LeXue QiZhong

GaoZhong ShuXue LingZhen FuXi

学在七中　乐在其中

乐学七中

高中数学零诊复习

策划　许　勇

主编　廖学军

电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

乐学七中.高中数学零诊复习 / 廖学军主编.
—成都：电子科技大学出版社，2014. 5
ISBN 978-7-5647-2343-9

Ⅰ. ①乐… Ⅱ. ①廖…Ⅲ. ①中学数学课－高中－升学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 080575 号

乐学七中.高中数学零诊复习

许　勇　　策划

廖学军　　主编

出　　版：电子科技大学出版社（成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦　邮编：610051）
策划编辑：罗　雅
责任编辑：罗　雅
主　　页：www.uestcp.com.cn
电子邮箱：uestcp@uestcp.com.cn
发　　行：新华书店经销
印　　刷：成都市火炬印务有限公司
成品尺寸：205mm×282mm　　印张 11　　字数 390 千字
版　　次：2014 年 5 月第一版
印　　次：2014 年 5 月第一次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5647-2343-9
定　　价：35.00 元

前言

成都七中的数学教学一直坚持发挥学生的主体作用.孔子有云:知之者不如好之者,好之者不如乐之者.“乐学”是七中教师对学生主体更加积极的期许状态,学生的这一状态并非一蹴而就,而是需要耐心引导的.发现问题并解决问题所带来的成就感往往是学生“乐学”的内在动因,而数学教育中"怎样解题"则成为教师引导的关键所在.为了构建和完善"怎样解题"的引导平台,教辅用书的选择和使用贯穿了整个高中数学教学过程.成都七中数学组对新课程高中数学教学进行了系统的反思和研究,形成了独特而完备的指导思想.为了将集体智慧渗透到学校的常规教学中并进一步提高教学工作的有效性,由成都七中名优教师牵头,依托学校丰富的教育教学资源,七中数学组教师群策群力,于2013年共同编写了高一、高二的教辅同步用书《乐学七中》.已编部分很好地满足了七中教育集团广大师生的日常教学需要,同时也得到了很多中肯的建议.在此基础上,七中数学组教师不断提高编撰水平,完善原有的不足,加强审阅力度,继续编写了《乐学七中》零诊复习资料.这本复习资料突出了以下特点:

1.章节排布与成都七中实际教学进度同步,为教师的课堂教学与作业布置带来了便利,增加了该书的可操作性.

2.复习资料中的内容安排与成都市零诊考试内容一致,使学生的复习有的放矢.

3.高中数学知识网络图和高中阶段的其它重要内容,弥补了零诊考试内容与高考要求的脱节,为学生提前进入高三复习提供了必要的蓝本.

4.“课标要求”与“知识要点”言简意赅、点到为止,为教师讲解,学生冥思留下空间.

5.“典型例题”重视课本例题的使用和挖掘,源于教材,但不拘泥于教材.为了保证课堂训练的针对性和有效性,强调一讲一练,所选题目既能体现知识的内涵和外延,也能兼顾方法的呈现和过手.

6.“练习”遵循“紧扣课堂、难度适中、梯度呈现”的原则.基于此,《乐学七中》零诊复习资料作为进入高三前的一本复习辅导用书,有其独特的优势和推广价值.热忱欢迎兄弟学校师生参考或使用该书.由于编写时间紧,该书难免存在一些不足,恳请广大师生批评指正,以便今后修订时更加完善.

