浙大优学
进阶数学

高分之路拾级而上

高考数学
压轴题破解策略

张传鹏◎著

• 30个基本模型阅尽题海经典

• 30个破解策略全解压轴好题

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高考数学压轴题破解策略

张传鹏 著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考数学压轴题破解策略/张传鹏著. —杭州：
浙江大学出版社，2017.1(2017.2 重印)
ISBN 978-7-308-16358-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①张… Ⅲ.①中学数学课—高中—题
解—升学参考资料 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 257966 号

高考数学压轴题破解策略
张传鹏 著

策　　划 陈海权(QQ:1010892859)
责任编辑 夏晓冬
责任校对 金佩雯 陈 宇
封面设计 林智广告
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版 杭州星云光电图文制作有限公司
印　　刷 浙江云广印务有限公司
开　　本 899mm×1194mm 1/16
印　　张 12.5
字　　数 405 千
版 印 次 2017 年 1 月第 1 版 2017 年 2 月第 2 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-16358-3
定　　价 29.80 元

高考数学高手进阶攻略

每年高考结束以后，纵观各地的数学高考试卷，都给我们一种“年年岁岁卷相似，岁岁年年题不同”的感觉。而高考中，最有区分度的就是所谓的压轴题，压轴题是通过高考考查学生能力的主要表现形式，通过对近年高考数学压轴题研究来看，压轴题主要考查考生对高中数学各块知识的运算变形能力、信息整合能力、数学思维方法运用能力及创新思维能力等，这就导致了高考数学压轴题的综合性和探索性很强，考查的知识面很广。

最近常听高三年级学生调侃说：“我已经用了洪荒之力学数学，为什么数学还是学不好?”所谓“洪荒之力”，是在2016年8月8日，里约奥运会女子100米仰泳半决赛，中国选手傅园慧接受采访时说：“我已经用了洪荒之力。”快速走红网络。古人云：“天地玄黄，宇宙洪荒。”传说天地初开之时，曾经有过一次大洪水，几乎毁灭了整个世界。因此，洪荒之力指的是如天地初开之时这种足以毁灭世界的力量。也就是说学生说他已经尽力了，可是数学成绩上还是没有长进。

究其原因，这可能与学生的学习习惯有关。在面对压轴题的时候，许多学生不注重学习过程，不能对题目的条件进行独立、深入的分析，而是看一眼题目发现没有思路后，就直接去问老师或者去翻看答案，然后努力地去把答案看懂，认为只要看懂了就算是掌握了。其实，数学题目只是一个载体，我们在面对没有做到过的题目时，要学会自己去分析题目，学会尝试着去解压轴题；实在做不下去了，再去查看答案的时候，也要找出自己解法的不足之处与错误原因，以免以后再犯同样的错误。

因此，在日常的学习中，要有总结反思意识，一道题目解决之后，对自己可以一问：“此题还有其他解法吗 ?”二问：“此命题的逆命题成立吗?”三问：“此结论能否推广到一般情况?”四问：“此结论能否进行类比推理?”可以看出，解题之后的反思非常重要，利用自己的洪荒之力，去把一道压轴题解出来了固然重要，可是有一种力要大于洪荒之力，那就是回天之力，回天就是扭转乾坤，此处指解题之后的回顾与反思。如果说洪荒之力使天地分开，相当于核裂变，那么回天之力使天地重组，相当于核聚变。核聚变释放的能量比核裂变要大得多。学生通过对压轴题解题之后的回顾与反思，能从根源上认识所解题目，从而学会多角度地思考问题，培养学生的发散思维，改善学生的思维品质。

我所任教学校的学生，整体学习成绩非常优异、综合素质高，这使得许多学生对高考压轴题的研究显得非常有必要，于是在2014年，通过对近年来高考压轴题的梳理，结合自己在高三课堂教学实践，我撰写了《全解高考数学压轴题》一书，受到了广大读者的好评。时至今日，为了使高考数学压轴题的破解更有针对性和时效性，同时也让不同层次的更多学生能从中受益，

应广大读者的要求，我在《全解高考数学压轴题》一书的基础上重新进行修订、完善与细化，于是就有了这本《高考数学压轴题破解策略》一书的面世。我把本书分为30个高考数学压轴题常见模型与30个高考数学压轴题破解策略，合计为数学高手进阶的60个攻略。对于出现频率较高的热点试题进行分类总结，注重数学各知识点间的联系，根据学生思维特点，做到透析考情考向、提升解题技能、拓宽解题思路。并在每个攻略后面设置了“进阶训练”部分练习，供学生举一反三练习，巩固该知识点。

《高考数学压轴题破解策略》力求成为数学高手的进阶攻略，限于能力和水平，书中难免有疏漏不妥之处，恳请广大读者和数学同行批评指正，以便不断修正和完善。我的联系方式是：zhangzcp508@sina.com。

杭州外国语学校
张传鹏

目 录

第一篇 30个基本模型

第二篇　30个破解策略

给我最大快乐的，不是已懂的知识，而是不断的学习；不是已有的东西，而是不断的获取；不是已达到的高度，而是继续不断的攀登。

——高斯

“精巧的论证常常不是一蹴而就的，而是人们长期切磋积累的成果。我也是慢慢学来的，而且还要继续不断的学习。

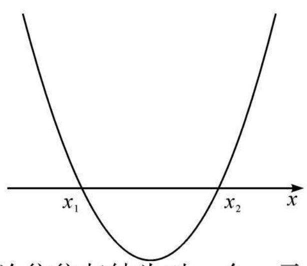
——阿贝尔

第一篇 30个基本模型

基本模型1 涉及函数单调性、极值问题

单调性是函数一个重要的性质，函数的极值、最值等问题的解决都离不开函数的单调性，含有字母参数的函数的单调性又是综合考查不等式的解法、分类讨论的良好素材，所以函数单调性的讨论是高考考查导数、研究函数问题的最重要的考查点.

