更高更妙的高中数学系列

浙大优学

更高更妙的高中数学

GENGGAO GENGMIAO

一题多解与一题多变

蔡小雄 主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

更高更妙的高中数学
一题多解与一题多变

主　编　蔡小雄

副主编　姚文建　江一峰　黄明才

编　委　黄　超　王　伟　吴　忠
杨爱云　孙军波　孙明辉
桂再安　袁丹丹　胡佳丽
江战民　沈　芳　胡振华
陈国伟　周巧慧　方明珠

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

更高更妙的高中数学一题多解与一题多变 / 蔡小雄主编.
—杭州:浙江大学出版社,2016.3
ISBN 978-7-308-15669-1

Ⅰ.①更…　Ⅱ.①蔡…　Ⅲ.①中学数学课—高中—
升学参考资料　Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 054087 号

更高更妙的高中数学一题多解与一题多变
蔡小雄　主编

责任编辑　沈国明
责任校对　陈　宇　金佩雯
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007)
(网址:http://www.zjupress.com)
排　　版　杭州星云光电图文制作有限公司
印　　刷　富阳市育才印刷有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　16.25
字　　数　400 千
版 印 次　2016 年 3 月第 1 版　2016 年 3 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-15669-1
定　　价　32.00 元

玩好题:数学教师的幸福与追求

“问题是数学的心脏”,引领学生探索数学问题是数学教师的基本职责.而“题”是中学阶段“数学问题”的主要形式,因此,“玩好题”是数学教师的责任、追求,也是数学教师的幸福之一.那么,什么是“玩好题”呢?笔者认为,“玩好题”包含三个层面的意思:一是把题玩好,二是玩好的题,三是让题好玩.“玩好题”能使数学教师业务上如虎添翼,课堂上更加得心应手,“玩好题”也能使教师情感丰富,精神专注.罗素曾用以下华丽的语言描绘数学推理的超然性和客观性所带来的魅力:远远离开人的情感,甚至远远离开自然的可怜的事实,世世代代逐渐创造了一个秩序井然的宇宙.纯正的思想在这个宇宙,就好像是住在自己的家园.在这个家园里,至少我们的一种更高尚的冲动,能够逃避现实世界的凄清的流浪.

一、把题玩好:数学教师的责任

数学教学离不开“题”,能把“题”玩好的数学教师才是一位优秀的数学教师.然而,“题”中有乾坤,“题”中有日月,从日常的观察与了解中,我们不难发现,并不是每个数学教师都能“把题玩好”.也正因为有些时候我们教师没有“把题玩好”,数学这一门充满魅力的学科被学生误解,视作是枯燥、乏味、无休止地计算的一门学科.也正因为我们有些教师没有“把题玩好”,有些学生进入高中后,面对千变万化的数学题,只能望“题”兴叹.那么,怎样“把题玩好”呢?笔者觉得,关键在“善选题、好做题、能编题与会品题”这四个环节.

1.众里寻它千百度——善选题

我国南宋时期杰出的数学家杨辉曾说:“夫学算者,题从法取,法将题验,凡欲明一法,必设一题.”在我们日常教学中也是一样,选择一道合适的“题”,能够帮助学生明晰概念、掌握方法.选题一般以教学大纲、教材要求及符合学生实际情况为原则,要有利于学生巩固基础知识,培养分析和解决问题的能力,有利于教师捕捉课堂教学的生发点,并以此为教学突破口,让学生充分参与,体验感受,动态生成.我们都有这样的体会,有时抓住一道典型习题,让学生寻求多种解题途径,促使学生的思维向多方位、多层次发散,这比解答多道题更为有效,正所谓“一题可破万题山”.

当然,“善选题”非一日之功.教师选题时要有“大海捞针”的决心与毅力,所选的题要能“针锋相对”,甚至“一针见血”.也就是说,所选的题不仅要具备直指教学重难点的“针”,最好还要让学生能感受到题中丰富的内涵,从而举一反三,提高分析问题和解决问题的能力.

2.不畏浮云遮望眼——好做题

著名数学家苏步青说:“学习数学要多做习题,边做边思索.先知其然,然后知其所以然.”美国著名数学教育家G.波利亚也说:“解题是一种实践性的技能,就像游泳、滑雪或弹钢琴一样,只能通过模仿和实践学到它……你想学会游泳,你就必须下水,你想成为解题的

能手，你就必须去解题.”解题是一种复杂的思维过程，解题是数学教师的基本功，解题也是数学教师的主要游戏之一. 每年高考一结束，很多教师都会抢着去做高考题，并将解题体会写成文章. 我也乐此不疲. 围绕2013年浙江高考理科试卷中的第6题与第16题写成的解题体会性文章目前已发表. 事实上，还有很多试题值得研究，如同属该卷的第7题：“设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 为单位向量，非零向量 $\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$，$x$，$y\in\mathbf{R}$. 若 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$，则 $\frac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}$ 的最大值等于________.”

该题表述简洁清晰，灵活考查了平面向量的基本定理、平面向量坐标表示、平面向量的数量积、平面向量的几何意义等知识，渗透了多种数学思想方法. 我们可以引导学生从多个视角来解决：

[视角一] 从坐标入手，借助配方法求最值.