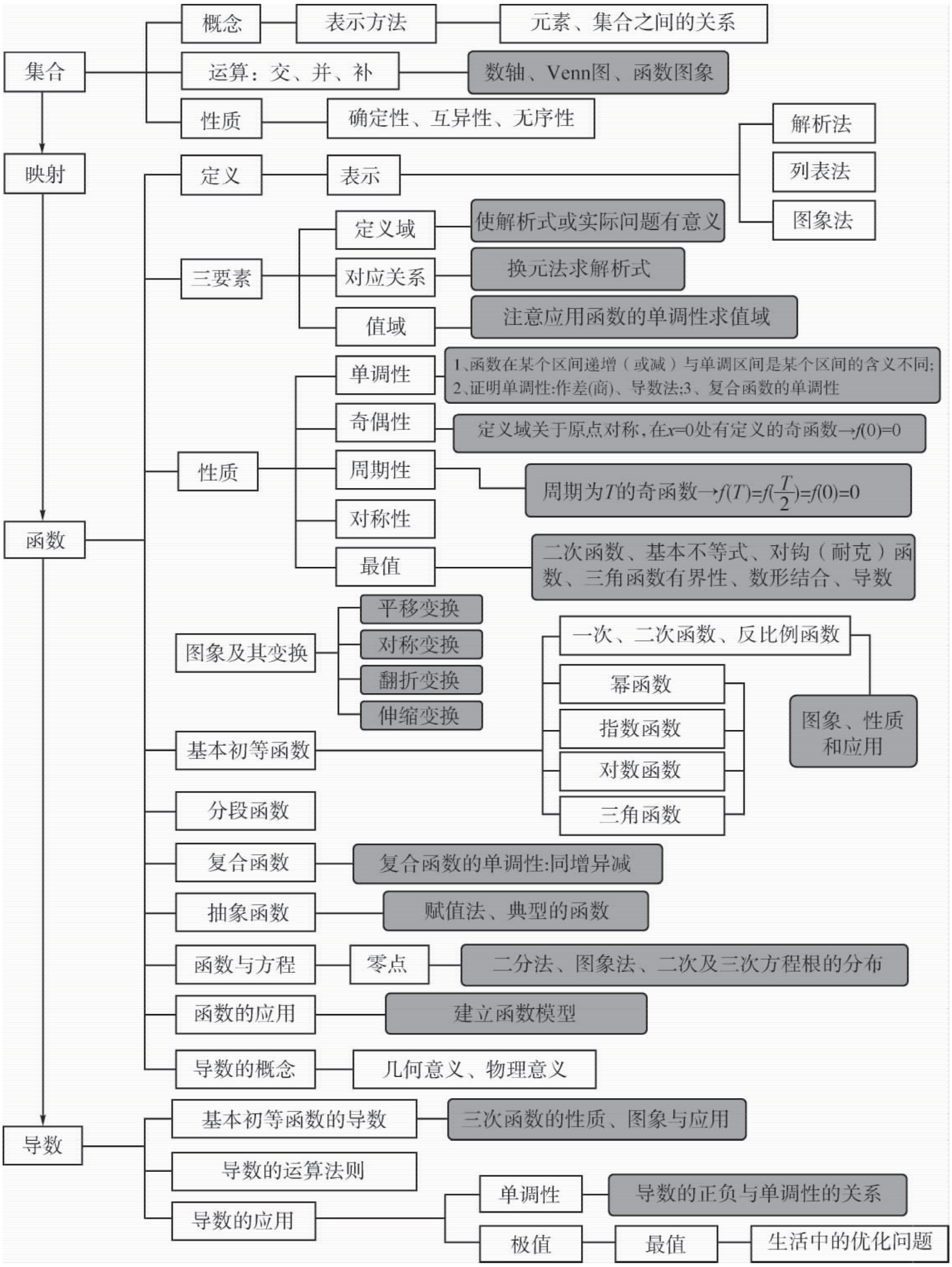
编　者

2014年4月

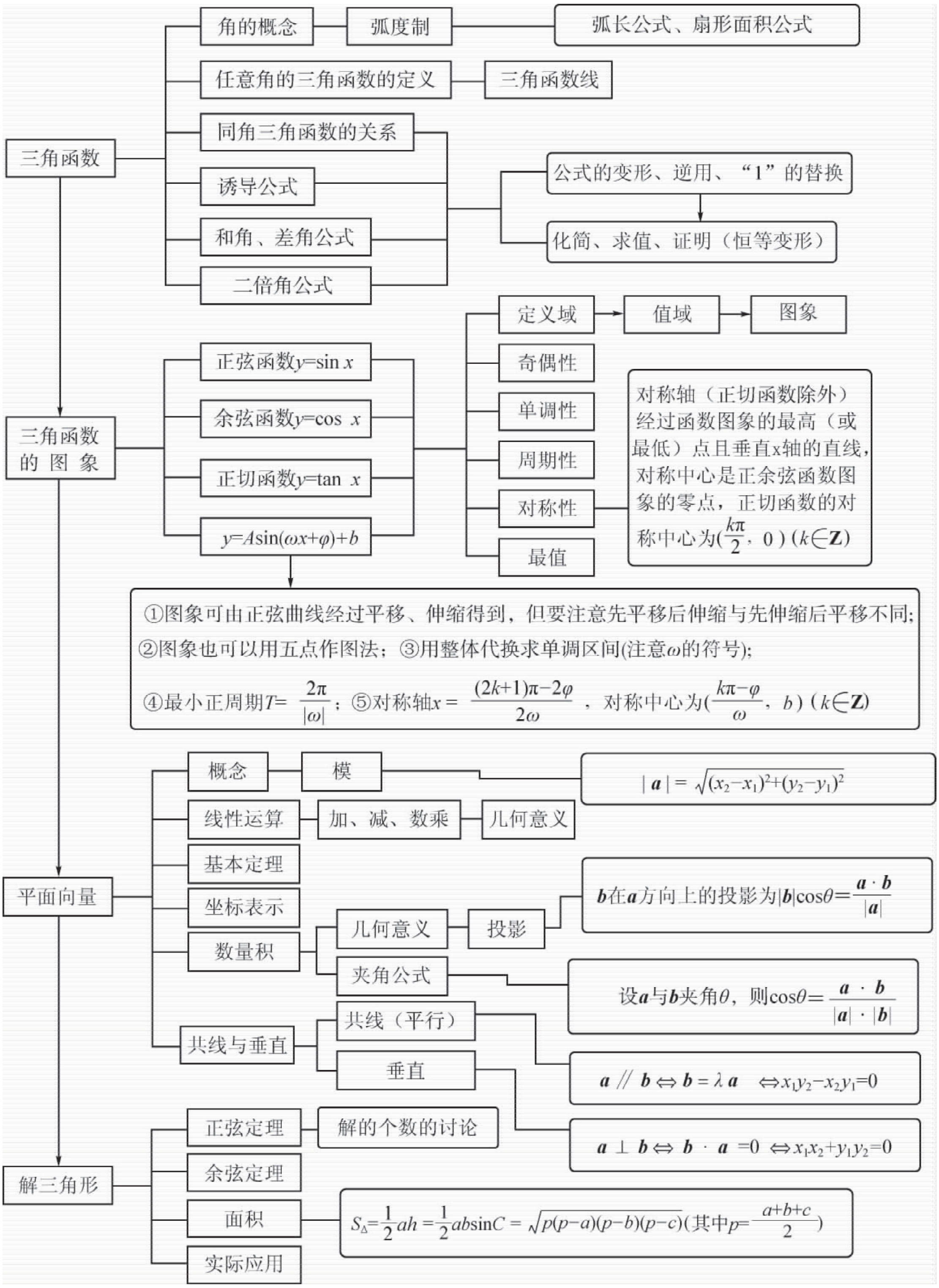
目录

第一部分　集合、映射、函数及导数

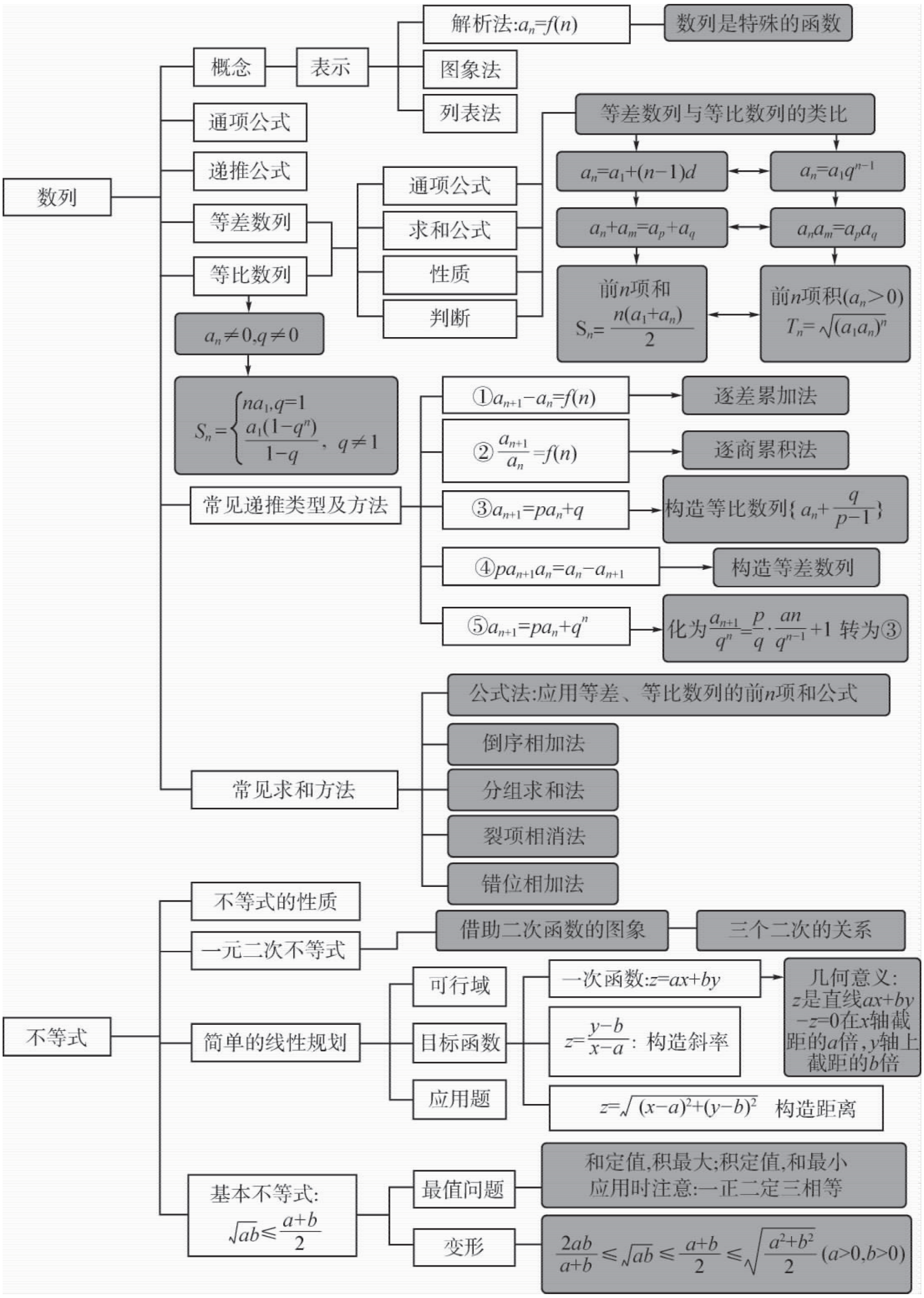
高中数学知识网络图



第二部分　三角函数与平面向量



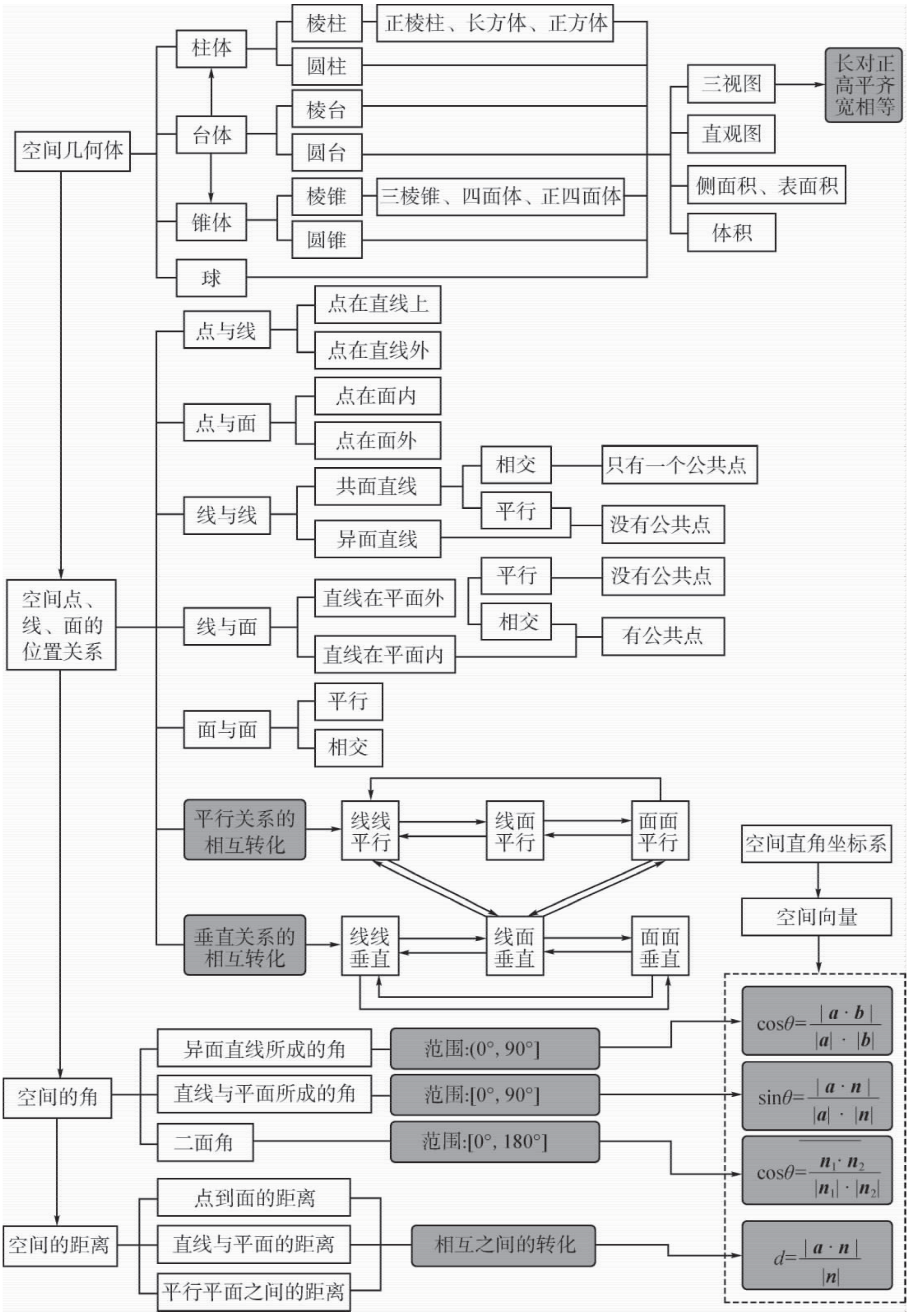
第三部分　数列与不等式


数列
概念
表示
解析法:$a_n=f(n)$
数列是特殊的函数
图象法
列表法
通项公式
递推公式
等差数列
等比数列
$a_n\neq0,q\neq0$
$S_n=\begin{cases}na_1,q=1\\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q},q\neq1\end{cases}$
通项公式
求和公式
性质
判断
等差数列与等比数列的类比
$a_n=a_1+(n-1)d$
$a_n=a_1q^{n-1}$
$a_n+a_m=a_p+a_q$
$a_na_m=a_pa_q$
前n项和 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$
前n项积$(a_n>0)$ $T_n=\sqrt{(a_1a_n)^n}$
常见递推类型及方法
①$a_{n+1}-a_n=f(n)$
逐差累加法
②$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$
逐商累积法
③$a_{n+1}=pa_n+q$
构造等比数列$\{a_n+\dfrac{q}{p-1}\}$
④$pa_{n+1}a_n=a_n-a_{n+1}$
构造等差数列
⑤$a_{n+1}=pa_n+q^n$
化为$\dfrac{a_{n+1}}{q^n}=\dfrac{p}{q}\cdot\dfrac{an}{q^{n-1}}+1$ 转为③
常见求和方法
公式法:应用等差、等比数列的前n项和公式
倒序相加法
分组求和法
裂项相消法
错位相加法
不等式
不等式的性质
一元二次不等式
借助二次函数的图象
三个二次的关系
简单的线性规划
可行域
目标函数
应用题
一次函数:$z=ax+by$
几何意义:z是直线$ax+by-z=0$在x轴截距的a倍,y轴上截距的b倍
$z=\dfrac{y-b}{x-a}$: 构造斜率
$z=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ 构造距离
基本不等式:$\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}$
最值问题
和定值,积最大;积定值,和最小
应用时注意:一正二定三相等
变形
$\dfrac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}(a>0,b>0)$