破题攻略



三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a>0)$，求导得 $f'(x)=3ax^2+2bx+c(a>0)$，导函数的判别式化简为：$\Delta=4b^2-12ac=4(b^2-3ac)$.

所以函数单调性的讨论往往归结为对一个一元二次不等式的讨论，在二次项系数的符号确定后就是根据其对应的一元二次方程是否有根进行讨论，有根时再对两个实根的大小进行讨论，即分类讨论的标准是先讨论二次项系数，再讨论判别式 Δ，在 $\Delta>0$ 时，再讨论根的大小.

(1) 若 $b^2-3ac\leqslant 0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为增函数；$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上无极值；

(2) 若 $b^2-3ac>0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 上为增函数，$f(x)$ 在 (x_1,x_2) 上为减函数，其中 $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$，$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有两个极值，且 $f(x)$ 在 $x=x_1$ 处取得极大值，在 $x=x_2$ 处取得极小值.

由此可知，破解函数单调性、极值问题的两个有力工具就是数形结合和分类讨论思想.

例题讲解

例 1 设 $a<1$，集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x>0\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}\mid 2x^2-3(1+a)x+6a>0\}$，$D=A\cap B$.

(Ⅰ)求集合 D(用区间表示)；

(Ⅱ)求函数 $f(x)=2x^3-3(1+a)x^2+6ax$ 在集合 D 内的极值点.

解：(Ⅰ)对于方程 $2x^2-3(1+a)x+6a=0$，判别式 $\Delta=9(1+a)^2-48a=3(a-3)(3a-1)$.

因为 $a<1$，所以 $a-3<0$.

① 当 $\frac{1}{3}<a<1$ 时，$\Delta<0$，此时 $B=\mathbf{R}$，所以 $D=A$；

② 当 $a=\frac{1}{3}$ 时，$\Delta=0$，此时 $B=\{x\mid x\neq 1\}$，所以 $D=(0,1)\cup(1,+\infty)$；

③ 当 $a<\frac{1}{3}$ 时，$\Delta>0$，设方程 $2x^2-3(1+a)x+6a=0$ 的两根分别为 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，

则 $x_1=\dfrac{3(1+a)-\sqrt{3(a-3)(3a-1)}}{4}$，

$x_2=\dfrac{3(1+a)+\sqrt{3(a-3)(3a-1)}}{4}$，

$B=\{x\mid x<x_1 \text{ 或 } x>x_2\}$；

(i) 当 $0<a<\frac{1}{3}$ 时，$x_1+x_2=\frac{3}{2}(1+a)>0$，$x_1x_2=3a>0$，所以 $x_1>0$，$x_2>0$.

此时，$D=(0,x_1)\cup(x_2,+\infty)$

$$=\left(0,\frac{3(1+a)-\sqrt{3(a-3)(3a-1)}}{4}\right)\cup\left(\frac{3(1+a)+\sqrt{3(a-3)(3a-1)}}{4},+\infty\right)；$$

(ii) 当 $a\leqslant 0$ 时，$x_1x_2=3a\leqslant 0$，所以 $x_1\leqslant 0$，$x_2>0$.

此时，$D=(x_2,+\infty)$

$$=\left(\frac{3(1+a)+\sqrt{3(a-3)(3a-1)}}{4},+\infty\right).$$

(Ⅱ) $f'(x)=6x^2-6(1+a)x+6a$

$=6(x-1)(x-a)$，$a<1$，

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[a,1]$ 上为减函数，在区间 $(-\infty,a]$ 和 $[1,+\infty)$ 上为增函数.

①当 $\frac{1}{3}<a<1$ 时，因为 $D=A$，所以函数 $f(x)$ 的极值点为 1 与 a；

②当 $a=\frac{1}{3}$ 时，$D=(0,1)\cup(1,+\infty)$，所以 $f(x)$ 在 D 内有极大值点 $a=\frac{1}{3}$；

③当 $0<a<\frac{1}{3}$ 时，

$$D=\left(0,\frac{3(1+a)-\sqrt{3(a-3)(3a-1)}}{4}\right)\cup\left(\frac{3(1+a)+\sqrt{3(a-3)(3a-1)}}{4},+\infty\right),$$

由 $0<a<\frac{1}{3}$，用作差法，或者用分析法很容易得到：

$$a<\frac{3(1+a)-\sqrt{3(a-3)(3a-1)}}{4}<1<\frac{3(1+a)+\sqrt{3(a-3)(3a-1)}}{4},$$

所以，$f(x)$ 在 D 内有极大值点 a；

④当 $a\leqslant 0$ 时，

$$D=\left(\frac{3(1+a)+\sqrt{3(a-3)(3a-1)}}{4},+\infty\right),$$

由 $a\leqslant 0$，很容易得到

$$\frac{3(1+a)+\sqrt{3(a-3)(3a-1)}}{4}>1,$$

此时，$f(x)$ 在 D 内没有极值点.