设 $\boldsymbol{e}_1=(1,0)$，$\boldsymbol{e}_2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，则 $\boldsymbol{b}=\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}y,\frac{1}{2}y\right)$.

当 $x=0$ 时，$\frac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}=0$.

当 $x\neq0$ 时，$\frac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}=\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2+\sqrt{3}xy}}=\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+\sqrt{3}\left(\frac{y}{x}\right)+1}}$

$$\leqslant\sqrt{\frac{1}{t^2+\sqrt{3}t+1}}\leqslant\sqrt{\frac{1}{\left(t+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}}\leqslant\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4}}}=2.$$

[视角二] 从方程的角度，运用判别式法.

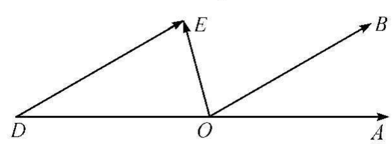
设 $\frac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}=t$，$|\boldsymbol{b}|=|x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2|$，可得 $|\boldsymbol{b}|^2=x^2+y^2+\sqrt{3}xy$，$x^2=t^2(x^2+y^2+\sqrt{3}xy)$.

当 $x\neq0$ 时，$t^2\left(\frac{y}{x}\right)^2+\sqrt{3}t^2\left(\frac{y}{x}\right)+(t^2-1)=0$，

有 $\Delta=(\sqrt{3}t^2)^2-4t^2(t^2-1)\geqslant0$，解得 $t\in[0,2]$.

[视角三] 从“形”的角度入手.

如右图，设 $\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{OE}=\boldsymbol{b}$，则 $\angle ODE=\angle AOB=\frac{\pi}{6}$.



当点 E 在 $\angle AOB$ 内时，显然有 $\frac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}<1$；

当点 E 在 $\angle AOB$ 外时，在 $\triangle ODE$ 中，

由正弦定理知 $\frac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{|OD|}{|OE|}$

$$=\frac{\sin\angle OED}{\sin\angle EDO}=\frac{\sin\angle OED}{\sin\frac{\pi}{6}}=2\sin\angle OED\leqslant2,$$

当且仅当 $\angle OED=\frac{\pi}{2}$ 时，等号成立.

[视角四]从点到直线的距离这一角度入手.

要求$\dfrac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}$最大值,只要求$\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|x|}=\left|\boldsymbol{e}_1+\dfrac{y}{x}\boldsymbol{e}_2\right|$的最小值.构造共起点$O$的两个向量$\boldsymbol{e}_1$,$\dfrac{y}{x}\boldsymbol{e}_2$.设$\boldsymbol{e}_1$的终点为$A$,则$\dfrac{y}{x}\boldsymbol{e}_2$的终点$P$的轨迹为一条经过点$O$的直线,记为$l$.

由题意知,OA与l的夹角为$\dfrac{\pi}{6}$,则A到l的距离为$1\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$,此即为$\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|x|}$的最小值,因此$\dfrac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}$最大值为2.

[视角五] 也可直接求解.

因为$\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$为单位向量且$\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$的夹角为$\dfrac{\pi}{6}$,$\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$,则$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{x^2+y^2+\sqrt{3}xy}$.

当$x\neq0$时,有$\dfrac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}=\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+y^2+\sqrt{3}xy}}=\sqrt{\dfrac{1}{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+\sqrt{3}\left(\dfrac{y}{x}\right)+1}}\leqslant2$.

在日常教学中,只要有心,这样的案例比比皆是,它们都是我们课堂教学的重要素材.用好这些素材,定会给课堂添风采,为教师添魅力!

3.接天莲叶无穷碧——能编题

编题是数学知识在较高层次上的运用,一般来说,会做题的不一定会编题.编题也是教师的基本素质之一.众所周知,每年的高考总是牵动着千家万户的心,高考试题“源于教材,又略高于教材”,因此,从教学的角度来看,这就要求我们不能孤立地、静止地去讲课本上的例题,甚至运用“题海战术”引进大量的课外题让学生盲目、机械地解题,而要学会对课本上的例题、习题做适当的改编.习题的改编有许多途径,如“变换图形位置”,“改变条件和结论”,“增加新条件或改变解题要求”,“重新组合或分解”,“推广或拓展”,也可以“纵横联系,将孤立问题串起来”等.编题也有很多种方法,如推广引申法、逆向思维法、极端原理法、知识重组法等.从教以来,笔者也为各级各类竞赛、统考、会考等编过许多题,多次被引用.如:

(1)“数列$\{a_n\}$满足:$a_1=1$,$a_2=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta$,$a_{n+2}-a_{n+1}+a_n\sin^2\theta\cos^2\theta=0$,$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.求证:$\dfrac{1}{2^{n-1}}\leqslant a_n\leqslant1-\sin^n2\theta\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$.”此题曾作为2006年浙江省数学会暑期夏令营竞赛选拔试题.