第四部分　解析几何

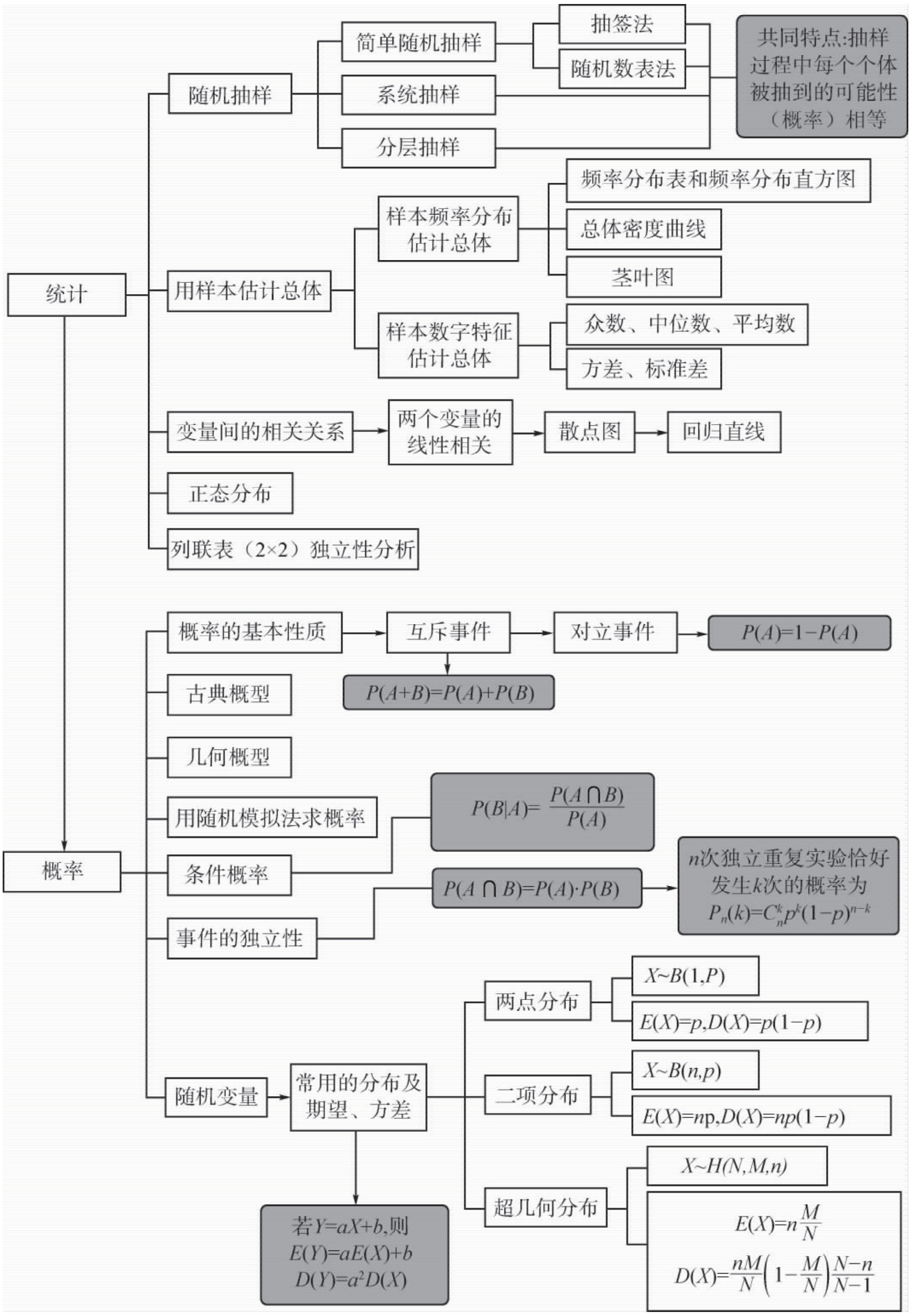
- 直线的方程
  - 倾斜角和斜率 → 倾斜角的变化与斜率的变化
  - 位置关系
    - 重合、平行：$A_1B_2-A_2B_1=0$
    - 相交：$A_1B_2-A_2B_1\neq0$
      - 垂直：$A_1A_2+B_1B_2=0$
  - 截距 → 注意:截距可正、可负，也可为0
  - 直线方程的形式（注意各种形式的转化和运用范围）
    - 点斜式：$y-y_0=k(x-x_0)$
    - 斜截式：$y=kx+b$
    - 两点式：$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$
    - 截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$
    - 一般式：$Ax+By+C=0$
  - 两直线的交点
  - 距离：点到线的距离：$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，平行线间距离：$d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$
- 圆的方程
  - 圆的标准方程
  - 圆的一般方程
  - 直线与圆的位置关系
    - 相离：$\Delta<0$，或$d>r$
    - 相切：$\Delta=0$，或$d=r$
    - 相交：$\Delta>0$，或$d<r$
  - 两圆的位置关系
- 圆锥曲线
  - 曲线与方程 → 轨迹方程的求法:直接法、定义法、相关点法、参数法、待定系数法
  - 椭圆、双曲线、抛物线
    - 定义及标准方程
    - 性质：范围、对称性、顶点、焦点、长轴(实轴)、短轴（虚轴）、渐近线（双曲线）、准线（只要求抛物线）
    - 离心率
- 对称性问题
  - 中心对称
    - 点$(x_1,y_1)\xrightarrow{\text{关于点}(a,b)\text{对称}}$点$(2a-x_1,2b-y_1)$
    - 曲线$f(x,y)\xrightarrow{\text{关于点}(a,b)\text{对称}}$曲线$f(2a-x,2b-y)$
  - 轴对称
    - 点(x_1,y_1)与点(x_2,y_2)关于直线$Ax+By+C=0$对称 → $\begin{cases}A\cdot\dfrac{x_1+x_2}{2}+B\cdot\dfrac{y_1+y_2}{2}+C=0\\ \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\left(-\dfrac{A}{B}\right)=-1\end{cases}$
    - 特殊对称轴 $x\pm y=C$ → 坐标置换法