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 无极值点，当 $0<a\leqslant\frac{1}{3}$ 时，函数 $f(x)$ 的极值点为 a，当 $\frac{1}{3}<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 的极值点为 1 与 a.

【评注】本题是一个综合性问题，考查集合与导数的相关知识，以及学生综合解决问题的能力，难度较大. 第 2 小题求函数 $f(x)=2x^3-3(1+a)x^2+6ax$ 在集合 D 内的极值点，首先要确定集合 D，根据 a 的范围，确定极值点 a 和 1 是否在集合 D 中，分类讨论. 本题可以从极值点入手，讨论若 $x=1$ 与 $x=a$ 是函数 $f(x)$ 极值点时，求实数 a 的范围，可使问题得到简化. 解法如下：

☞**解法 2：**(Ⅱ) $f'(x)=6x^2-6(1+a)x+6a=6(x-1)(x-a)$，$a<1$，

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[a,1]$ 上为减函数，在区间 $(-\infty,a)$ 和 $(1,+\infty)$ 上为增函数.

①$x=1$ 是极值点 $\Leftrightarrow 1\in B\Leftrightarrow\frac{1}{3}<a<1$；

②$x=a$ 是极值点 $\Leftrightarrow a\in A$，$a\in B\Leftrightarrow 0<a<1$，

得 $a\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 无极值点，$0<a\leqslant\frac{1}{3}$ 时，函数 $f(x)$ 极值点为 a；$\frac{1}{3}<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 的极值点为 1 与 a.

进阶训练

1. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}ax^3+bx^2+x+3$，其中 $a\neq 0$.

(Ⅰ)当 a，b 满足什么条件时，$f(x)$ 取得极值？

(Ⅱ)已知 $a>0$，且 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上单调递增，试用 a 表示出 b 的取值范围.

2. 已知 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=x^3-3x^2+3ax-3a+3$.

(Ⅰ)求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(Ⅱ)当 $x\in[0,2]$ 时，求 $|f(x)|$ 的最大值.

3. 设函数 $f(x)=a\cos 2x+(a-1)(\cos x+1)$，其中 $a>0$，记 $|f(x)|$ 的最大值为 A.

(Ⅰ)求 $f'(x)$；

(Ⅱ)求 A 的值；

(Ⅲ)求证：$|f'(x)|\leqslant 2A$.

基本模型2　高次函数中的切线问题

三次函数的切线蕴含着许多美妙的性质，用导数方法探求切线的性质，为分析问题和解决问题提供了新的视角和方法，不仅方便实用，而且三次函数的切线性质变得十分明朗．历年高考试题中，有关三次函数的切线问题频频出现．

破题攻略

要解决此类问题，必须要理解导数 $y'=f'(x_0)$ 的几何意义是曲线 $y=f(x)$ 以 $P(x_0,f(x_0))$ 为切点所作切线的斜率．在解题时要区分好：是"在"三次函数图象上一点的切线问题，还是"过"三次函数图象上一点的切线问题．

设点 P 为三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq0)$ 图象上任一点，则过点 P 一定有直线与 $y=f(x)$ 的图象相切．若点 P 为三次函数图象的对称中心，则过点 P 有且只有一条切线；若点 P 不是三次函数图象的对称中心，则过点 P 有两条不同的切线．

例题讲解

例1　已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$，设 $f(x)$ 在 $x_1,x_2(x_1<x_2)$ 处取得极值，记点 $M(x_1,f(x_1))$，$N(x_2,f(x_2))$，$P(m,f(m))$，$x_1<m<x_2$，若对任意的 $m\in(t,x_2)$，线段 MP 与曲线 $f(x)$ 均有异于 M,P 的公共点，试确定 t 的最小值，并证明你的结论．

解法1：$f'(x)=x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$，得到函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(3,+\infty)$，单调递减区间为 $(-1,3)$，所以 $M\left(-1,\frac{5}{3}\right)$，$N(3,-9)$，$P\left(m,\frac{m^3}{3}-m^2-3m\right)$，

直线 MP 的方程为 $y=\frac{m^2-4m-5}{3}x+\frac{m^2-4m}{3}$，

由 $\begin{cases}y=\frac{m^2-4m-5}{3}x+\frac{m^2-4m}{3},\\ y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\end{cases}$

得 $x^3-3x^2-(m^2-4m+4)x-m^2+4m=0$．

线段 MP 与曲线 $f(x)$ 均有异于 M,P 的公共点，等价于上述方程在 $(-1,m)$ 上有根，

即函数 $g(x)=x^3-3x^2-(m^2-4m+4)x-m^2+4m$ 在 $(-1,m)$ 上有零点．

因为 $g(x)$ 为三次函数，所以 $g(x)$ 至多有三个零点和两个极值点．

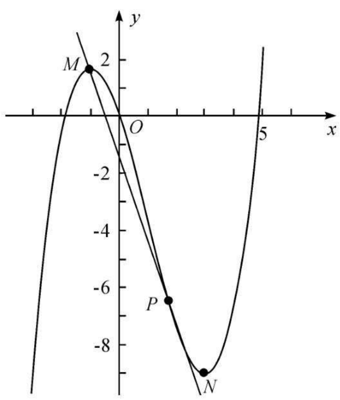
又 $g(-1)=g(m)=0$，因此 $g(x)$ 在 $(-1,m)$ 上有零点等价于 $g(x)$ 在 $(-1,m)$ 上恰有一个极大值点和一个极小值点，即 $g'(x)=3x^2-6x-m^2+4m-4=0$ 在 $(-1,m)$ 上有两个不相等的实数根，等价于 $\begin{cases}\Delta=36+12(m^2-4m+4)>0,\\ g'(-1)=3(-1)^2+6-(m^2-4m+4)>0,\\ g'(m)=3m^2-6m-(m^2-4m+4)>0,\\ m>1,\end{cases}$