(2)“已知动圆与直线$y=-3$相切,并与定圆$x^2+y^2=1$相内切.(Ⅰ)求动圆圆心的轨迹C.(Ⅱ)过原点作斜率为1的直线交曲线C于P_1(P_1为第一象限点),又过P_1作斜率为$\dfrac{1}{2}$的直线交曲线C于P_2,再过P_2作斜率为$\dfrac{1}{4}$的直线交曲线C于P_3,…,如此继续,一般地,过P_n作斜率为$\dfrac{1}{2^n}$的直线交曲线C于P_{n+1}.设$P_n(x_n,y_n)$.①令$b_n=x_{2n+1}-x_{2n-1}$,求证:数列$\{b_n\}$是等比数列;②设数列$\{b_n\}$的前n项和为S_n,试比较$\dfrac{3}{4}S_n+1$与$\dfrac{1}{3n+10}$的大小.”此题曾作为杭州市2002年统测压轴题.

(3)“函数$f(x)=x^3+ax$与$g(x)=bx^2+c$的图像有一个公共点$P(t,0)(t>0)$,且这两函数的图像在点P处有相同的切线.(Ⅰ)求$\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{a}$的值;(Ⅱ)若函数$y=f(x)-g(x)$在区

间$[0,3]$上的最小值为 0,求 t 的取值范围;(Ⅲ)设 $h(x)=|f(x)|$,$x\in[-1,1]$,求 $h(x)$的最大值 $H(a)$的解析式.”此题曾作为杭州二中 2009 年高三最后一次仿真考压轴题,让人激动与自豪的是,该题与 2013 年高考浙江理科卷压轴题几乎同出一辙.

4. 万紫千红总是春——会品题

会品题,就是会欣赏题.好题就像千里马,没有伯乐,再好的千里马也会被埋没.教师与学生的一个主要区别是,学生也许只要会做题就行,而教师除了会做还要会“品”题,“品”出题中真谛,“品”出题中精彩.

笔者曾用两种方法给学生讲了这道题:“已知 n 为正整数,求证:$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<\frac{3}{4}$.”一种是并项法,一种是数学归纳法,并得到了其加强命题“$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<\frac{3}{4}-\frac{1}{4n}$”.

在此基础上,再让学生证明:“$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<\frac{7}{10}$”.

原来提供的两种方法中,第一种不太适用了,可改用递推法,第二种方法仍可行,但要将原题调整为证“$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<\frac{7}{10}-\frac{1}{4n+1}$”.

有趣的是,当 $n\geqslant 2$ 时,还可进一步证明以下不等式“$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<\frac{\sqrt{2}}{2}$”,此时,上述的方法就不一定适用了。但借助柯西不等式可以顺利证明.

解决了这几个层层递进的不等式后,我们自然会问:原不等式的左边有没有上确界?事实上,根据高等数学知识有“$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\ln 2$”,于是以上一系列问题,找到了本源,一切也就豁然开朗.因为$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}<\ln 2<\frac{7}{10}<\frac{3}{4}(n\in\mathbf{Z}^{+})$.

如果从该不等式的左边探究,也有许多美妙的结论,如$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\ln 2$.

二、玩好的题:数学教师的幸福

在实际教学中,我们会遇到这样的情况:有的题不是考查学生认知障碍,而是考查学生的“合理”错误;有的题不是让学生把握数学的本质、方法、思想和理性精神,而是教学生如何去防陷阱,防小人,防“边界”;有的题不是教学生大胆地去创新、探究,而是引导学生去“循规蹈矩”,找题型、找原型、找关系、找技巧.这样的题做多了,人会变笨,会更讨厌数学.那么,什么是“好的题”?评价标准很多,说法也很多.简言之,对培养学生分析问题与解决问题的能力有帮助的题就是“好的题”.如果再补充点,笔者觉得好题应有简洁抽象、启迪思维与值得玩味的特征.

1. 映日荷花别样红——好的题的特征

(1)好的题简洁抽象

数学之美在于其简洁和严谨. 数学问题的简洁性在很大程度上是源自数学的抽象性. 数学概念正是从众多事物共同属性中抽象出来的,而在对日益扩展的数学知识总体进行简化、廓清和统一化时,抽象更是必不可少的. 浙江省每年的高考试题在这方面堪称表率. 限于篇幅,在此不做赘述.

(2)好的题启迪思维

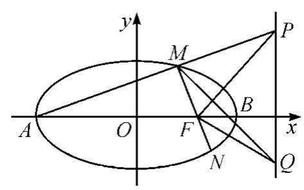
数学是思维的体操,创设情境、启迪思维是数学教学的核心. 好题往往可以从多个角度入手,设问形式灵活,解题方法多种,富含数学思想,有利于启迪思维. 笔者认为,是否有利于启迪思维是评判一道数学题好坏的最重要指标.

(3)好的题值得玩味

一个好的问题肯定值得探究,值得玩味. 可以从一题多解中玩味,可以从一题多变中玩味,也可以从一题多用中玩味. 以下是笔者最近"玩"的一题,写出来以飨读者.

引题:如右图,已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右顶点分别为 A,B,右焦点为 F,M 是椭圆上异于 A,B 的任一点,AM,MB 分别交右准线于 P,Q 两点.

[探究一:定点]以 PQ 为直径的圆过定点 F.



解法一 设 $M(x_1,y_1)$,直线 AM:$y=\dfrac{y_1}{x_1+a}(x+a)$;

直线 MB:$y=\dfrac{y_1}{x_1-a}(x-a)$.

