n=\frac{1}{n^2}$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，但$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$.

(3) 错误. 设$\{a_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$，则此数列单减且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，但是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

(4) 错误. 设$a_n=\frac{1}{n}$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散，但是$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛.

2. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}=5$，求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的和.

解 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_{2n-1}-a_{2n}+\cdots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}=a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}+\cdots.$$

易见

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}=(a_2+a_4+\cdots+a_{2n}+\cdots)=\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=5-2=3,$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}=5+3=8.$$

3. 证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$收敛的充分必要条件是数列$\{a_n\}$收敛.

证 (充分性) 设数列$\{a_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$. 易见级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$的前$n$项部分和为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)=a_{n+1}-a_1,$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_1)=a-a_1$，因此级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$收敛，且其和为$a-a_1$.

(必要性) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$收敛，则其部分和数列$\{S_n\}$收敛，设此级数的和为$S$. 于是

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_1),$$

从而$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=S+a_1$，这说明数列$\{a_n\}$收敛.

4. * 用柯西收敛准则判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$；　　　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{2^n}$；

(3) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$；　　　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}\right)$.

解　(1) 任取正整数 p，则

$$\begin{aligned}|S_{n+p}-S_n|&=|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|\\&=\left|\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}+\frac{(-1)^{n+3}}{n+2}+\cdots+\frac{(-1)^{n+p+1}}{n+p}\right|\\&=\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{n+p}\right|.\end{aligned}$$

易见，当 p 为奇数时，

$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{n+p}=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)+\cdots+\frac{1}{n+p}>0;$$

当 p 为偶数时，

$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{n+p}=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)>0.$$

因此，对任意 $p\in\mathbf{N}_+$，都有

$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{n+p}>0.$$

于是，当 p 为奇数时，

$$|S_{n+p}-S_n|=\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)<\frac{1}{n+1};$$

当 p 为偶数时，

$$|S_{n+p}-S_n|=\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{n+p-2}-\frac{1}{n+p-1}\right)-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n+1}.$$

因此对任意给定的 $\varepsilon>0$，取正整数 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对任何正整数 p，都有

$$|S_{n+p}-S_n|<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

根据柯西收敛原理知原级数收敛.

(2) 任取正整数 p，则

$$\begin{aligned}|S_{n+p}-S_n|&=|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|\\&=\left|\sin\frac{1}{2^{n+1}}+\sin\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\sin\frac{1}{2^{n+p}}\right|\\&\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}=\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^p}}{1-\frac{1}{2}}<\frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

由此可知，对任意给定的 $\varepsilon>0$，取正整数 $N=\left[\log_2\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对一切正整数 p，都有

$$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon,$$

故根据柯西收敛原理知原级数收敛.

(3) 当 n 是 3 的倍数时，如果取 $p=3n$，则必有