解得 $2<m<5$．

又因为 $-1<m<3$，所以 m 的取值范围为 $(2,3)$，从而满足题设条件的 t 的最小值为2．

解法2：$f'(x)=x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$，得到函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(3,+\infty)$，单调递减区间为 $(-1,3)$，所以 $M\left(-1,\frac{5}{3}\right)$，$N(3,-9)$，$P\left(m,\frac{m^3}{3}-m^2-3m\right)$，

若对任意的 $m\in(t,x_2)$，线段 MP 与曲线 $f(x)$ 均有异于 M,P 的公共点，由下图知，当线段 MP 与曲线 $f(x)$ 相切时，t 取到最小值，



即有 $k_{MP}=f'(m)$，即 $\dfrac{f(m)-\frac{5}{3}}{m+1}=m^2-2m-3$，

解得 $m=2$，

从而满足题设条件的 t 的最小值为 2.

【评注】本题给出了两种解法，解法 1 通过分析把问题转化为方程 $3x^2-6x-m^2+4m-4=0$ 在 $(-1,m)$ 上有两个不相等的实数根时求实数 m 的取值范围，这样做思路好找，但是计算量大．解法 2 则巧妙地利用了函数图象，通过分析知道当线段 MP 与曲线 $f(x)$ 相切时，t 取到最小值．这样做，问题变得简单明了，且计算量小，学生容易理解．

进阶训练

1．已知函数 $f(x)=x^3-x$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(t,f(t))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）设 $a>0$，如果过点 (a,b) 可作曲线 $y=f(x)$ 的三条切线，求证：$-a<b<f(a)$.

2．设函数 $f(x)=ax^3+bx$（a,b 为实数）.

（Ⅰ）设 $a\neq 0$，当 $a+b=0$ 时，求过点 $P(-1,0)$ 且与曲线 $y=f(x)$ 相切的直线方程；

（Ⅱ）设 $b>0$，当 $a\leqslant 0$，且 $x\in[0,1]$ 时，有 $f(x)\in[0,1]$，求 b 的最大值.

3．已知函数 $f(x)=x^3+ax+b$，$a,b\in\mathbf{R}$ 的图象记为曲线 E．定义函数 $h(x)=f(x)+f'(x)$.

（Ⅰ）过点 $A\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{3}{8}\right)$ 作曲线 E 的切线，这样的切线有且仅有两条，

（ⅰ）求 $a+2b$ 的值；

（ⅱ）若点 A 在曲线 E 上，对任意的 $x\in[0,1]$，

求证：$f(x)+|a+3b+1|+\dfrac{1}{2}\geqslant 0$.

（Ⅱ）若 $e^x\geqslant f(x)-x^3$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求 ab 的最大值.

基本模型3　高次函数与不等式综合问题

高次函数与不等式综合的题目在高考中经常出现,比如在指定区间上不等式恒成立或者存在特定自变量使得不等式成立,求参数取值范围等,也有直接证明不等式成立.这种题目一般综合性强,可考查函数、数列、不等式及导数等诸多方面的知识,同时可培养学生分析问题、解决问题、综合驾驭知识的能力.

破题攻略

若 $f(x)\geqslant 0$ 对于任意 $x\in[a,b]$ 恒成立,等价于在 $x\in[a,b]$ 上,$f(x)_{\min}\geqslant 0$;若是存在对 $x\in[a,b]$,有 $f(x)\geqslant 0$ 成立,等价于在 $x\in[a,b]$ 上,$f(x)_{\max}\geqslant 0$;许多不等式证明等问题也一般都是利用函数最值法来解决.除此以外,分离参数、更改主元、数形结合等解题方法也是破解此类问题的有力工具.

例题讲解

例1　已知函数 $f(x)=x^2-ax$,$g(x)=\ln x$.

(Ⅰ)若 $f(x)\geqslant g(x)$ 对于定义域内的任意 x 恒成立,求实数 a 的取值范围;

(Ⅱ)设 $h(x)=f(x)+g(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2,且 $x_1\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$,求证:$h(x_1)-h(x_2)>\dfrac{3}{4}-\ln 2$;

(Ⅲ)设 $r(x)=f(x)+g\left(\dfrac{1+ax}{2}\right)$ 对于任意的 $a\in(1,2)$,总存在 $x_0\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$,使不等式 $r(x_0)>k(1-a^2)$ 恒成立,求实数 k 的取值范围.

解:(Ⅰ)$\because f(x)\geqslant g(x)$,$\therefore a\leqslant x-\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$,设 $\varphi(x)=x-\dfrac{\ln x}{x}$,则 $\varphi'(x)=\dfrac{x^2+\ln x-1}{x^2}$.

当 $x\in(0,1)$ 时,$\varphi'(x)<0$,当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$\varphi'(x)>0$,

$\therefore \varphi(x)\geqslant\varphi(1)=1$,$\therefore a\in(-\infty,1]$.

(Ⅱ)$\because h(x)=x^2-ax+\ln x$,

$\therefore h'(x)=\dfrac{2x^2-ax+1}{x}(x>0)$,$\therefore x_1x_2=\dfrac{1}{2}$.