令 $x=\dfrac{a^2}{c}$,得 $P\left(\dfrac{a^2}{c},\dfrac{a(a+c)y_1}{c(x_1+a)}\right)$,$Q\left(\dfrac{a^2}{c},\dfrac{a(a-c)y_1}{c(x_1-a)}\right)$.

以 PQ 为直径的圆的方程为 $\left(x-\dfrac{a^2}{c}\right)^2+\left[y-\dfrac{a(a+c)y_1}{c(x_1+a)}\right]\left[y-\dfrac{a^2}{c},\dfrac{a(a-c)y_1}{c(x_1-a)}\right]=0$.

令 $y=0$,注意到 $\dfrac{y_1^2}{x_1^2-a^2}=-\dfrac{b^2}{a^2}$,可解得 $x=\dfrac{a^2+b^2}{c}$ 或 $x=c$,

所以,以 PQ 为直径的圆过 $F(c,0)$ 点.

解法二 设 $M(a\cos\theta,b\sin\theta)$,$P\left(\dfrac{a^2}{c},y_1\right)$,$Q\left(\dfrac{a^2}{c},y_2\right)$.

利用 A,M,P 三点共线,得 $y_1=\dfrac{b(a+c)\sin\theta}{c(\cos\theta+1)}$,同理得 $y_2=\dfrac{b(a-c)\sin\theta}{c(\cos\theta-1)}$.

所以 $k_{PF}\cdot k_{QF}=\dfrac{y_1y_2}{\left(\dfrac{a^2}{c}-c\right)^2}=\dfrac{b^4\sin^2\theta}{c^2(\cos^2\theta-1)}\cdot\dfrac{c^2}{a^2-c^2}=-1$,也可得结论.

推广 1:将 A 点改为椭圆上任一动点,结论仍成立.

推广 2:将问题中的椭圆推广为圆锥曲线,结论仍成立.

推广 3:将准线改为动直线 l:$x=x_0(|x_0|>a)$,则以 PQ 为直径的圆过定点

$$\left(x_0\pm\frac{b}{a}\sqrt{x_0^2-a^2},0\right).$$

[探究二:定值](1)$y_Py_Q=-\frac{b^4}{c^2}$(或可表示为$-p^2$);(2)$k_{AP}k_{AQ}=-(e-1)^2$.

证明略,以下同.

[探究三:点共线]设 MF 交椭圆于 N 点,则 A,N,Q 三点共线.

[探究四:平分角](1)PF 平分$\angle MFB$;

(2)设 PQ 与右准线交于 A_1 点,则 FA_1 平分$\angle MA_1N$.

[探究五:平行性]设 MN 的中点为 G,则 $MA_1 /\!/ GN_1$.

[探究六:恒等式]将 A 点改为 x 轴上任一动点,则有$\frac{1}{y_P}+\frac{1}{y_Q}=\frac{1}{y_M}+\frac{1}{y_N}$.

推广 1:将焦点、准线分别推广为更一般的点与线:$F(m,0)(|m|<a)$,$x=\frac{a^2}{m}$,仍有

$$\frac{1}{y_P}+\frac{1}{y_Q}=\frac{1}{y_M}+\frac{1}{y_N}.$$

推广 2:将椭圆推广为圆锥曲线,等式$\frac{1}{y_P}+\frac{1}{y_Q}=\frac{1}{y_M}+\frac{1}{y_N}$仍成立.

[探究七:面积关系]设 M_1,N_1 分别是 M,N 在右准线的投影,则

$$S^2_{\triangle FM_1N_1}=4S_{\triangle FMM_1}S_{\triangle FNN_1}.$$

圆锥曲线中蕴含着复杂多变的关系,对其进行分析与研究,往往收益良多,其乐无穷!

2. 柳絮飞来片片红——玩好的题的收获

(1)玩好的题能加深对概念内涵的理解

好的数学题往往能紧扣数学概念的本质,学生通过对该问题的解决能够加深对概念的理解.有时,我们也可将原问题进行变式,通过变式,多角度、全方位挖掘概念内涵,达到培养学生的创新意识、改善学生的思维品质的目的.

(2)玩好的题能增添课堂教学的魅力

数学是思维的助推器,数学是思维的点金石.数学课堂教学以教师创造性的教与学生探究性的学为双主体,以有效的数学问题为其中的桥梁与纽带.课堂上,教师通过对一道好题的玩味,创设一个良好的课堂氛围,充分调动学生的好奇心与探究欲,把学生带入发现、探究的旅途.G.波利亚说:“一个专心的认真备课的教师能够拿出一个有意义的但又不太复杂的题目,去帮助学生挖掘问题的各个方面,使得通过这道题,就好像通过一道门户,把学生引入一个完整的理论领域.”

(3)玩好的题能提升教师的数学素养

数学素养是数学学科固有的特征,数学素养只有通过数学教育、数学活动才能获得,是在人的先天生理基础上通过人的后天严格的数学学习活动获得的、融于身心的一种比较稳定的数学能力.玩好的题对提高教师的数学素养,尤其是提高教师解决问题的能力大有裨益.一般来说,每年的高考试题是“好的题”,对其进行及时有效的研究是教师的必修课.

