国家工科数学教学基地　国家级精品课程使用教材

Nucleus

新核心

# 高等数学

## 生农医药版

上海交通大学数学科学学院　组编

李　铮　戚进国　主编

上海交通大学出版社

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

国家工科数学教学基地　国家级精品课程使用教材

Nucleus 新核心

理工基础教材

# 高等数学

## 生农医药版

上海交通大学数学科学学院　组编

李　铮　戚进国　主编

上海交通大学出版社

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

**内容提要**

高等数学是高等院校最重要的基础理论课。本书共分 7 章，内容包括函数、极限与连续，导数及应用；积分学；微分方程；多元函数微积分；概率论基础；线性代数初步等。各章后均有适量的习题，并附有习题答案。

本书可作为高等院校生农医药类专业高等数学课程教材。

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学：生农医药版/李铮，咸进国主编. —上海：上海交通大学出版社，2017
新核心理工基础教材
ISBN 978-7-313-17946-3

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①李… ②咸… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 201856 号

**高等数学(生农医药版)**

主　　编：李　铮　咸进国
出版发行：上海交通大学出版社　　地　　址：上海市番禺路 951 号
邮政编码：200030　　电　　话：021-64071208
出 版 人：谈　毅
印　　制：上海春秋印刷厂　　经　　销：全国新华书店
开　　本：710 mm×1000 mm　1/16　　印　　张：18.75
字　　数：350 千字
版　　次：2017 年 9 月第 1 版　　印　　次：2017 年 9 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-313-17946-3/O
定　　价：48.00 元

# 前　言

高等数学是高等院校最重要的基础理论课,课程主要传授学生在今后专业学习中所需的数学知识,同时培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力和解决实际问题的能力。高等数学在各个学科领域中有广泛的应用,随着科学技术的不断发展及交叉学科人才培养的需要,对新型生农医药类专业人才的数学基础提出了更高的要求,目前已有的生农医药类高等数学教材已经不能满足培养高素质人才的需要。为此,我们编写了本书。

本书结合作者多年教授上海交通大学生农医药类高等数学的经验,对概念的引入、背景问题作出一定的分析,选择大量典型的例题帮助学生理解和掌握一般数学方法,难度适中。本书充分考虑生农医药类学生学习数学的要求,对于理论性较强的部分不作深入的介绍,给学生留下思考和探索的空间。

本书包括"微积分""概率论"和"线性代数"三个部分,"微积分"部分由李铮主编,"概率论"和"线性代数"部分由咸进国主编。前五章介绍微积分基础知识和应用;第六章介绍概率论基础知识和应用,第七章介绍线性代数基础知识和应用。

本书注重对高等数学的基本思想和基本方法的阐述,突出极限、导数和积分等重要概念,满足生农医药类高等数学的教学特色和要求,注重数学在医学上的应用,符合"生农医药类数学教学基本要求"。

本书的编写得到了上海交通大学数学科学学院、上海交通大学教务处及上海交通大学教学发展中心的大力支持,得到了上海交通大学数学科学学院乐经良教授的悉心指导和帮助,编者在此一并表示衷心感谢。

限于编者的水平,书中存在的错误和不妥之处,敬请读者批评指正。

# 目　　录

# 1　函数、极限与连续

高等数学是研究万物运动与变化规律的重要工具。函数是高等数学研究的主要对象，它反映了事物运动变化之间的依赖关系，是高等数学中最基本的概念。极限则是高等数学的理论基础，极限的思想方法是贯穿高等数学的基本研究方法。本章主要介绍函数、极限和连续的概念以及它们的一些性质。

## 1.1　函　　数

本节是对初等数学中函数概念和函数性质的复习、总结、补充和提高，是学习高等数学的基础。

### 1.1.1　函数的概念

1. 实数的绝对值

每一个实数都对应数轴上一个确定的点，而数轴上的每一个点仅对应唯一的实数，数轴上点 $a$ 到原点的距离称为实数 $a$ 的绝对值，记作 $|a|$，表示为

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0, \\ -a, & a < 0。\end{cases} \tag{1-1}$$

