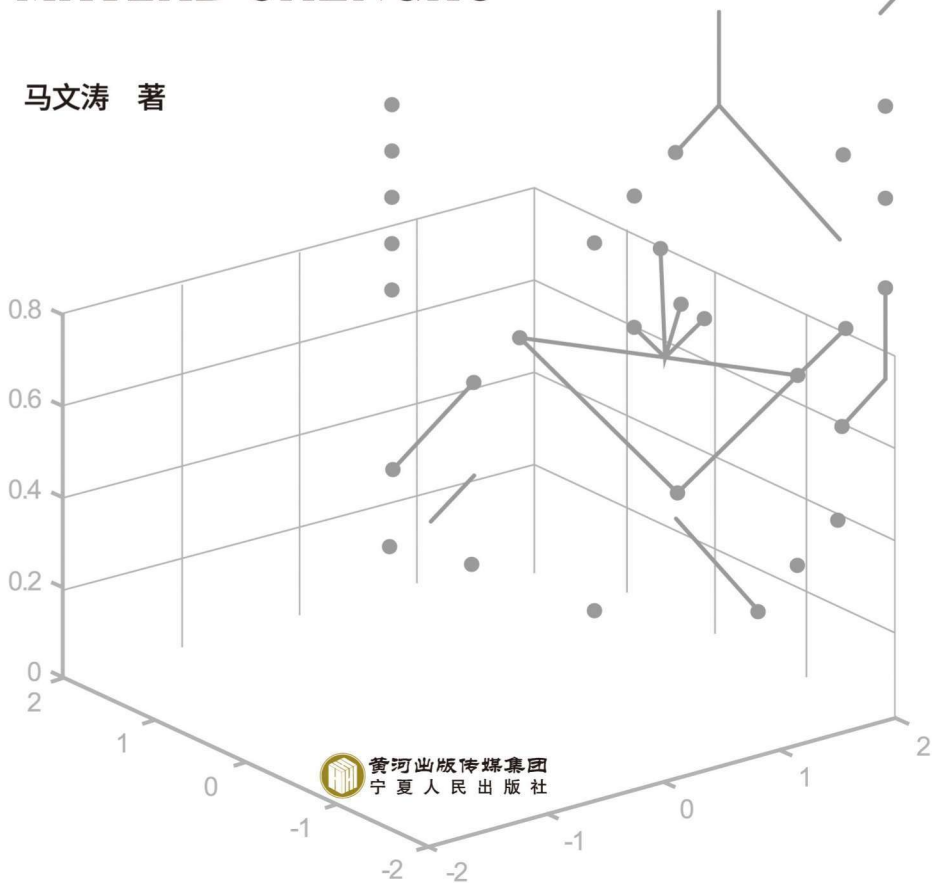


无网格法理论及 MATLAB 程序

WUWANGGEFA LILUN JI
MATLAB CHENGXU

马文涛 著



黄河出版传媒集团
宁夏人民出版社

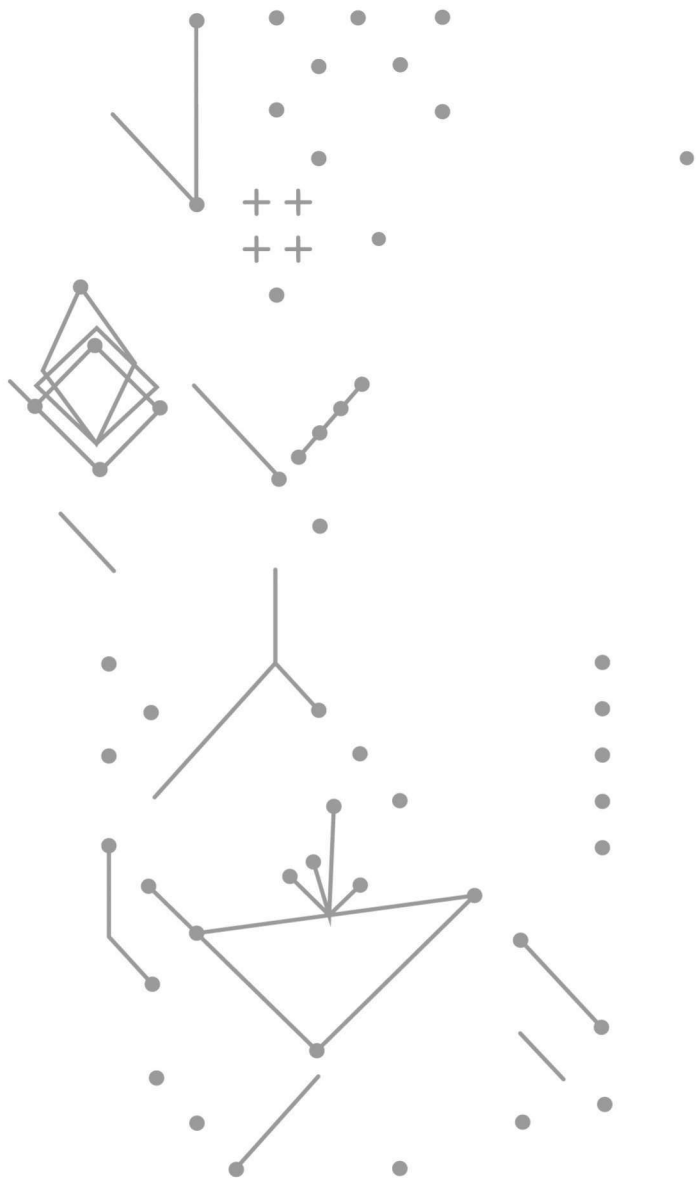
作者简介

马文涛

宁夏大学数学统计学院教授。主持和完成国家自然科学基金两项, 在国内、外学术刊物上发表论文三十余篇。

责任编辑：管世献 赵学佳

封面设计：一卜

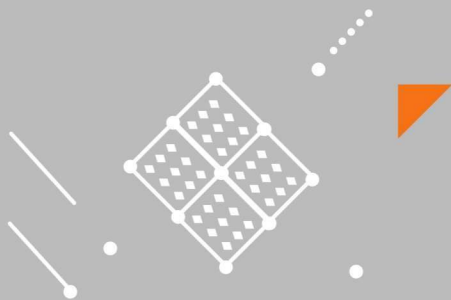


ISBN 978-7-227-07052-8



9 787227 070528 >

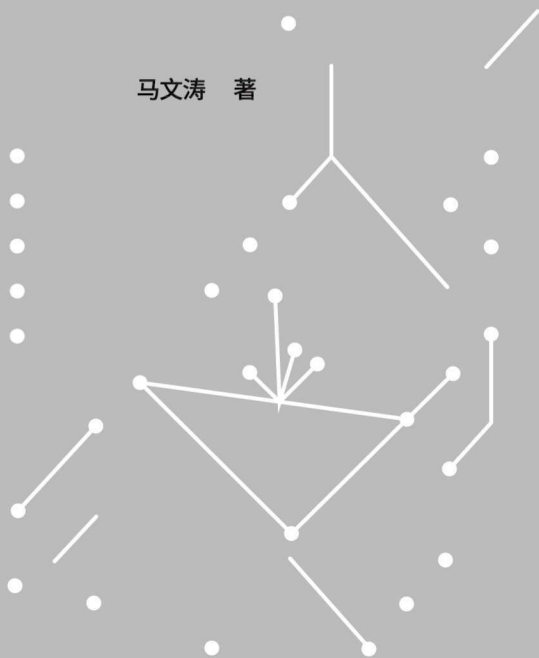
定价 36.00元



无网格法理论及 MATLAB 程序

WUWANGGEFA LILUN JI
MATLAB CHENGXU

马文涛 著



黄河出版传媒集团
宁夏人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

无网张法理论及 MATLAB 程序 / 马文涛著. --银川:
宁夏人民出版社, 2019.6

ISBN 978-227-07052-8

I. ①无… II. ①马… III. ①计算力学 ②Matlab 软件
IV. ①O302 ②TP317

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 129214 号