数学在古希腊辉煌时期是贵族的游戏,贵族们用数学来展示自己的智慧.现代教学中,数学应成为教师好玩的“游戏”,教师在这个特殊的游戏里,培养创新思维,提高数学意识,享受幸福、享受快乐!

三、让题好玩:数学教师的追求

题好玩不好玩完全取决于人的心态.一个热爱数学、热爱教育的教师,他会觉得数学的一切都是充满乐趣,都是好玩的.正如美国当代数学家、数学史家、数学教育家克莱因所说:"音乐能激发或抚慰情怀,绘画使人赏心悦目,诗歌能动人心弦,哲学使人获得智慧,科学可改善物质生活,而数学能给予以上的一切."

在某竞赛书中看到一道2004年新加坡奥林匹克竞赛题:"若 $0<x_1,x_2,\cdots,x_n\leqslant 1,n\geqslant 1$,则 $\frac{x_1}{1+(n-1)x_1}+\frac{x_2}{1+(n-1)x_2}+\cdots+\frac{x_n}{1+(n-1)x_n}\leqslant 1$."感觉不难,用柯西不等式只需一行就解决了,可书中答案竟然用了一页的篇幅.笔者想,肯定是题目印错了,应该没那么简单.原题是否可以加强一点?经过分析,果然可行,可将原题加强为:

"若 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+,\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\leqslant n$,则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1+(n-1)x_i}\leqslant 1$."

简证如下:$\frac{x_i}{1+(n-1)x_i}=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{(n-1)x_i+1-1}{1+(n-1)x_i}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{1+(n-1)x_i}$,

所证式等价于

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1+(n-1)x_i}=\frac{n}{n-1}-\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(n-1)x_i}\leqslant 1\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(n-1)x_i}\geqslant 1,$$

由柯西不等式,得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(n-1)x_i}\geqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}1^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}[1+(n-1)x_i]}=\frac{n^2}{n+(n-1)\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\geqslant\frac{n^2}{n+(n-1)n}=1.$$

如果借助琴生不等式,还可将以上不等式做如下拓展:

拓展一:若 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+,n\geqslant 1,m\geqslant 2,m,n\in\mathbf{Z}^+$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sum\limits_{i=1}^{m}x_i+(n-1)x_i}\leqslant\frac{m}{n+m-1}.$$

拓展二:若 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+,n\geqslant 1,m\geqslant 2,m,n\in\mathbf{Z}^+,k\in\mathbf{R}$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{\sum\limits_{i=1}^{m}x_i^k+(n-1)x_i^k}\leqslant\frac{m}{n+m-1}.$$

高斯说:"给我最大快乐的,不是已懂得的知识,而是不断的学习;不是已有的东西,而是不断的获取;不是已达到的高度,而是继续不断的攀登."

在数学教学这座风景秀丽的山峰上,让我们共同努力,朝着一个目标攀登,攀登,再攀登!

蔡小雄

2016年1月于杭州

目　录

第一章　一题多解

1.1 函　数

【例 1】(2012 年高考浙江卷)设 $a\in\mathbf{R}$,若 $x>0$ 时均有 $[(a-1)x-1](x^2-ax-1)\geqslant 0$,求 a 的值.

解法一　由等价关系

$$\{x\mid f(x)g(x)\geqslant 0\}=\left\{x\left|\begin{cases}f(x)\leqslant 0,\\g(x)\leqslant 0\end{cases}\right.\right\}\cup\left\{x\left|\begin{cases}f(x)\geqslant 0,\\g(x)\geqslant 0\end{cases}\right.\right\},$$

可以把已知不等式变为以下两种情况:

(1) $\begin{cases}(a-1)x-1\leqslant 0,\\x^2-ax-1\leqslant 0\end{cases}(x>0)$.

(2) $\begin{cases}(a-1)x-1\geqslant 0,\\x^2-ax-1\geqslant 0\end{cases}(x>0)$.

对(1),有 $\begin{cases}x>0,\\a\leqslant 1+\dfrac{1}{x},\\a\geqslant x-\dfrac{1}{x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0,\\x-\dfrac{1}{x}\leqslant 1+\dfrac{1}{x}\end{cases}\Rightarrow 0<x\leqslant 2$.

这时,对 $0<x\leqslant 2$,有 $x-\dfrac{1}{x}\leqslant a<1+\dfrac{1}{x}$.

易知,函数 $y=x-\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,2]$ 上为增函数,在区间右端点取到最大值 $y_{\max}=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$;

函数 $y=1+\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,2]$ 上为减函数,在区间右端点取到最小值 $y_{\min}=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

有 $\dfrac{3}{2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)_{\max}\leqslant a\leqslant\left(1+\dfrac{1}{x}\right)_{\min}=\dfrac{3}{2}$,得 $a=\dfrac{3}{2}$.

对(2),有 $\begin{cases}x>0,\\a\geqslant 1+\dfrac{1}{x},\\a\geqslant x-\dfrac{1}{x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0,\\x-\dfrac{1}{x}\geqslant 1+\dfrac{1}{x}\end{cases}\Rightarrow x\geqslant 2$.

这时，对 $x\geqslant 2$，有 $1+\frac{1}{x}\leqslant a\leqslant x-\frac{1}{x}$.