实数的绝对值有以下常用的相关不等式：

$|x| \leqslant A(A>0) \Leftrightarrow -A \leqslant x \leqslant A$；

$|x-a| \leqslant \delta(\delta>0) \Leftrightarrow a-\delta \leqslant x \leqslant a+\delta$；

$|a \pm b| \leqslant |a|+|b|$；

$|a \pm b| \geqslant ||a|-|b||$。

2. 变量

通常我们遇到的物理量(如质量、温度等)和几何量(如长度、面积等)的数值都是通过度量确定的，数值在发生变化的量称为变量，而数值始终保持不变的量称为常量，在高等数学中主要研究变量，常用区间或邻域来表示变量的取值范围。

区间有开区间 $(a, b)=\{x \mid a<x<b\}$、闭区间 $[a, b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$、无穷区间 $(a, +\infty)=\{x \mid x>a\}$ 以及其他区间 $(a, b]$，$[a, b)$，$[a, +\infty)$，$(-\infty,$

$b]$, $(-\infty, +\infty)$ 等。

我们把区间 $(a-\delta,\ a+\delta)$ 称为点 $a$ 的 $\delta$ 邻域,记作 $U(a,\ \delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,\ a+\delta)$,称 $a$ 为邻域中心,$\delta$ 为邻域半径。而把 $\mathring{U}(a,\ \delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$ 称为点 $a$ 的去心 $\delta$ 邻域,如图 1-1(a)(b)所示。


(a) (b)

图 1-1

如果不考虑邻域半径,记 $U(a)$ 为点 $a$ 的邻域,$\mathring{U}(a)$ 为点 $a$ 的去心邻域。

3. 映射定义

先介绍集合之间的映射概念。

**定义 1.1.1** 设有非空集合 $X$ 和 $Y$,如果存在对应法则 $T$,使得对于集合 $X$ 中的任意一个元素 $x$,在集合 $Y$ 中总存在唯一的元素 $y$ 与之对应,则称 $T$ 是由 $X$ 到 $Y$ 的映射,记作 $T: X \to Y$ 或 $x \mapsto y=T(x)$,称 $T(x)$ 为 $x$ 在映射 $T$ 下的像,$x$ 称为 $y$ 在映射 $T$ 下的原像。

集合 $X$ 称为映射 $T$ 的定义域,记作 $D(T)$,$T(x)$ 的全体称为映射 $T$ 的值域,记作 $R(T)$,$R(T)=\{T(x) \mid x \in D(T)\} \subset Y$。

4. 函数定义

自然界中各种现象的变化存在相互依存的关系,函数则是表达变量之间关系的基本数学形式。

**定义 1.1.2** 设有非空数集 $X$ 和 $Y$,如果对于 $X$ 中的每一个数 $x$,按照对应法则 $f$ 都对应于 $Y$ 中唯一的一个确定的数 $y$,则称 $f$ 为定义在 $X$ 上的函数,记作 $f: X \to Y$,数 $x$ 对应的数 $y$ 称为 $f$ 的函数值,记作:$y=f(x)$,其中 $X$ 称为函数 $f$ 的定义域,记作 $D(f)$,函数值 $y$ 的集合称为 $f$ 的值域,记作 $R(f)$,即 $R(f)=\{f(x) \mid x \in D(f)\} \subset Y$。

比较映射和函数的定义,不难看到,函数是数集之间的映射,而映射可以看成是函数概念的延伸。

在本书中,为了便于讨论具体的函数常把函数 $f$ 记作:$f(x)$。从函数定义直接可得函数的两个要素是:定义域、对应法则。

**例 1.1.1** 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$ 的定义域。

**解** 由初等数学知识可知函数定义域的基本型有:

(1) $\sqrt{y}$，$y \geqslant 0$；

(2) $\dfrac{1}{y}$，$y \neq 0$。

所以 $\begin{cases} x^2-2x-3 \geqslant 0 \\ \sqrt{x^2-2x-3} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2-2x-3=(x-3)(x+1)>0$，