$\because x_1\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$,

$\therefore x_2\in(1,+\infty)$.且 $ax_i=2x_i^2+1(i=1,2)$.

$\therefore h(x_1)-h(x_2)$

$=(x_1^2-ax_1+\ln x_1)-(x_2^2-ax_2+\ln x_2)$

$=(-x_1^2-1+\ln x_1)-(-x_2^2-1+\ln x_2)$

$=x_2^2-x_1^2+\ln\dfrac{x_1}{x_2}$

$=x_2^2-\dfrac{1}{4x_2^2}-\ln 2x_2^2(x_2>1)$.

设 $\mu(x)=x^2-\dfrac{1}{4x^2}-\ln 2x^2(x\geqslant 1)$,则 $\mu'(x)=\dfrac{(2x^2-1)^2}{2x^3}\geqslant 0$,

$\therefore \mu(x)>\mu(1)=\dfrac{3}{4}-\ln 2$,

即 $h(x_1)-h(x_2)>\dfrac{3}{4}-\ln 2$.

(Ⅲ)$r'(x)=\dfrac{a}{1+ax}+2x-a=\dfrac{2ax\left(x-\dfrac{a^2-2}{2a}\right)}{1+ax}$,

$\dfrac{a^2-2}{2a}=\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{a}\leqslant\dfrac{2}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore r(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上为增函数.$\because x_0\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$,

$\therefore r(x_0)_{\max}=r(1)=1-a+\ln\dfrac{1+a}{2}$,

$\therefore 1-a+\ln\dfrac{1+a}{2}>k(1-a^2)$.

设 $\varphi(a)=1-a+\ln\dfrac{1+a}{2}-k(1-a^2)$,$a\in(1,2)$,$\varphi(1)=0$,

则需 $\varphi(a)>0$ 在 $a\in(1,2)$ 上恒成立.

$\because \varphi'(a)=\dfrac{a}{1+a}(2ka-1+2k)$,

(1)若 $k=0$,$\varphi'(a)=-\dfrac{a}{1+a}$,$\varphi(a)$ 在 $a\in(1,2)$

上递减,此时 $\varphi(a)<\varphi(1)=0$,不符合.

(2)若 $k<0$, $\varphi'(a)=\dfrac{2ka}{1+a}\left(a-\dfrac{1}{2k}+1\right)$, $\varphi(a)$ 在 $a\in(1,2)$ 上递减,此时 $\varphi(a)<\varphi(1)=0$,不符合.

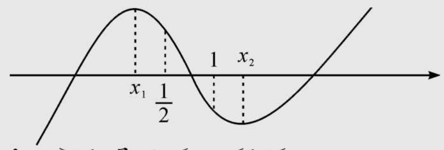
(3)若 $k>0$, $\varphi'(a)=\dfrac{2ka}{1+a}\left(a-\dfrac{1}{2k}+1\right)$,若 $\dfrac{1}{2k}-1>1$,则 $\varphi(a)$ 在区间 $\left(1,\min\left\{2,\dfrac{1}{2k}-1\right\}\right)$ 上递减,此时 $\varphi(a)<\varphi(1)=0$,不符合.

则需 $\begin{cases}k>0,\\ \dfrac{1}{2k}-1\leqslant 1,\end{cases}\Rightarrow k\geqslant\dfrac{1}{4}$,即实数 k 的取值范围为 $\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right)$.

【评注】第(Ⅰ)小题中 $f(x)\geqslant g(x)$ 对于定义域内的任意 x 恒成立,许多学生令 $h(x)=f(x)-g(x)$,通过对函数 $h(x)$ 求导,求出函数的最小值为 $h\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2+8}}{4}\right)$,由题意知只需要 $h\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2+8}}{4}\right)\geqslant 0$ 即可.但是这个不等式不好解,所以第(Ⅰ)小题还是用分离常变量法比较好.而第(Ⅲ)小题中,要得到 $1-a+\ln\dfrac{1+a}{2}>k(1-a^2)$ 在 $a\in(1,2)$ 上恒成立,若采用分离常变量的方法,需要 $k>\dfrac{1-a+\ln\frac{1+a}{2}}{1-a^2}$,通过多次求导后,需要用到洛必达法则才能求出其范围,大多数学生就做不下去了.本解法中则使用了直接构造辅助函数 $\varphi(a)=1-a+\ln\dfrac{1+a}{2}-k(1-a^2)$,让函数 $\varphi(a)$ 的最小值恒大于0.直接求函数最值法和分离变量这两种方法,在解题时要恰当选择,从而使问题得到简化.

第(Ⅱ)小题中,巧妙地利用了 $ax=2x^2+1$ 这个条件,把 $h(x_1)-h(x_2)$ 表达式只用 x_2 这一个量来表示,问题转化为求函数在 $[1,+\infty)$ 上最小值的问题.第(Ⅱ)小题也可以用下面的方法解决.

☞**解**: $h(x)=x^2-ax+\ln x$, $h'(x)=\dfrac{2x^2-ax+1}{x}$, $\because x_1\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$,且 $x_1x_2=\dfrac{1}{2}$,



$\therefore x_2>1$,即 $0<x_1<1<x_2$,

$\therefore 0<x_1<\dfrac{1}{2}<1<x_2$.

$\because h'(1)<0$, $\therefore a>3$.

$h(x_1)-h(x_2)>h\left(\dfrac{1}{2}\right)-h(1)=\dfrac{a}{2}-\dfrac{3}{4}-\ln 2$.