第五部分　立体几何

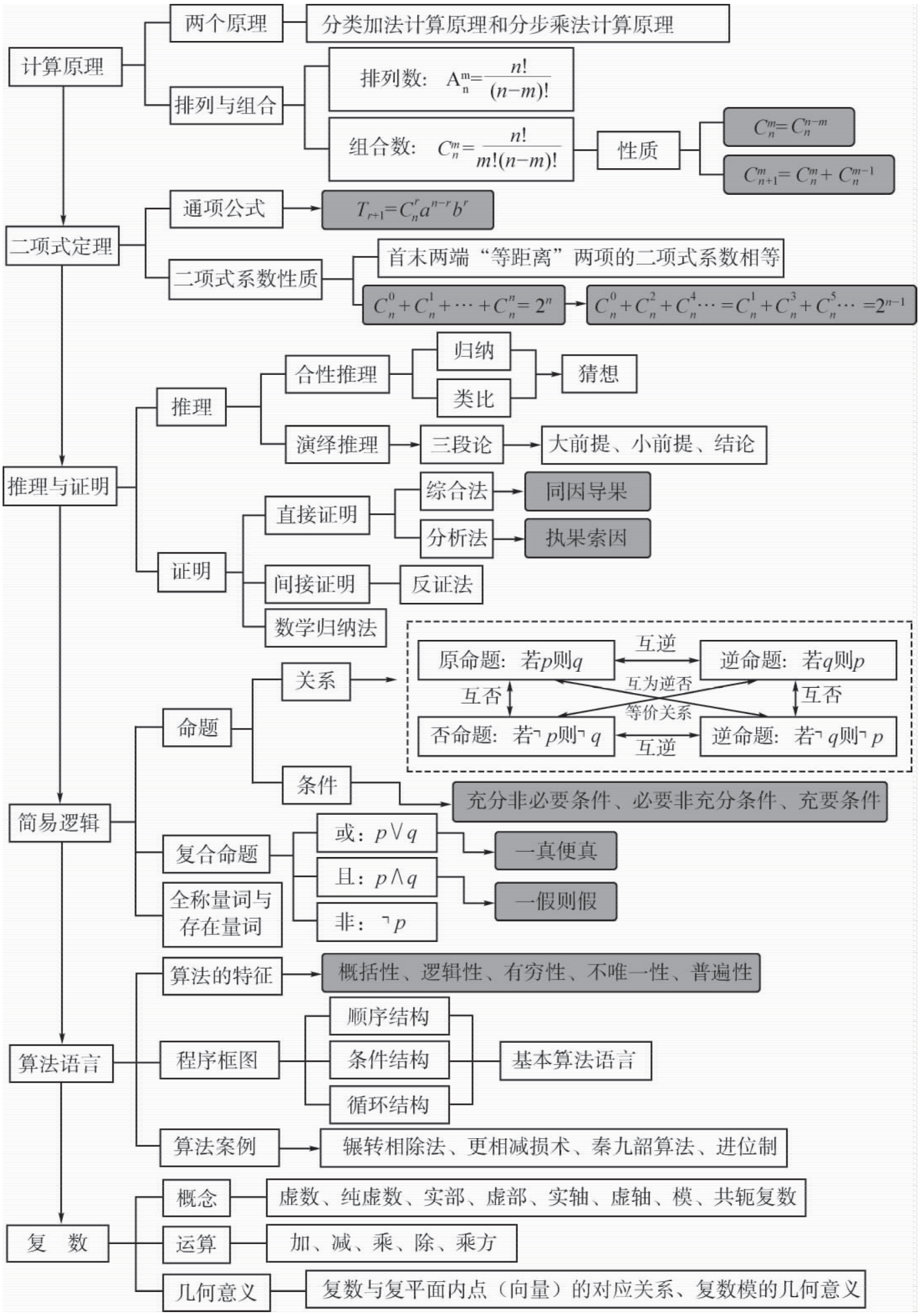


空间几何体
柱体
台体
锥体
球
棱柱
圆柱
棱台
圆台
棱锥
圆锥
正棱柱、长方体、正方体
三棱锥、四面体、正四面体
三视图
长对正
高平齐
宽相等
直观图
侧面积、表面积
体积
空间点、线、面的位置关系
点与线
点在直线上
点在直线外
点与面
点在面内
点在面外
线与线
共面直线
异面直线
相交
平行
只有一个公共点
没有公共点
线与面
直线在平面外
直线在平面内
平行
相交
没有公共点
有公共点
面与面
平行
相交
平行关系的相互转化
线线平行
线面平行
面面平行
垂直关系的相互转化
线线垂直
线面垂直
面面垂直
空间直角坐标系
空间向量
空间的角
异面直线所成的角
范围:(0°, 90°]
直线与平面所成的角
范围:[0°, 90°]
二面角
范围:[0°, 180°]
$\cos\theta=\frac{|a\cdot b|}{|a|\cdot|b|}$
$\sin\theta=\frac{|a\cdot n|}{|a|\cdot|n|}$
$\cos\theta=\frac{n_1\cdot n_2}{|n_1|\cdot|n_2|}$
空间的距离
点到面的距离
直线与平面的距离
平行平面之间的距离
相互之间的转化
$d=\frac{|a\cdot n|}{|n|}$

第六部分　统计与概率


统计
随机抽样
简单随机抽样
抽签法
随机数表法
系统抽样
分层抽样
共同特点:抽样过程中每个个体被抽到的可能性（概率）相等
用样本估计总体
样本频率分布估计总体
频率分布表和频率分布直方图
总体密度曲线
茎叶图
样本数字特征估计总体
众数、中位数、平均数
方差、标准差
变量间的相关关系
两个变量的线性相关
散点图
回归直线
正态分布
列联表（2×2）独立性分析
概率
概率的基本性质
互斥事件
对立事件
$P(A)=1-P(A)$
$P(A+B)=P(A)+P(B)$
古典概型
几何概型
用随机模拟法求概率
条件概率
$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$
事件的独立性
$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$
n次独立重复实验恰好发生k次的概率为$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$
随机变量
常用的分布及期望、方差
两点分布
$X\sim B(1,P)$
$E(X)=p,D(X)=p(1-p)$
二项分布
$X\sim B(n,p)$
$E(X)=np,D(X)=np(1-p)$
超几何分布
$X\sim H(N,M,n)$
$E(X)=n\frac{M}{N}$
$D(X)=\frac{nM}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$
若$Y=aX+b$,则$E(Y)=aE(X)+b$ $D(Y)=a^2D(X)$

第七部分　其他部分内容



计算原理
两个原理
分类加法计算原理和分步乘法计算原理
排列与组合
排列数：$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$
组合数：$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$
性质
$C_n^m=C_n^{n-m}$
$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$
二项式定理
通项公式
$T_{r+1}=C_n^r a^{n-r}b^r$
二项式系数性质
首末两端“等距离”两项的二项式系数相等
$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$
$C_n^0+C_n^2+C_n^4\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5\cdots=2^{n-1}$
推理与证明
推理
合性推理
归纳
类比
猜想
演绎推理
三段论
大前提、小前提、结论
证明
直接证明
综合法
同因导果
分析法
执果索因
间接证明
反证法
数学归纳法
简易逻辑
命题
关系
原命题：若p则q
互逆
逆命题：若q则p
互否
互为逆否
等价关系
互否
否命题：若$\neg p$则$\neg q$
互逆
逆否命题：若$\neg q$则$\neg p$
条件
充分非必要条件、必要非充分条件、充要条件
复合命题
或：$p\vee q$
一真便真
且：$p\wedge q$
一假则假
非：$\neg p$
全称量词与存在量词
算法语言
算法的特征
概括性、逻辑性、有穷性、不唯一性、普遍性
程序框图
顺序结构
条件结构
循环结构
基本算法语言
算法案例
辗转相除法、更相减损术、秦九韶算法、进位制
复　数
概念
虚数、纯虚数、实部、虚部、实轴、虚轴、模、共轭复数
运算
加、减、乘、除、乘方
几何意义
复数与复平面内点（向量）的对应关系、复数模的几何意义

第一章 集合与常用逻辑用语

§1.1 集合与命题

一、课标要求

1. 了解集合的含义及表示，掌握集合的基本关系及运算；

2. 了解命题的四种形式，掌握四种命题的相互关系；

3. 了解简单的逻辑联结词，能判断简单复合命题的真假.