故 $f(x)$的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$。

**例 1.1.2** 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\log_2|x-1|}$ 的定义域。

**解** 函数定义域的基本型有：$\log_a y$，$y>0$，$a>0$ 且 $a \neq 1$。

所以 $\begin{cases} \log_2|x-1| \neq 0 \Rightarrow |x-1| \neq 1 \Rightarrow x \neq 0,\ x \neq 2, \\ |x-1|>0 \Rightarrow x \neq 1。\end{cases}$

故 $f(x)$的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$。

**例 1.1.3** 从一项生理学研究中得到血液中胰岛素的浓度 $c(t)$(单位/ml)随时间 $t$(min)的变化而变化，在 5 min 内 $c(t)$与 $t$ 和 $10-t$ 的乘积成正比，如果在 3 min时，$c(t)=12$，试建立 $c(t)$与时间 $t$ 的函数关系。

**解** 由题意知，当 $0 \leqslant t \leqslant 5$ 时，$c(t)=kt(10-t)$，而 $t=3$ 时，$c(t)=12$，所以 $k=\dfrac{4}{7}$，由此可得 $c(t)=\dfrac{4}{7}t(10-t)(0 \leqslant t \leqslant 5)$。

**例 1.1.4** 已知 $2f(x)+f(1-x)=x^2$，求 $f(x)$。

**解** 由函数的定义可知 $y=f(x)$ 和 $u=f(v)$ 虽然变量形式不同，但都表示同一个函数 $f$，这一性质称为函数的变量无关性，所以

$$\begin{cases} 2f(x)+f(1-x)=x^2, \\ 2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2, \end{cases}$$

消去 $f(1-x)$，得 $f(x)=\dfrac{1}{3}(x^2+2x-1)$。

**例 1.1.5** 已知 $f\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)=2x-1$，求 $f(x)$。

**解** 令 $\dfrac{x+1}{x-2}=t$，则 $x=\dfrac{1+2t}{t-1}$，

所以 $f(t)=2 \times \dfrac{1+2t}{t-1}-1=\dfrac{3+3t}{t-1}$，或 $f(x)=\dfrac{3+3x}{x-1}$。

### 1.1.2 函数的表示法

函数的表示法有很多,最常见的有表格法、图示法和解析法。

1. 表格法

用表格来表示一种函数关系,称为表格法。

如果两个变量的关系是通过表格形式表示的,称为函数的表格表示法,如自变量取 $x_1$, $x_2$, …, $x_n$时,另一个变量相应的取值为 $y_1$, $y_2$, …, $y_n$,则因变量(或函数)与自变量通过表格形式给出了对应关系。

**例 1.1.6** 外界温度对人体代谢率的影响数据如表 1-1 所示。

**表 1-1 外界温度对人体代谢率的影响数据**

| 环境温度/℃ | … | 4 | 10 | 20 | 30 | 38 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 代谢率/[kJ/(h · m²)] | … | 250.8 | 183.9 | 167.2 | 169.3 | 225.7 | … |

2. 图示法

用图形来表示一种函数关系,称为图示法。

在平面直角坐标系中,横坐标表示自变量的取值,纵坐标表示对应的函数取值,则函数关系可用图形来表示。

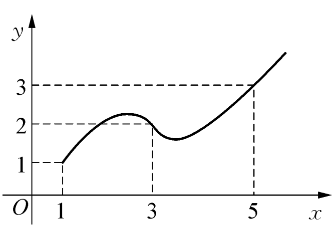

图 1-2

**例 1.1.7** 图 1-2 直接表示的一种函数关系。

**解** 从图形大致可得:

$$f(1)=1, f(3)=2, f(5)=3$$

3. 解析法(又称公式法)