无网张法理论及 MATLAB 程序

马文涛 著

责任编辑 管世献 赵学佳

责任校对 杨敏媛

封面设计 一卜

责任印制 肖艳



黄河出版传媒集团 出版发行
宁夏人民出版社

出版人 薛文斌

地址 宁夏银川市北京东路 139 号出版大厦 (750001)

网址 <http://www.yrpubm.com>

网上书店 <http://www.hh-book.com>

电子信箱 nxrmcbs@126.com

邮购电话 0951-5052104 5052106

经销 全国新华书店

印刷装订 宁夏银报智能印刷科技有限公司

印刷委托书号 (宁)0013895

开本 720 mm × 980 mm 1/32

印张 7 字数 150 千字

版次 2019 年 6 月第 1 版

印次 2019 年 6 月第 1 次印刷

书号 ISBN 978-7-227-07052-8

定价 36.00 元

版权所有 侵权必究

前 言

跨越呆板的网格，拥抱活泼的粒子，它超凡脱俗！
不落窠臼，追求自由，它承载梦想！
由远及近，由疏到密，它自成秩序！
有它，几多难题，应声而破！
有它，古法新技，流光溢彩！
多少人，因它蜚声海外，志得意满！
又有多少人，因它骨立形销，日夜苦索！
它，既是新的，也是旧的！
它，似曾相识，又影影绰绰！
没有它，这里也许平静如杯中水，泛不起些许涟漪！
没有它，这里也许孤寂如黄土塬，见面面容易拉话话难！
也许，它不过是昙花一现，芬芳吐尽，悄然而逝！
也许，它就是未来！
它，就在你的前方！
它，就是无网格法。