二、知识要点

1. 集合与元素

(1)集合元素的三个特征：________、________、________.

(2)元素与集合的关系是________或________关系，用符号________或________表示.

(3)集合的表示法：________、________、________.

(4)常见数集的记法：

集合	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
符号	N	N^*	Z	Q	R

2. 集合间的关系

(1)子集：对任意的 $x\in A$，都有 $x\in B$，则 A ________ B（或 B ________ A）.

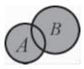
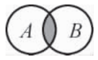
(2)真子集：若 $A\subseteq B$，且 $A\neq B$，则 A ________ B（或 B ________ A）.

(3)空集：空集是任意一个集合的子集，是任何非空集合的真子集. 即 $\varnothing\subseteq A$，$\varnothing$ ________ $B(B\neq\varnothing)$.

(4)若 A 含有 n 个元素，则 A 的子集有________个，A 的非空子集有________个，非空真子集有________个.

(5)集合相等：若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则________.

3. 集合的运算

	集合的并集	集合的交集	集合的补集
图形			
符号	$A\cup B=$______	$A\cap B=$______	$C_UA=$______

4. 命题的概念

在数学中把用语言、符号或式子表达的，可以________的陈述句叫做命题. 其中________的语句叫真命题，________的语句叫假命题.（常见结构：若 p，则 q）

5. 简单的逻辑联结词

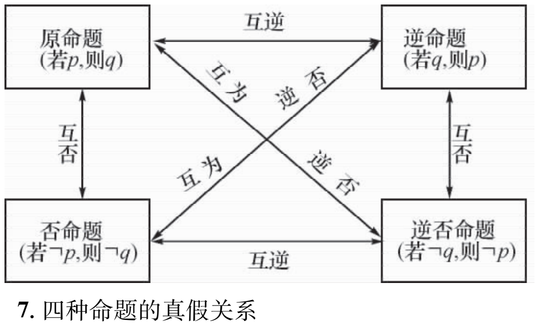
(1)命题中的"________"、"________"、"________"叫做逻辑联结词. 含逻辑联结词的命题称为复合命题.

(2)简单复合命题的真值表：

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$\neg p$
真	真	________	________	________
假	真	________	________	________
真	假	________	________	________
假	假	________	________	________

记忆口诀："$p\wedge q$ 命题"________；"$p\vee q$ 命题"________；"$\neg p$"命题________

6. 四种命题及相互关系



7. 四种命题的真假关系

(1)两个命题互为逆否命题，它们有________的真假性；

(2)两个命题互为逆命题或互为否命题，它们的真假性________关系.

三、典型例题

例1　已知集合 $A=\{-1,2\}$，$B=\{x|mx+1=0\}$，若 $A\cup B=A$，则 m 的可能取值组成的集合为________.

例2　已知 p：方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不相等的负实数根；q：不等式 $4x^2+4(m-2)x+1>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$. 若"$p\vee q$"为真命题，"$p\wedge q$"为假命题，求实数 m 的取值范围.

例3　(2011·安徽理科)设集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，$B=\{4,5,6,7\}$，则满足 $S\subseteq A$ 且 $S\cap B\neq\varnothing$ 的集合 S 为（　　）

A. 57　　B. 56　　C. 49　　D. 8

四、小结与反思

练　习

1. 已知集合 $A=\{x|x$ 是平行四边形$\}$，$B=\{x|x$ 是矩形$\}$，$C=\{x|x$ 是正方形$\}$，$D=\{x|x$ 是菱形$\}$则（　　）

A. $A\subseteq B$　　B. $C\subseteq B$　　C. $D\subseteq C$　　D. $A\subseteq D$

2. 已知集合 $M=\{0,1,2,3,4\}$，$N=\{1,3,5\}$，$P=M\cap N$，则 P 的子集共有（　　）

A. 2 个　　B. 4 个　　C. 6 个　　D. 8 个

3. 命题"若 x,y 都是偶数，则 $x+y$ 也是偶数"的逆否命题是（　　）

A. 若 $x+y$ 是偶数，则 x 与 y 不都是偶数

B. 若 $x+y$ 是偶数，则 x 与 y 都不是偶数

C. 若 $x+y$ 不是偶数，则 x 与 y 不都是偶数

D. 若 $x+y$ 不是偶数，则 x 与 y 都不是偶数

4. 已知集合 $A=\{1,3,\sqrt{m}\}$，$B=\{1,m\}$，$A\cup B=A$，则 $m=$（　　）

A. 0 或 $\sqrt{3}$　　B. 0 或 3　　C. 1 或 $\sqrt{3}$　　D. 1 或 3

5. 已知 $c>0$. 设 P：函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减；Q：不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}$，若"P 或 Q"是真命题，"P 且 Q"是假命题，则 c 的取值范围是（　　）

A. $(\frac{1}{2},+\infty)$　　B. $[1,+\infty)$

C. $(0,\frac{1}{2}]$　　D. $(0,\frac{1}{2}]\cup[1,+\infty)$

6. 已知命题"若函数 $f(x)=e^x-mx$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，则 $m\leqslant1$"，则下列结论正确的是（　　）

A. 否命题"若函数 $f(x)=e^x-mx$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，则 $m>1$"是真命题

B. 逆命题"若 $m\leqslant1$，则函数 $f(x)=e^x-mx$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数"是假命题

C. 逆否命题"若 $m>1$，则函数 $f(x)=e^x-mx$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数"是真命题

D. 逆否命题"若 $m>1$，则函数 $f(x)=e^x-mx$ 在 $(0,+\infty)$ 上不是增函数"是真命题

7. 下列命题：

①"全等三角形的面积相等"的逆命题；

②"若 $ab=0$，则 $a=0$"的否命题；

③"正三角形的三个角均为 60°"的逆否命题.

其中真命题的序号是________(把所有真命题的序号填在横线上).

8. 已知 $M=\{(x,y)|\frac{y-3}{x-2}=a+1\}$，$N=\{(x,y)|(a^2-1)x+(a-1)y=15\}$，若 $M\cap N=\varnothing$，则 a 的值为________.

9. 设 A 是整数集的一个非空子集，对于 $k\in A$，如果 $k-1\notin A$ 且 $k+1\notin A$，那么 k 是 A 的一个"孤立元"，给定 $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,\}$，由 S 的 3 个元素构成的所有集合中，不含"孤立元"的集合共有________个.

10. 已知集合 $A=\{x|x^2-2x-3\leqslant0\}$，$B=\{x|x^2-2mx+m^2-4\leqslant0,x\in\mathbf{R},m\in\mathbf{R}\}$.