$\because a>3$, $\therefore h(x_1)-h(x_2)>\dfrac{3}{4}-\ln 2$.

进阶训练

1. 设 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}ax^2+(a-1)x(a\in\mathbf{R})$.

(Ⅰ)若 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点,求 a 的取值范围;

(Ⅱ)若在 $x\in[1,3]$ 上至少存在一个 x_0,使 $f(x_0)\geqslant 2$ 成立,求 a 的取值范围.

2. 已知函数 $f(x)=ax^3-\dfrac{3}{2}x^2+1(x\in\mathbf{R})$,其中 $a>0$.

(Ⅰ)若 $a=1$,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程;

(Ⅱ)若在区间 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ 上, $f(x)>0$ 恒成立,求 a 的取值范围.

3. 已知函数 $f(x)=x^4+ax^3+2x^2+b(x\in\mathbf{R})$,其中 $a,b\in\mathbf{R}$.

(Ⅰ)当 $a=-\dfrac{10}{3}$ 时,讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(Ⅱ)若函数 $f(x)$ 仅在 $x=0$ 处有极值,求 a 的取值范围;

(Ⅲ)若对于任意的 $a\in[-2,2]$,不等式 $f(x)\leqslant 1$ 在 $[-1,1]$ 上恒成立,求 b 的取值范围.

基本模型4　有关高次函数综合问题

有关高次函数综合问题，在各地高考试卷中屡见不鲜，这类问题主要涉及三次及以上函数、分式函数、三角函数或者指对函数与数列、绝对值、不等式、线性规划等知识的综合，此类问题综合性强，是各地高考压轴题中最常见的题型.

破题攻略

有关高次函数综合问题，主要考查单调性概念、导数运算及应用、含参不等式恒成立等问题，此类问题破解的最常用方法就是函数最值法. 这类问题往往综合考查线性规划、解二次不等式、二次函数、绝对值、化归及数形结合的思想，考查用分类讨论思想进行探索分析和解决问题的综合能力.

例题讲解

例1　设函数 $f(x)=(x-a)^2\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(Ⅰ)若 $x=\mathrm{e}$ 为 $y=f(x)$ 的极值点，求实数 a；

(Ⅱ)求实数 a 的取值范围，使得对任意 $x\in(0,3\mathrm{e}]$ 恒有 $f(x)\leqslant 4\mathrm{e}^2$ 成立.(注：e为自然对数的底数)

解法1：(Ⅰ)求导得 $f'(x)=2(x-a)\ln x+\dfrac{(x-a)^2}{x}=(x-a)\left(2\ln x+1-\dfrac{a}{x}\right)$.

因为 $x=\mathrm{e}$ 是 $f(x)$ 的极值点，所以 $f'(\mathrm{e})=(\mathrm{e}-a)\left(3-\dfrac{a}{\mathrm{e}}\right)=0$，解得 $a=\mathrm{e}$ 或 $a=3\mathrm{e}$，

经检验，符合题意，所以 $a=\mathrm{e}$ 或 $a=3\mathrm{e}$.

(Ⅱ)(1)当 $0<x\leqslant 1$ 时，对于任意的实数 a，恒有 $f(x)\leqslant 0<4\mathrm{e}^2$ 成立；

(2)当 $1<x\leqslant 3\mathrm{e}$ 时，由题意，首先有 $f(3\mathrm{e})=(3\mathrm{e}-a)^2\ln(3\mathrm{e})\leqslant 4\mathrm{e}^2$，

解得 $3\mathrm{e}-\dfrac{2\mathrm{e}}{\sqrt{\ln(3\mathrm{e})}}\leqslant a\leqslant 3\mathrm{e}+\dfrac{2\mathrm{e}}{\sqrt{\ln(3\mathrm{e})}}$，

由(Ⅰ)知 $f'(x)=(x-a)\left(2\ln x+1-\dfrac{a}{x}\right)$，

令 $h(x)=2\ln x+1-\dfrac{a}{x}$，则 $h(1)=1-a<0$，$h(a)=2\ln a>0$，

且 $h(3\mathrm{e})=2\ln(3\mathrm{e})+1-\dfrac{a}{3\mathrm{e}}\geqslant 2\ln(3\mathrm{e})+1-\dfrac{3\mathrm{e}+\dfrac{2\mathrm{e}}{\sqrt{\ln(3\mathrm{e})}}}{3\mathrm{e}}=2\left(\ln 3\mathrm{e}-\dfrac{1}{\sqrt{\ln 3\mathrm{e}}}\right)>0$.

又 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点，

记此零点为 x_0，则 $1<x_0<3\mathrm{e}$，$1<x_0<a$.

从而当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(x_0,a)$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

即 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 (x_0,a) 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增.

所以要使 $f(x)\leqslant 4\mathrm{e}^2$ 对 $x\in(1,3\mathrm{e}]$ 恒成立，只要
$$\begin{cases}f(x_0)=(x_0-a)^2\ln x_0\leqslant 4\mathrm{e}^2 & ①,\\ f(3\mathrm{e})=(3\mathrm{e}-a)^2\ln(3\mathrm{e})\leqslant 4\mathrm{e}^2 & ②\end{cases}$$成立.

由 $h(x_0)=2\ln x_0+1-\dfrac{a}{x_0}=0$ 可知

$a=2x_0\ln x_0+x_0$　③.

将③式代入①式得 $4x_0^2\ln^3 x_0\leqslant 4\mathrm{e}^2$.