上面五行文字是作者对无网格法的一点肤浅见解，写在前言部分是希望激发科研工作者以及研究生们对无网格法的兴

趣。学习无网格法,不仅要熟悉它的理论,更要深入剖析它所蕴含的思想内涵。

无网格法,顾名思义是不需要网格的,由节点或粒子的关系来建立相应的理论体系。由于脱离了网格的束缚,很多网格类方法解决不了或解决起来难度比较大的问题,比如裂纹扩展、大变形等问题,无网格法都能较好地解决。无网格法在发展的过程中,其思想也深深地影响和改变着其他数值方法,比如扩展有限元法、数值流形法、边界元法等。虽然无网格法已经提出二十多年了,依然有很多问题没有解决,仍然是科学与工程计算领域的热点、难点问题之一。

在国家自然科学基金(批准号:51769026,51269024)和宁夏自然科学基金(批准号:NZ17002)的资助下,作者开展了无网格法理论以及无网格法在井下岩层复合射孔爆燃气体劈裂过程分析和冻融循环下宁夏引黄灌区渠道冻土多物理场耦合机理及衬砌破坏规律研究。本书内容主要源于这些项目资助下的部分研究成果,重点介绍了伽辽金型无网格法的基本原理、工程应用和程序实现。书中给出了大量的数值算例,并在每章中都提供了相应的 MATLAB 程序,便于读者理解无网格法的原理和程序实现,同时也为研究工作者改进算法提供参考。

本书共分 7 章。内容安排如下:

第 1 章简要介绍无网格法的发展历程和研究现状,并进行了粗浅的评价;

第 2 章介绍移动最小二乘近似和径向基点插值等无网格法近似函数的构建;