易知，函数 $y=1+\frac{1}{x}$ 在 $[2,+\infty)$ 上为减函数，在区间左端点取到最大值 $y_{\max}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$；

函数 $y=x-\frac{1}{x}$ 在 $[2,+\infty)$ 上为增函数，在区间左端点取到最小值 $y_{\min}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

有 $\frac{3}{2}=\left(1+\frac{1}{x}\right)_{\max}\leqslant a\leqslant\left(x-\frac{1}{x}\right)_{\min}=\frac{3}{2}$，得 $a=\frac{3}{2}$.

合并两种情况，求并集得 $a=\frac{3}{2}$.

又当 $a=\frac{3}{2}$ 时，对 $x>0$ 均有

$$[(a-1)x-1](x^2-ax-1)=\frac{1}{4}(x-2)^2(2x+1)\geqslant 0.$$

所以 $a=\frac{3}{2}$ 为所求.

解法二 将已知看成关于 a 的不等式，对 $x>0$ 有

$$\left[a-\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\left[a-\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]\leqslant 0.$$

比较 $x-\frac{1}{x}$ 与 $1+\frac{1}{x}$ 的大小知，当 $0<x\leqslant 2$ 时，有 $x-\frac{1}{x}\leqslant 1+\frac{1}{x}$；当 $x\geqslant 2$ 时，有 $x-\frac{1}{x}\geqslant 1+\frac{1}{x}$. 所以分两种情况讨论.

(1) 当 $0<x\leqslant 2$ 时，解关于 a 的不等式，得 $x-\frac{1}{x}\leqslant a\leqslant 1+\frac{1}{x}$.

有 $\frac{3}{2}=2-\frac{1}{2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)_{\max}\leqslant a\leqslant\left(1+\frac{1}{x}\right)_{\min}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，得 $a=\frac{3}{2}$.

(2) 当 $x\geqslant 2$ 时，解关于 a 的不等式，得 $1+\frac{1}{x}\leqslant a\leqslant x-\frac{1}{x}$.

有 $\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2}=\left(1+\frac{1}{x}\right)_{\max}\leqslant a\leqslant\left(x-\frac{1}{x}\right)_{\min}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，得 $a=\frac{3}{2}$.

合并两种情况，求并集得 $a=\frac{3}{2}$.

又当 $a=\frac{3}{2}$ 时，对 $x>0$ 均有

$$[(a-1)x-1](x^2-ax-1)=\frac{1}{4}(x-2)^2(2x+1)\geqslant 0.$$

所以 $a=\frac{3}{2}$ 为所求.

解法三 将 ax 看成主元，由原不等式可得

$$[ax-(x+1)][ax-(x^2-1)]\leqslant 0,x>0.$$

比较 $x+1$ 与 x^2-1 的大小知，当 $0<x\leqslant 2$ 时，有 $x^2-1\leqslant x+1$；当 $x\geqslant 2$ 时，有 $x^2-1\geqslant x+1$. 所以分两种情况讨论.

(1)当 $0<x\leqslant 2$ 时,解关于 ax 的不等式,得 $x^2-1\leqslant ax\leqslant x+1$,

即 $x-\frac{1}{x}\leqslant a\leqslant 1+\frac{1}{x}$.

有 $\frac{3}{2}=2-\frac{1}{2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)_{\max}\leqslant a\leqslant\left(1+\frac{1}{x}\right)_{\min}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,得 $a=\frac{3}{2}$.

(2)当 $x\geqslant 2$ 时,解关于 ax 的不等式,得 $x+1\leqslant ax\leqslant x^2-1$,

即 $1+\frac{1}{x}\leqslant a\leqslant x-\frac{1}{x}$.

有 $\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2}=\left(1+\frac{1}{x}\right)_{\max}\leqslant a\leqslant\left(x-\frac{1}{x}\right)_{\min}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,得 $a=\frac{3}{2}$.

合并两种情况,求并集得 $a=\frac{3}{2}$.

又当 $a=\frac{3}{2}$ 时,对 $x>0$ 均有

$$[(a-1)x-1](x^2-ax-1)=\frac{1}{4}(x-2)^2(2x+1)\geqslant 0.$$

所以 $a=\frac{3}{2}$ 为所求.

解法四　由原不等式可得 $\left[\frac{ax}{x+1}-1\right]\left[\frac{ax}{x+1}-(x-1)\right]\leqslant 0,x>0$.

易知,当 $0<x\leqslant 2$ 时,有 $x-1\leqslant 1$;当 $x\geqslant 2$ 时,有 $1\leqslant x-1$.以下分两种情况讨论(同解法三).

解法五　分两种情况讨论.

(1)当 $a-1\leqslant 0$ 时,有 $2a-3\neq 0$,取 $x=2>0$,得

$[(a-1)x-1](x^2-ax-1)=-(2a-3)^2<0$.

这说明不大于 1 的 a 不满足条件,此时无解.

(2)当 $a-1>0$ 时,由已知有

$$\left(x-\frac{1}{a-1}\right)\left(x-\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}\right)\left(x-\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right)\geqslant 0.$$

又当 $x>0$ 时,有 $\left(x-\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}\right)>0$,故由上式有

$$\left(x-\frac{1}{a-1}\right)\left(x-\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right)\geqslant 0,x>0.$$

当且仅当 $\frac{1}{a-1}=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$ 时,上式对 $x>0$ 恒成立,这表明 $\frac{1}{a-1}$ 是方程 $x^2-ax-1=0$ 的解,有

$$\left(\frac{1}{a-1}\right)-\frac{a}{a-1}-1=0\Rightarrow 2a^2-3a=0,$$

但 $a>1$,故得 $a=\frac{3}{2}$.