又 $x_0>1$，注意到函数 $x^3\ln^3 x$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，故 $1<x_0\leqslant\mathrm{e}$.

再由③式以及函数 $2x\ln x+x$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，可得 $1<a\leqslant 3\mathrm{e}$.

由②式解得 $3\mathrm{e}-\dfrac{2\mathrm{e}}{\sqrt{\ln(3\mathrm{e})}}\leqslant a\leqslant 3\mathrm{e}+\dfrac{2\mathrm{e}}{\sqrt{\ln(3\mathrm{e})}}$.

所以 $3\mathrm{e}-\dfrac{2\mathrm{e}}{\sqrt{\ln(3\mathrm{e})}}\leqslant a\leqslant 3\mathrm{e}$.

综上，a 的取值范围是 $3\mathrm{e}-\dfrac{2\mathrm{e}}{\sqrt{\ln(3\mathrm{e})}}\leqslant a\leqslant 3\mathrm{e}$.

【评注】本题是2011年浙江高考理科试卷的最后一题，主要考查函数极值的概念、导数应用、不等式等知识，同时考查推理论证能力、分

类讨论等分析问题和解决问题的能力. 对任意的 $x\in(0,3e]$,恒有 $f(x)\leqslant 4e^2$ 成立,只要让 $f(x)_{\max}\leqslant 4e^2$,但是求 $f(x)_{\max}$ 并不容易,首先要根据 $f(3e)=(3e-a)^2\ln(3e)\leqslant 4e^2$,先估计出 $3e-\frac{2e}{\sqrt{\ln(3e)}}\leqslant a\leqslant 3e+\frac{2e}{\sqrt{\ln(3e)}}$,对学生的运算能力要求较高,然后求导得 $f'(x)=(x-a)\left(2\ln x+1-\frac{a}{x}\right)$,

令 $h(x)=2\ln x+1-\frac{a}{x}$,根据 a 的范围,估计出 $h(x)$ 的零点也就是 $f(x)$ 的极值点的范围,从而可以确定函数 $f(x)$ 的草图,利用 $f(x)_{\max}\leqslant 4e^2$,结合函数单调性,经过运算可以求出 $3e-\frac{2e}{\sqrt{\ln(3e)}}\leqslant a\leqslant 3e$. 这种解法思路自然,但是运算较烦琐,学生不容易想到,若采用分离常变量的方法,则会使问题变得简单,解法如下.

☞**解:**(Ⅱ)① 当 $0<x\leqslant 1$ 时,对于任意的实数 a,恒有 $f(x)\leqslant 0<4e^2$ 成立;

② 当 $1<x\leqslant 3e$ 时,有 $\ln x>0$,对任意的 $x\in(1,3e]$,恒有 $(x-a)^2\ln x\leqslant 4e^2$ 成立,即 $(a-x)^2\leqslant\frac{4e^2}{\ln x}\Rightarrow x-\frac{2e}{\sqrt{\ln x}}\leqslant a\leqslant x+\frac{2e}{\sqrt{\ln x}}$ 在 $(1,3e]$ 上恒成立.

所以需要 $\left(x-\frac{2e}{\sqrt{\ln x}}\right)_{\max}\leqslant a\leqslant\left(x+\frac{2e}{\sqrt{\ln x}}\right)_{\min}$.

令 $g(x)=x-\frac{2e}{\sqrt{\ln x}}$,则函数 $g(x)$ 在 $(1,3e]$ 上单调递增,∴$3e-\frac{2e}{\sqrt{1+\ln 3}}\leqslant a$.

记 $h(x)=x+\frac{2e}{\sqrt{\ln x}}$,则 $h'(x)=1-\frac{e}{x\sqrt{\ln^3 x}}$.

所以当 $x\in(1,e)$ 时,$h'(x)=1-\frac{e}{x\sqrt{\ln^3 x}}<0$,$h(x)=x+\frac{2e}{\sqrt{\ln x}}$ 为减函数;当 $x\in(e,3e]$ 时,$h'(x)=1-\frac{e}{x\sqrt{\ln^3 x}}>0$,$h(x)=x+\frac{2e}{\sqrt{\ln x}}$ 为增函数;

当 $x=e$ 时,$h(x)_{\min}=e+\frac{2e}{\sqrt{\ln e}}=3e$,∴$a\leqslant 3e$.

综上,a 的取值范围是 $3e-\frac{2e}{\sqrt{\ln(3e)}}\leqslant a\leqslant 3e$.

进阶训练

1. 已知函数 $f(x)=2x^3+3(1-a)x^2-6ax-3a$,$g(x)=3x^2+kx$.
   (Ⅰ)对任意 $a\geqslant 1$,使得 $f(-1)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,b]$ $(b>-1)$ 上的最大值,试求实数 b 的最大值;
   (Ⅱ)若 $0<a<1$,对于区间 $[-1,0]$ 上的任意两个不相等的实数 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$,都有 $|g(x_1)-g(x_2)|<f(x_1)-f(x_2)$ 成立,求 k 的取值范围.

2. 已知 a,b 是实数,函数 $f(x)=x^3+ax$,$g(x)=x^2+bx$,$f'(x)$ 和 $g'(x)$ 分别是 $f(x)$,$g(x)$ 的导函数,若 $f'(x)g'(x)\geqslant 0$ 在区间 I 上恒成立,则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 I 上的单调性一致.
   (Ⅰ)设 $a>0$,若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[-1,+\infty)$ 上的单调性一致,求实数 b 的取值范围;
   (Ⅱ)设 $a<0$,且 $a\neq b$,若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在以 a,b 为端点的开区间上单调性一致,求 $|a-b|$ 的最大值.