第 3 章讲述弹性静力学问题的无网格伽辽金法、径向基点

插值无网格法和光滑伽辽金法；

第4章是基于无网格伽辽金法和光滑伽辽金无网格法求解弹性动力学问题；

第5章讲述无网格法在裂纹尖端场以及多裂纹问题中的应用；

第6章讲述裂纹扩展模拟的无网格法；

第7章是无网格法求解摩擦接触问题。

本书可供计算数学、力学、航空航天、机械、土木和水利等相关专业的科研技术人员、教师和研究生参考使用。

本书在编写过程中，得到了宁夏大学数学统计学院冯秀芳教授、葛永斌教授和刘国军教授的热情支持。作者对他们表示衷心的感谢。

本书的出版受到宁夏回族自治区宁夏科学与工程计算与数据分析重点实验室的资金资助，在此表示感谢！

在本书出版之际，作者衷心感谢我的硕士生导师王燕昌教授、博士生导师师俊平教授和李宁教授对我的研究工作的指导和帮助！

感谢我的家人长期以来对我学业和工作的无私支持！

限于作者水平，书中难免有许多不足与不妥之处，敬请批评指正。

马文涛

2019年2月25日

目 录

前言 / 1

1 绪论 / 1

1.1 引言 / 1

1.2 无网格法的研究进展 / 2

1.3 对无网格法的粗浅认识 / 8

2 无网格法的近似函数 / 12

2.1 移动最小二乘(MLS)近似 / 12

2.1.1 MLS 形函数 / 12

2.1.2 权函数与支持域 / 15

2.1.3 MLS 形函数的特点 / 17

2.1.4 MLS 形函数的 MATLAB 程序 / 19

2.2 径向基点插值近似函数 / 27

2.2.1 RPIM 近似函数 / 27

2.2.2 RPIM 形函数的性质 / 29

2.2.3 RPIM 近似函数的 MATLAB 程序 / 30

- 3 弹性静力学问题的无网格法 / 33
 - 3.1 弹性力学的基本方程和边界条件 / 33
 - 3.1.1 弹性力学基本假设 / 34
 - 3.1.2 重要的物理量 / 34
 - 3.1.3 平衡方程 / 39
 - 3.1.4 物理方程(本构方程) / 40
 - 3.1.5 应变能、余能和总位能 / 42
 - 3.2 无网格 Galerkin 法(EFGM) / 43
 - 3.2.1 含拉格朗日乘子的 EFGM 公式 / 44
 - 3.2.2 含罚函数的 EFGM 公式 / 48
 - 3.2.3 积分方案 / 49
 - 3.2.4 EFGM 的计算流程 / 51
 - 3.3 径向基点插值法(RPIM) / 51
 - 3.4 光滑无网格 Galerkin 法 / 53
 - 3.4.1 光滑应变 / 54
 - 3.4.2 系统离散方程 / 55
 - 3.4.3 施加边界条件 / 55
 - 3.4.4 两层嵌套光滑积分网格 / 56
 - 3.4.5 数值算例 / 58
 - 3.5 EFGM 的 MATLAB 程序 / 67
- 4 弹性动力学问题的无网格法 / 77
 - 4.1 改进的 MLS 近似 / 78
 - 4.2 弹性动力学问题的 EFGM / 81

- 4.3 弹性动力学问题的光滑 Galerkin 无网格法 / 82
- 4.4 自由和受迫振动分析 / 83
- 4.5 数值算例 / 84
 - 4.5.1 自由振动分析 / 84
 - 4.5.2 悬臂梁受迫振动分析 / 91
- 4.6 动力学问题中 MATLAB 程序 / 97
 - 4.6.1 子空间迭代法 / 97
 - 4.6.2 Newmark 方法的 MATLAB 程序 / 99

- 5 线弹性断裂力学问题的无网格法 / 101
 - 5.1 线弹性断裂力学 / 102
 - 5.2 EFGM 中求解断裂问题的几种处理技术 / 105
 - 5.2.1 权函数修正法 / 105
 - 5.2.2 内部基函数扩展 / 108
 - 5.2.3 外部 MLS 扩展 / 109
 - 5.2.4 外部单位分解扩展 / 110
 - 5.3 单位分解扩展 RPIM 求解复合应力强度因子 / 113
 - 5.3.1 单位分解法 / 113
 - 5.3.2 单位分解扩展 RPIM (X-RPIM) 的位移模式 / 115
 - 5.3.3 控制方程的弱形式及其离散化 / 118
 - 5.3.4 相互作用积分 (M 积分) / 118
 - 5.3.5 数值算例 / 124
 - 5.3.6 X-RPIM 的 MATLAB 程序 / 130

- 5.4 模拟多裂纹问题的无网格法 / 146
 - 5.4.1 多裂纹问题的内部基扩充无网格法 / 146
 - 5.4.2 多裂纹问题的 XFEM / 148
 - 5.5.3 数值算例 / 151

- 6 裂纹扩展的水平集和无网格耦合法 / 156
 - 6.1 水平集及其更新算法 / 156
 - 6.1.1 水平集描述裂纹 / 156
 - 6.1.2 模拟裂纹扩展的水平集更新算法 / 158
 - 6.2 水平集和无网格耦合方法 / 161
 - 6.2.1 不连续位移模式 / 161
 - 6.2.2 控制方程的弱形式及其离散化 / 162
 - 6.3 裂纹扩展准则及确定新裂纹尖端 / 165
 - 6.3.1 最大周向应力准则 / 165
 - 6.3.2 裂纹扩展步长的确定 / 166
 - 6.3.3 新裂纹尖端坐标的确定 / 167
 - 6.4 数值实验 / 168
 - 6.4.1 应力强度因子的计算 / 168
 - 6.4.2 裂纹扩展模拟 / 171

- 7 接触摩擦问题的扩展无网格法分析 / 181
 - 7.1 扩展无网格法的不连续位移模式 / 181
 - 7.2 基于互补理论的接触问题描述 / 182
 - 7.2.1 接触面方程 / 182

7.2.2	接触问题的虚功方程 / 184
7.3	无网格离散控制方程及线性互补方法 / 186
7.3.1	离散控制方程 / 186
7.3.2	方程求解 / 187
7.4	数值算例 / 188
7.4.1	含贯通节理方板 / 188
7.4.2	边裂纹受压力作用 / 190
7.4.3	受压裂纹应力强度因子 / 192
7.5	Lemke 算法的 MATLAB 实现 / 192
参考文献 / 198	

1 绪 论

1.1 引言

随着计算机技术的飞速发展,数值计算方法呈现出百花齐放、百家争鸣的勃勃生机。从早期出现并不断得到完善的有限差分法、有限单元法、边界元法到近些年来异军突起的离散元法、不连续变形分析法、流形元法、无网格法以及建立在它们基础之上的耦合法,在科学研究和工程应用中扮演着重要的角色,推动着科学工程计算的快速发展。