如果两个变量之间的关系用数学运算公式来表示,则称由解析法或公式法来表示函数关系。

**例 1.1.8** 某种细菌的繁殖个数 $N$ 与时间 $t$ 关系为

$$N=N_0 e^{\frac{t}{T_C}},$$

式中 $N_0$为繁殖开始时的细菌数;$T_C$为生长周期;$N_0$和 $T_C$均为常数。

在函数定义中,对应法则不一定是一个公式,有时需用几个公式加以表达,用多个公式来表示的函数称为分段函数。

**例 1.1.9** $y=\begin{cases} x^2, & 0 \leqslant x < 1, \\ 2-x, & 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$

函数的定义域为 $D(f)=[0, 2]$, 值域为 $R(f)=[0, 1]$, 如图 1-3 所示。

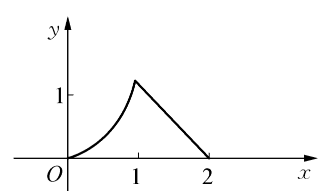

图 1-3

**例 1.1.10** （取整函数）设 $x$ 为任一实数，把不超过 $x$ 的最大整数称为 $x$ 的整数部分，记作$[x]$，称 $y=[x]$ 为 $x$ 的取整函数。

函数的定义域为 $D(f)=(-\infty, +\infty)$，值域为 $R(f)=\mathbf{Z}$，其中 $\mathbf{Z}$ 表示整数集合，如图 1-4 所示。

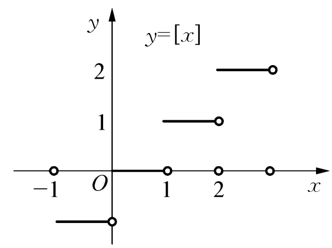

图 1-4

**例 1.1.11** 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0。\end{cases}$$

函数的定义域为 $D(f)=(-\infty, +\infty)$，值域为$R(f)=\{-1, 0, 1\}$，如图 1-5 所示。

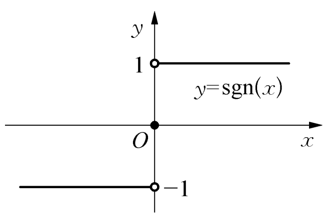

图 1-5

注意到 $|x|=x\cdot\operatorname{sgn}(x)$。

**例 1.1.12** Dirichlet 函数：

$$\mathrm{D}(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数}。\end{cases}$$

函数的定义域为 $D(f)=(-\infty, +\infty)$，值域为 $R(f)=\{0, 1\}$。

### 1.1.3 函数的性质

函数反映了变量之间的关系，函数值的变化随自变量的变化具有一定的规律性和一些特征，我们先讨论函数的一些简单性质，随着内容的展开将逐步对函数进行更深入的研究。

1. 奇偶性

**定义 1.1.3** 设函数 $f$ 的定义域$D(f)$关于原点对称或为 $R=(-\infty, +\infty)$。

若 $\forall x\in D(f)$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f$ 为偶函数；

若 $\forall x\in D(f)$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f$ 为奇函数。

符号“$\forall$”表示对于任意的。

例如，$f(x)=x^2$ 是定义在$R$ 上的偶函数，$f(x)=\sin x$ 是定义在$R$ 上的奇函数，$f(x)=x\cdot\sin x$ 是定义在$R$ 上的偶函数，$f(x)=x^2\cdot\sin x$ 是定义在$R$ 上的奇函数，而 $f(x)=x^2+\sin x$ 则是定义在$R$ 上的非奇非偶函数。