解法六　分三种情况讨论.

(1)当 $a-1=0$ 时,原式为 $-(x^2-x-1)\geqslant 0$,这不能对 $x>0$ 恒成立,此时无解.

(2)当 $a-1<0$ 时,由已知有

$$\left(x-\frac{1}{a-1}\right)\left(x-\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}\right)\left(x-\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right)\leqslant 0.$$

又当 $x>0$ 时,有 $x-\frac{1}{a-1}>0$,$x-\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}>0$,故由上式有

$$x-\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\leqslant 0,$$

这不能对 $x>0$ 恒成立,此时无解.

(3)当 $a-1>0$ 时,由已知有

$$\left(x-\frac{1}{a-1}\right)\left(x-\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}\right)\left(x-\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right)\geqslant 0.$$

又当 $x>0$ 时,有 $\left(x-\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}\right)>0$,故由上式有

$$\left(x-\frac{1}{a-1}\right)\left(x-\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right)\geqslant 0,$$

当且仅当 $\frac{1}{a-1}=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$ 时,上式对 $x>0$ 恒成立,这表明 $\frac{1}{a-1}$ 是方程 $x^2-ax-1=0$ 的解,有

$$\left(\frac{1}{a-1}\right)-\frac{a}{a-1}-1=0 \Rightarrow 2a^2-3a=0,$$

但 $a>1$,故得 $a=\frac{3}{2}$.

又当 $a=\frac{3}{2}$,$x>0$ 时,有

$$[(a-1)x-1](x^2-ax-1)=\frac{1}{4}(x-2)^2(2x+1)\geqslant 0.$$

所以得 $a=\frac{3}{2}$.

解法七 (1)当 $a-1=0$ 时,原式化简(降次)为 $-(x^2-x-1)\geqslant 0$,这不能对 $x>0$ 恒成立,此时无解.

(2)当 $a-1\neq 0$ 时,由已知有

$$(a-1)\left(x-\frac{1}{a-1}\right)\left(x-\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}\right)\left(x-\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right)\geqslant 0.$$

又当 $x>0$ 时,有 $x-\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}>0$,故上式可化简(降次)为

$$(a-1)\left(x-\frac{1}{a-1}\right)\left(x-\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right)\geqslant 0.$$

设 $f(x)=(a-1)\left(x-\frac{1}{a-1}\right)\left(x-\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right)$,则二次函数 $f(x)$ 有一个正零点 $x_1=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}>0$,要 $x>0$ 时恒有 $f(x)\geqslant 0$,当且仅当开口向上,且两个零点重合.

$$\begin{cases}(a-1)>0,\\ \dfrac{1}{a-1}=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2},\end{cases}\quad 解得\ a=\frac{3}{2}.$$

又当 $a=\dfrac{3}{2}$，$x>0$ 时，有 $[(a-1)x-1](x^2-ax-1)=\dfrac{1}{4}(x-2)^2(2x+1)\geqslant 0$.

所以得 $a=\dfrac{3}{2}$.

解法八　作出函数 $y=(a-1)x-1$ 与 $y=x^2-ax-1$ 的图像（如图 1-1-1 所示），由图可见：

(1)两函数图像都过定点 $(0,-1)$.

(2)在 $x>0$ 的右半平面上，绕定点 $(0,-1)$ 旋转直线 $y=(a-1)x-1$ 可以看到，两函数图像或者同时不在 x 轴下方，或者同时不在 x 轴上方．满足条件的图形只能是：两函数图像的另一交点在 x 轴上（三线共点），即 $[(a-1)x-1](x^2-ax-1)\geqslant 0$ 对 $x>0$ 恒成立的充要条件是

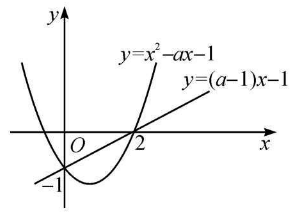


图 1-1-1

$$\begin{cases}y=(a-1)x-1,\\ y=x^2-ax-1,\\ y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1,\\ a=0\end{cases}(舍去),\begin{cases}x=2,\\ a=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

得 $a=\dfrac{3}{2}$ 为所求.

解法九　把 a 改写为 y，如图 1-1-2 所示，作两函数 $y=1+\dfrac{1}{x}$ 与 $y=x-\dfrac{1}{x}$ 在 $x>0$ 时的图像（即图中双曲线 $xy-x-1=0$ 与 $x^2-xy-1=0$ 在右半平面上的图形），则满足 $\begin{cases}(a-1)x-1\leqslant 0,\\ x^2-ax-1\leqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}(a-1)x-1\geqslant 0,\\ x^2-ax-1\geqslant 0\end{cases}$ 的区域为图中的阴影部分．由图可见，当且仅当水平直线通过两图像的交点时（三线共点），整条射线 $(x>0)$ 均落在阴影上，即 $[(a-1)x-1](x^2-ax-1)\geqslant 0$ 对 $x>0$ 恒成立的充要条件是

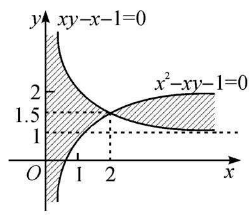


图 1-1-2

$$\begin{cases}(a-1)x-1=0,\\ x^2-ax-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1,\\ a=0\end{cases}(舍去),\begin{cases}x=2,\\ a=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

得 $a=\dfrac{3}{2}$ 为所求.