(1)若 $A\cap B=[0,3]$，求实数 m 的值；

(2)若 $A\subseteq C_{\mathbf{R}}B$，求实数 m 的取值范围.

§1.2 充要条件与全称(特称)命题

一、课标要求

1. 了解充分条件,必要条件,会判断充要条件;

2. 了解全称量词与存在量词,掌握全称命题与存在命题的否定形式.

二、知识要点

1. 充分条件与必要条件

(1)如果 $p\Rightarrow q$,则 p 是 q 的________,q 是 p 的________;

(2)如果 $p\Rightarrow q$,$q\Rightarrow p$,则 p 是 q 的________.

充要条件的判断方法:定义法、集合法、逆否命题转换法.

①定义法:

p 是 q 的充分不必要条件 $\Leftrightarrow\begin{cases}p\Rightarrow q\\ p\not\Leftarrow q\end{cases}$;$p$ 是 q 的必要不充分条件 $\Leftrightarrow\begin{cases}p\not\Rightarrow q\\ p\Leftarrow q\end{cases}$;

p 是 q 的充要条件 $\Leftrightarrow\begin{cases}p\Rightarrow q\\ q\Rightarrow p\end{cases}$;$p$ 是 q 的既不充分也不必要条件 $\Leftrightarrow\begin{cases}p\not\Rightarrow q\\ p\not\Leftarrow q\end{cases}$.

②集合法:从集合的观点看:记条件 p、q 对应的集合分别为 P,Q,那么

若________,则 p 是 q 的充分不必要条件,q 是 p 的必要不充分条件.

若________,则 p 是 q 的充要条件(q 也是 p 的充要条件).

若____________,则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

③逆否命题转换法:(常用于否定形式的命题)

$\neg q$ 是 $\neg p$ 的充分不必要条件 $\Leftrightarrow p$ 是 q 的____________;

$\neg q$ 是 $\neg p$ 的必要不充分条件 $\Leftrightarrow p$ 是 q 的____________;

$\neg q$ 是 $\neg p$ 的充要条件 $\Leftrightarrow p$ 是 q 的______________;

$\neg q$ 是 $\neg p$ 的既不充分又不必要条件 $\Leftrightarrow p$ 是 q 的______________;

2. 全称量词与存在量词

(1)常见的全称量词有“任意一个”“一切”“每一个”“任给”“________”等.

(2)常见的存在量词有“存在一个”“________有一个”“有些”“有一个”“某个”“有的”等.

(3)全称量词用符号“________”表示;存在量词用符号“________”表示.

3. 全称命题与特称命题

(1)含有________量词的命题叫全称命题.

(2)含有________量词的命题叫特称命题.

4. 命题的否定

(1)全称命题的否定是________命题;特称命题的否定是________命题.

(2)p 或 q 的否定:非 p 且非 q;p 且 q 的否定:________.

三、典型例题

例1 已知下列各组命题,其中 p 是 q 的充分必要条件的是 ( )

A. p:$m\leqslant-2$ 或 $m\geqslant 6$;q:$y=x^2+mx+m+3$ 有两个不同的零点

B. p:$\dfrac{f(-x)}{f(x)}=1$;q:$y=f(x)$是偶函数

C. p:$\cos\alpha=\cos\beta$;q:$\tan\alpha=\tan\beta$

D. p:$A\cap B=A$;q:$A\subseteq U$,$B\subseteq U$,$C_UB\subseteq C_UA$

例2 已知集合 $M=\{x\mid x<-3$ 或 $x>5\}$,$P=\{x\mid(x-a)\cdot(x-8)\leqslant 0\}$.

(1)求实数 a 的取值范围,使它成为 $M\cap P=\{x\mid 5<x\leqslant 8\}$的充要条件;

(2)求实数 a 的一个值,使它成为 $M\cap P=\{x\mid 5<x\leqslant 8\}$的一个充分但不必要条件.

例3 有四个关于三角函数的命题:

p_1:$\exists x\in R$,$\sin^2\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}$

p_2:$\exists x,y\in R$,$\sin(x-y)=\sin x-\sin y$

p_3:$\forall x\in[0,\pi]$,$\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{2}}=\sin x$

p_4:$\sin x=\cos y\Rightarrow x+y=\dfrac{\pi}{2}$

其中的假命题是 ( )

A. p_1,p_4　　B. p_2,p_4

C. p_1,p_3　　D. p_2,p_3

四、小结与反思

练　习

1. 命题"若 $\alpha=\frac{\pi}{4}$,则 $\tan\alpha=1$"的逆否命题是　(　　)

A. 若 $\alpha\neq\frac{\pi}{4}$,则 $\tan\alpha\neq1$　B. 若 $\alpha=\frac{\pi}{4}$,则 $\tan\alpha\neq1$

C. 若 $\tan\alpha\neq1$,则 $\alpha\neq\frac{\pi}{4}$　D. 若 $\tan\alpha\neq1$,则 $\alpha=\frac{\pi}{4}$

2. 已知集合 $M=\{x|0<x<1\}$,集合 $N=\{x|-2<x<1\}$,那么"$a\in N$"是"$a\in M$"的　(　　)

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

3. 命题"存在一个无理数,它的平方是有理数"的否定是　(　　)

A. 任意一个有理数,它的平方是有理数

B. 任意一个无理数,它的平方不是有理数

C. 存在一个有理数,它的平方是有理数

D. 存在一个无理数,它的平方不是有理数

4. 对于常数 m、n,"$mn>0$"是"方程 $mx^2+ny^2=1$ 的曲线是椭圆"的　(　　)

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　D. 既不充分也不必要条件

5. 设 $M=\{1,2\}$,$N=\{a^2\}$,则"$a=1$"是"$N\subseteq M$"的　(　　)

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　D. 既不充分也不必要条件

6. 已知命题 p:"$\forall x\in[1,2]$,$x^2-a\geqslant0$",命题 q:"$\exists x\in R$,使 $x^2+2ax+2-a=0$",若命题"p 且 q"是真命题,则实数 a 的取值范围是　(　　)

A. $\{a|a\leqslant-2$ 或 $a=1\}$　B. $\{a|a\geqslant1\}$

C. $\{a|a\leqslant-2$ 或 $1\leqslant a\leqslant2\}$　D. $\{a|-2\leqslant a\leqslant1\}$

7. 下列命题:

①若 $ac^2>bc^2$,则 $a>b$;

②若 $\sin\alpha=\sin\beta$,则 $\alpha=\beta$;

③"实数 $a=0$"是"直线 $x-2ay=1$ 和直线 $2x-2ay=1$ 平行"的充要条件;

④若 $f(x)=\log_2 x$,则 $f(|x|)$是偶函数.

其中正确命题的序号是________.

8. 设 $n\in N^*$,一元二次方程 $x^2-4x+n=0$ 有整数根的充要条件是 $n=$________.

9. 若$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$都是非零向量,则$\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{b}$是使$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$成立的向量的"$\rightarrow$"________条件.