3. 已知 a 是给定的实常数,设函数 $f(x)=(x-a)^2\cdot(x+b)e^x$,$b\in\mathbf{R}$,$x=a$ 是 $f(x)$ 的一个极大值点.
   (Ⅰ)求 b 的取值范围;
   (Ⅱ)设 x_1,x_2,x_3 是 $f(x)$ 的三个极值点,问:是否存在实数 b,可找到 $x_4\in\mathbf{R}$,使得 x_1,x_2,x_3,x_4 的某种排列 $x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3},x_{i_4}$(其中 $\{i_1,i_2,i_3,i_4\}=\{1,2,3,4\}$)依次成等差数列?若存在,求所有的 b 及相应的 x_4;若不存在,说明理由.

基本模型5　圆中的切线问题

切线作为一条特殊直线，一方面和解析几何中的直线方程联系，另一方面又和导数密切相关，同时又有直线与曲线的位置关系的问题.所以切线问题多年来一直是高考命题者比较青睐的一个知识点.

破题攻略

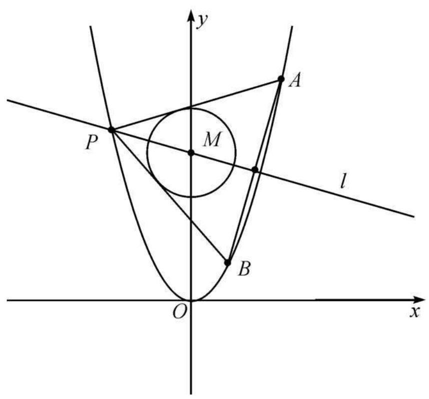
在各地高考试卷中，有关圆的切线问题屡见不鲜，解决此类问题最常用的方法是利用圆的切线的性质：圆心到直线的距离等于半径.过圆 $x^2+y^2=r^2$ 上一点 $M(x_0,y_0)$ 的切线方程为 $xx_0+yy_0=r^2$，这类问题常与抛物线等圆锥曲线结合，综合考查函数与方程、不等式等知识点.

例题讲解

例1　已知抛物线 $C_1:x^2=y$，圆 $C_2:x^2+(y-4)^2=1$ 的圆心为点 M.

（Ⅰ）求点 M 到抛物线 C_1 的准线的距离；

（Ⅱ）已知点 P 是抛物线 C_1 上一点（异于原点），过点 P 作圆 C_2 的两条切线，交抛物线 C_1 于 A,B 两点，若过 M,P 两点的直线 l 垂直于 AB，求直线 l 的方程.



解：（Ⅰ）由题意可知，抛物线的准线方程为 $y=-\frac{1}{4}$，

所以圆心 $(0,4)$ 到抛物线的准线的距离是 $\frac{17}{4}$.

（Ⅱ）设 $P(x_0,x_0^2)$，$A(x_1,x_1^2)$，$B(x_2,x_2^2)$，

由题意得 $x_0\neq\pm1$，$x_1\neq x_2$.

设过点 P 的圆 C_2 的切线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，

即 $y-x_0^2=k(x-x_0)$　①，

则 $\frac{|kx_0+4-x_0^2|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，

即 $(x_0^2-1)k^2+2x_0(4-x_0^2)k+(x_0^2-4)^2-1=0$.

设 PA,PB 的斜率分别为 $k_1,k_2(k_1\neq k_2)$，则 k_1,k_2 是上述方程的两根，

$\therefore k_1+k_2=\frac{2x_0(x_0^2-4)}{x_0^2-1}$，$k_1\cdot k_2=\frac{(x_0^2-4)^2-1}{x_0^2-1}$.

将①式代入 $y=x^2$ 得 $x^2-kx+kx_0-x_0^2=0$.

由于 x_0 和 x_1,x_2 分别是此方程的根，

故 $x_1=k_1-x_0$，$x_2=k_2-x_0$.

$\therefore k_{AB}=\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1-x_2}=x_1+x_2=k_1+k_2-2x_0$

$=\left[\frac{2x_0(x_0^2-4)}{x_0^2-1}\right]-2x_0$，

$k_{MP}=\frac{x_0^2-4}{x_0}$.

由 $MP\perp AB$ 得 $k_{AB}\cdot k_{MP}=\left[\frac{2x_0(x_0^2-4)}{x_0^2-1}-2x_0\right]\cdot\left(\frac{x_0^2-4}{x_0}\right)=-1$，解得 $x_0^2=\frac{23}{5}$，

即点 P 的坐标为 $\left(\pm\sqrt{\frac{23}{5}},\frac{23}{5}\right)$.

所以直线 l 的方程为 $y=\pm\frac{3\sqrt{115}}{115}x+4$.

【评注】此题是关于圆的切线的问题，解决的方法都是充分利用“圆心到切线的距离等于半径”这条性质.在得到二次方程 $(x_0^2-1)k^2+2x_0(4-x_0^2)k+(x_0^2-4)^2-1=0$ 后，如果设 PA,PB 的斜率分别为 $k_1,k_2(k_1\neq k_2)$，则 k_1,k_2 是上述方程的两根，后面利用韦达定理来解决.由此例可以看出，这类问题解决的方法还是充分利用圆的切线的性质.