解法十　对 $x>0$，已知条件可以变为关于 a 的不等式

$$\left[a-\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\left[a-\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]\leqslant 0.$$

即直线 $y=a$ 介于两函数 $y=1+\dfrac{1}{x}$ 与 $y=x-\dfrac{1}{x}$ 的图像之间（如图 1-1-3 所示），故直线 $y=a$ 过两图像 $y=1+\dfrac{1}{x}$ 与 $y=x-\dfrac{1}{x}$ 的交点

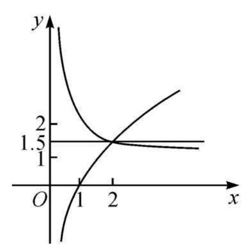


图 1-1-3

$\left(2,\dfrac{3}{2}\right)$，得 $a=\dfrac{3}{2}$.

解法十一 将 ax 看成主元，由原不等式可得

$[ax-(x+1)][ax-(x^2-1)]\leqslant 0, x>0.$

这表明 ax 介于 $x+1$ 与 x^2-1 之间. 即在右半平面上，直线 $y=ax$ 介于两函数 $y=x+1$ 与 $y=x^2-1$ 的图像之间(如图 1-1-4 所示)，故直线 $y=ax$ 过两图像 $y=x+1$ 与 $y=x^2-1$ 的交点(2,3)，代入 $y=ax$ 有 $3=2a$，得$a=\dfrac{3}{2}$.

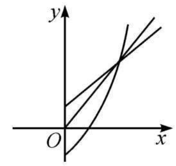


图 1-1-4

解法十二 对 $x>0$，已知条件可以变为

$\left[\dfrac{ax}{x+1}-1\right]\left[\dfrac{ax}{x+1}-(x-1)\right]\leqslant 0.$

即函数 $y=\dfrac{ax}{x+1}$的图像介于两函数 $y=1$ 与 $y=x-1$ 的图像之间(如图 1-1-5 所示)，故 $y=\dfrac{ax}{x+1}$过两函数 $y=1$ 与 $y=x-1$ 图像的交点(2,1)，代入$y=\dfrac{ax}{x+1}$，有 $1=\dfrac{2a}{2+1}$，得 $a=\dfrac{3}{2}$.

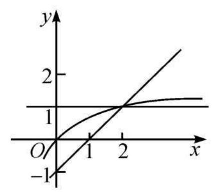


图 1-1-5

解法十三 (必要性)既然是 $x>0$ 时均有$[(a-1)x-1](x^2-ax-1)\geqslant 0$，特别地，取 $x=1$，有 $a(a-2)\leqslant 0$，得 $0\leqslant a\leqslant 2$.

取 $x=2$，有$-(2a-3)^2\geqslant 0$，得 $a=\dfrac{3}{2}$.

反之(充分性)，当 $a=\dfrac{3}{2}$，$x>0$ 时，有$[(a-1)x-1](x^2-ax-1)=\dfrac{1}{4}(x-2)^2(2x+1)\geqslant 0$.

所以 $a=\dfrac{3}{2}$.

解法十四 (必要性)取 $x=2$，有$-(2a-3)^2\geqslant 0$，得 $a=\dfrac{3}{2}$.

反之(充分性)，当 $a=\dfrac{3}{2}$，$x>0$ 时，有$[(a-1)x-1](x^2-ax-1)=\dfrac{1}{4}(x-2)^2(2x+1)\geqslant 0$.

评注 本例为 2012 年浙江高考填空题. 从“小题小做”的角度，解法十三和解法十四看上去是最优的. 但从解题的角度，对问题进行全面解构有助于我们对问题本质的理解，解法一至解法四是对问题代数结构的分析；解法五、六进一步借助几何解释来明晰代数结构：其几何解释是，当 $a>1$ 时，一般情况下的三次函数 $f(x)=\left(x-\dfrac{1}{a-1}\right)\left(x-\dfrac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}\right)\left(x-\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right)$有“一负两正”三个零点(如图 1-1-6 所示)，要使 $x>0$ 时 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，当且仅当两个正根重合为切点(如图 1-1-6 所示). 解法七则进一步对问题进行了“降次”的处理. 解法八至解法十二则是数形结合解决问题的多角度切入，比如解法八与代数解法相对应，我们通过坐标系给出相应的几何解释. 主要有两个基本途径，其一是把 a

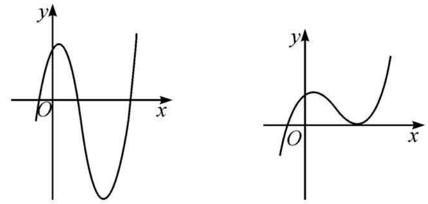


图 1-1-6