从函数图形上看，奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 $y$ 轴对称。

**问题 1.1.1** 非奇非偶函数能否表示为奇函数与偶函数的和？

**例 1.1.13** 判定函数 $f(x)=\log_2(x+\sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性。

**解** $f(x)+f(-x)=\log_2(x+\sqrt{x^2+1})+\log_2(-x+\sqrt{x^2+1})=\log_2 1=0$。所以函数 $f$ 为奇函数。

**例 1.1.14** 判定函数 $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ 的奇偶性。

**解** $f(-x)=\dfrac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\dfrac{1-2^x}{1+2^x}=-f(x)$，所以函数 $f$ 为奇函数。

2. 单调性

**定义 1.1.4** 设函数 $f$ 在区间 $I$ 上有定义：

若 $\forall x_1, x_2\in I$，$x_1<x_2$，有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ 或 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f$ 为 $I$ 上的单调增加函数或严格单调增加函数；

若 $\forall x_1, x_2\in I$，$x_1<x_2$，有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$ 或 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f$ 为 $I$ 上的单调减少函数或严格单调减少函数。

单调增加或减少函数，统称单调函数。

有些函数可以在一部分区间上单调增加而在另一部分区间上单调减少，例如：函数 $\sin x$ 在区间 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加而在 $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上单调减少。

3. 有界性

**定义 1.1.5** 设函数 $f$ 在区间 $I$ 上有定义：

若 $\exists M\in R$，$\forall x\in I$，有 $f(x)\leqslant M$，则称 $f$ 在 $I$ 上有上界，$M$ 为 $f$ 的一个上界；

若 $\exists m\in R$，$\forall x\in I$，有 $f(x)\geqslant m$，则称 $f$ 在 $I$ 上有下界，$m$ 为 $f$ 的一个下界；

若 $\exists G\in R^+$，$\forall x\in I$，有 $|f(x)|\leqslant G$，则称 $f$ 在 $I$ 上有界，$G$ 为 $f$ 的一个界；

若 $f$ 在 $I$ 上有界，称 $f$ 是 $I$ 上的有界函数。

符号“$\exists$”表示存在。

从函数有界的定义可直接得到：函数有界的充分必要条件是函数既有上界又有下界。

**问题 1.1.2** 函数 $f$ 在区间 $I$ 上无界的严格定义是什么？

典型的有界函数：$|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$。

**例 1.1.15** 证明：$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上无界。

**证明** $\forall G>0$，取 $x_0=\dfrac{1}{G+1}$，则 $f(x_0)=\dfrac{1}{x_0}=G+1>G$，所以函数 $\dfrac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上无界。

4. 周期性

**定义 1.1.6** 设函数 $f$ 在 $I$ 上有定义：

若 $\exists T(\neq 0)\in R$，使得 $\forall x\in I$，有 $x+T\in I$ 且 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $f$ 为周期函数，$T$ 为函数 $f$ 的一个周期。

当最小正周期存在时，通常称最小正周期为周期。例如，函数 $\sin x$，$\cos x$，$\tan x$ 都是周期函数，其周期分别为：$2\pi$，$2\pi$，$\pi$。

设周期函数 $f(x)$ 的周期为 $T$，则函数 $f(ax+b)(a\neq 0)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$。

**问题 1.1.3** 周期函数是否一定有最小正周期？

**例 1.1.16** 求函数 $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$ 的最小正周期。

**解** $f(x)=1-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2(2x)=1-\frac{1}{4}[1-\cos(4x)]$，

所以，函数的最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$。

**例 1.1.17** 设 $\forall x\in R$，有 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$，证明：$f(x)$ 是周期函数。

**证明** 由于 $f(x)-f^2(x)=\frac{1}{4}-\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]^2$，

所以 $$\left[f\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right]^2=f(x)-f^2(x)=\frac{1}{4}-\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]^2,$$

故
$$\begin{aligned}\left[f(x+1)-\frac{1}{2}\right]^2&=f\left(x+\frac{1}{2}\right)-f^2\left(x+\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{1}{4}-\left[f\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right]^2\\&=\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]^2。\end{aligned}$$

又由题意知：$f(x)\geqslant\frac{1}{2}$，故 $f(x+1)=f(x)$，即函数为周期函数，且周期为 1。

## 1.1.4 反函数与复合函数

1. 单射、满射、双射

我们先给出单射、满射和双射的概念。