10. 已知 p:$|x-3|\leqslant2$,q:$(x-m+1)(x-m-1)\leqslant0$,若$\neg p$是$\neg q$的充分而不必要条件,求实数 m 的取值范围.

第二章 函数与导数

§2.1 函数及其表示

一、课标要求

1. 了解构成函数的要素，会求一些简单函数的定义域和值域，了解映射的概念.

2. 在实际情境中，会根据不同的需要选择恰当的方法(如图象法、列表法、解析法等)表示函数.

3. 了解简单的分段函数，并能简单应用.

二、知识要点

1. 映射的定义

设 A,B 是两个非空的集合，如果按照对应法则 f，对于集合 A 中的任意一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应，那么这样的对应叫做集合 A 到集合 B 的映射，记作 $f:A\to B$。映射允许多对一，一对一，但是不允许一对多，允许集合 B 中的元素在集合 A 中没有元素和它对应.

2. 函数的概念

设 A、B 是非空的数集，如果按照某种确定的对应关系 f，使对于集合 A 中的任意一个 x，在集合 B 中都有唯一的值与它对应，那么称 $f:A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数。记作：$y=f(x)$.

其中 x 叫做自变量，y 叫做函数，自变量 x 的取值范围(数集 A)叫做函数的定义域，与 x 的值对应的 y 值叫做函数值，所有函数值构成的集合 $C=\{y|y=f(x),x\in A\}$ 叫做这个函数的值域.

3. 函数的三要素

函数的三要素是定义域、值域、对应法则，在这三要素中，由于值域可由定义域和对应法则唯一确定，故也可说函数只有两个要素.

4. 两个函数能成为同一函数的条件

当且仅当两个函数的定义域和对应法则完全相同时，这两个函数才是同一函数.

5. 区间的概念和记号设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，我们规定：

(1)满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集合叫做闭区间，表示为$[a,b]$.

(2)满足不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的集合叫做开区间，表示为(a,b).

(3)满足不等式 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 的实数 x 的集合叫做半闭半开区间，分别表示为$[a,b)$和$(a,b]$. 这里的实数 a 和 b 叫做相应区间的端点.

(4)实数 $\mathbf{R}$ 可以用区间表示为$(-\infty,+\infty)$，“∞”读作“无穷大”，“$-\infty$”读作“负无穷大”，“$+\infty$”读作“正无穷大”. 我们可以把满足 $x\geqslant a$ 的实数 x 表示为$[a,+\infty)$.

6. 函数的表示方法

函数的表示方法有三种.

(1)解析法：就是把两个变量的函数关系用代数式来表达，这个等式叫做函数解析表达式，简称解析式.

(2)列表法：就是列出自变量与对应的函数值的表来表达函数关系的方法.

(3)图象法：用图象来表示两个变量间的函数关系.

7. 分段函数

在函数的定义域内，对于自变量的不同取值区间，有着不同的对应法则，则称这个函数为分段函数. 分段函数是一个函数，而不是几个函数. 分段函数书写时，注意格式规范，一般在左边的区间写在上面，右边的区间写在下面，每一段自变量的取值范围的交集为空集，所有段的自变量的取值范围的并集是函数的定义域.

8. 求函数的定义域的主要依据

(1)分式的分母不能等于零；

(2)偶次方根的被开方数必须大于等于零；

(3)对数函数 $y=\log_a x$ 的真数 $x>0$；

(4)指数函数 $y=a^x$ 和对数函数 $y=\log_a x$ 的底数 $a>0$ 且 $a\neq1$；

(5)零次幂 x^0 的底数 $x\neq0$；

(6)函数 $y=\tan x$ 的定义域是$\{x|x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in z\}$；

(7)由实际问题确定函数的定义域，不仅要考虑解析式有意义，还要有实际意义.

9. 注意事项

(1)映射是一种特殊的函数,映射中的集合 A,B 可以是数集,也可以是点集或其他集合,这两个集合有先后顺序. A 到 B 的映射与 B 到 A 的映射是不同的. 而函数是数集到数集的映射,所以函数是特殊的映射,但是映射不一定是函数.

(2)函数的问题,要遵循“定义域优先”的原则。无论是简单的函数,还是复杂的函数,无论是具体的函数,还是抽象的函数,必须优先考虑函数的定义域. 之所以要做到这一点,不仅是为了防止出现错误,有时还会为解题带来方便.

(3)函数的定义域和值域必须用集合表示,也可以用区间表示,但是不能用不等式表示.

(4)判断两个函数是否相等,或者是否是同一函数,关键是看两个函数的定义域与对应法则是否一致.

(5)求函数的解析式的主要方法有以下四种:

①待定系数法:如果知道函数解析式的类型(函数是二次函数、指数函数和对数函数等)时,可以用待定系数法;

②代入法:如果已知原函数 $f(x)$ 的解析式,求复合函数 $f[g(x)]$ 的解析式时,可以用代入法;

③换元法:如果已知复合函数 $f[g(x)]$ 的解析式,求原函数 $f(x)$ 的解析式时,可以用换元法。换元时,注意新“元”的范围;

④解方程组法:如果已知抽象函数的解析式,可以用解方程组的方法。

(6)不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 中,a 可以小于等于 b,也可以大于 b,当 $a>b$ 时,不等式表示的是空集;但是区间 $[a,b]$ 中,一定是 $a<b$,它不可能是空集.

(7)分段函数首先分段处理,最后综合.

三、典型例题

例1 有以下判断:

(1) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$, $g(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant 0\\ -1 & x<0\end{cases}$ 表示同一函数;

(2)函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $x=1$ 的交点最多有1个;

(3) $f(x)=x^2-2x+1$ 与 $g(t)=t^2-2t+1$ 是同一函数;

(4)若 $f(x)=|x-1|-|x|$,则 $f\left(f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)=0$.

其中正确判断的序号是________.

方法提示:可从函数的定义、定义域和值域等方面对所给结论进行逐一分析判断.

例2 (1)已知 $f\left(\dfrac{2}{x}+1\right)=\lg x$,求 $f(x)$;

(2)设 $y=f(x)$ 是二次函数,方程 $f(x)=0$ 有两个相等实根,且 $f'(x)=2x+2$,求 $f(x)$ 的解析式;

(3)定义在 $(-1,1)$ 内的函数 $f(x)$ 满足 $2f(x)-f(-x)=\lg(x+1)$,求函数 $f(x)$ 的解析式.

方法提示:求函数的解析式,要在理解函数概念的基础上,寻求变量之间的关系.

例3 (1)函数 $y=\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$ 的定义域为________.

(2)若函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,2]$,则函数 $g(x)=\dfrac{f(2x)}{x-1}$ 的定义域是　　(　　)

A. $[0,1]$　　B. $[0,1)$

C. $[0,1)\cup(1,4]$　　D. $(0,1)$

方法提示:函数的定义域是使解析式有意义的自变量的取值集合;抽象函数的定义域要注意自变量的取值和各个字母的位置.

四、小结与反思