经过半个多世纪的研究与发展,有限单元法(Finite Element Method, FEM)已经成为工程和科学计算领域的重要组成部分和重要数值计算工具。FEM 不仅可灵活地处理不均匀材料、复杂边界以及动力学等问题,还可以有效地处理复杂的本构模型和不连续问题。目前,国内外发行了许多 FEM 商业软件,如 ABAQUS、ANSYS、MARC、ADINA 等,为该方法的普及和应用提供了非常好的计算平台。但随着研究的逐步深入,FEM 的固有缺陷不可避免地暴露出来,如计算精度不高、网格依赖性、网格重构、复杂大型三维网格自动生成、网格闭锁等。FEM 的近似函数基于网格,因此必然难以处理与单元边界不一致的不连续性

和大变形问题。其他一些基于网格的方法,如边界元法、有限差分法等也或多或少会出现上述问题。

为了克服网格类数值方法的固有缺陷,计算力学界自 20 世纪 90 年代掀起了无网格法的研究热潮。无网格法采用人为生成或随机分布的一系列离散节点取代 FEM 等方法中的插值网格,并直接借助离散节点建立场函数,完全或部分消除了网格初始剖分和重构带来的困难,大大简化了前处理工作。由于场函数具有高阶连续可导性,极大地提高了位移、应变和应力的计算精度,无需进行后处理修匀,因此在高速冲击、金属加工成形、动态裂纹扩展、流固耦合和应变局部化等涉及大变形和特大变形的问题中呈现出良好的发展态势,成为继 FEM 之后科学工程计算领域又一十分重要的数值方法。

1.2 无网格法的研究进展

1977 年, Lucy^[1]和 Gingold 等^[2]分别提出光滑质点流体动力学方法 (Smoothed particle hydrodynamics, SPH), 并成功应用于求解天体和流体问题, 成为最早的无网格方法。SPH 的缺点在于对于非均匀分布的节点不满足一致性条件, 对于均匀分布的节点在边界上不满足一致性条件, 从而导致计算精度的下降。再加之当时 FEM 正处于巨大成功的阶段, 该类方法并未受到学术界的关注, 发展相对缓慢。直到 1992 年, Nayroles 等^[3]基于移动最小二乘法 (Moving least square method, MLS), 提出了散射元法 (Diffuse element method, DEM), 才真正拉开了无网格法研究的序幕。DEM 存在计算精度不高, 边界条件不易施加等缺点。1994 年, 美国西北大学的著名学者 Belytschko 等^[4]对 DEM 进行了细

致的改进,提出了著名的无网格伽辽金法(Element free Galerkin method,EFGM),在计算力学界掀起了研究无网格法的热潮。较SPH,EFGM的计算费用较高,但计算精度和稳定性更好。因此,该方法被广泛应用于裂纹扩展分析^[5-11]、板壳分析^[12]、三维撞击和流体晃动分析^[13-14]、相变分析^[15]、节理岩体变形分析^[16]、扩散问题^[17]、拱坝开裂^[18]、边坡开挖^[19]、固结问题^[20]以及弹性地基板^[21]等领域。

1995年,Liu等^[22, 23]利用再生核函数思想和函数积分变换法,基于Galerkin弱形式提出了再生核质点法(Reproducing kernel particle method, RKPM)。该方法中的近似函数由窗函数(Windows function)和傅里叶变换建立。由于窗函数具有平移、缩放等优良特性,非常适合应用于弹性、弹塑性和动力学等问题。之后,Liu等^[24]又借鉴小波函数理论中的多尺度分析技术,提出了多尺度再生核质点法(Multiple scale reproducing kernel particle method, MRKPM)。RKPM及其改进方法在许多问题的分析中得到了很好的应用,如延性断裂、声学分析、动力学分析、中厚度板、金属加工成形等。1995年,Duarte等^[25]利用MLS建立单位分解近似函数,并由此构造形函数和权函数,系统方程由Galerkin弱形式建立,提出了hp云团法(hp-clouds meshless method, hp)。目前,该方法已被应用于求解悬臂梁问题、厚板弯曲以及二维裂纹扩展的自适应分析等问题。1998年Oden等^[26, 27]选取有限元插值函数作为单位分解函数,提出了基于云团法的新型hp有限元(Clouds based on hp FEM, hp-FEM)。Liszka等^[28]采用配点法取代Galerkin法,提出hp无网格云团法(hp meshless clouds method)。