

高中初中卷

章才根 主编

GONGTONG DE SIKAO

共同的思考

2017年宁波市基础教育优秀教学论文评比
获奖作品集

 宁波出版社
NINGBO PUBLISHING HOUSE

本书编委会

章才根 丁耀方 倪国君 褚树荣 吴筱泉
陈天宁 刘东晖 朱水敏

高中初中卷

章才根 主编

GONGTONG DE SIKAO

共同的思考 ①

2017年宁波市基础教育优秀教学论文评比
获奖作品集

图书在版编目(CIP)数据

共同的思考：2017年宁波市基础教育优秀教学论文
评比获奖作品集 / 章才根主编. — 宁波：宁波出版社，
2017.6

ISBN 978-7-5526-3027-5

I. ①共… II. ①章… III. ①基础教育—教学研究—
宁波—文集 IV. ①G632.0—53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 214284 号

共同的思考：2017年宁波市基础教育优秀教学论文评比获奖作品集

出版发行 宁波出版社(宁波市甬江大道1号宁波书城8号楼6楼315040)
网 址 <http://www.nbcbs.com>
责任编辑 王晓君
责任校对 杨 满
印 刷 浙江开源印务有限公司
开 本 787毫米×1092毫米 1/16
印 张 52.75
字 数 900千
版 次 2017年6月第1版
印 次 2017年6月第1次印刷
标准书号 ISBN 978-7-5526-3027-5
定 价 98.00元

如发现缺页或倒装,影响阅读,请与我社联系调换 电话:0574-87286804

序

以“共同的思考”为书名的宁波市基础教育优秀教学论文评比获奖作品集,终于又与广大教师见面了。这不仅是宁波市教育局教研室提升教研质量的一个品牌,更是一线教师实践反思和相互交流的窗口。

人是会思考的动物,每个教师都有自己的思考,只是思考的程度不同而异。于漪老师说:“我能不能做一个合格的教师,就看我一辈子怎么努力学做教师。我一辈子学做教师有两根支柱:第一根支柱是勤于学习,第二根支柱是勇于实践。两根支柱的聚焦点就是不断的反思。”

思考作为实践者一种基本的生活方式,彰显了实践者的主体价值,弘扬了实践者的主观能动性。然而,零碎的、偶然的思考不是一种研究形式。思考并不是仅仅为了一堂课或一个教学细节,而是为了更好地改造我们整个的教学理念和教学思维,说到底是为了提高教育教学的生命活力。因此,教师需要对“如何教”进行反思,更要多问问自己“为何教”,要从“培养什么样的人”的高度突破行为方式的局限,反思自己的身份和使命,最终实现学生与教师的解放。美国教育家乔治·奈勒说:“教师追溯各种教育问题的哲学根源,从而以比较广阔的眼界来看待这些问题。那些不应用哲学去思考问题的教育工作者必然是肤浅的。一个肤浅的教育工作者,可能是好的教育工作者,也可能是坏的教育工作者——多少好也好得有限,而坏则每况愈下。”

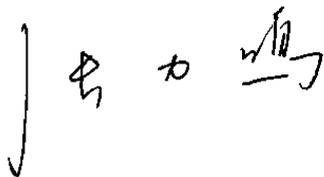
思考是一个痛苦的过程,也是一次快乐的旅行。思考应是教师找回教学快乐的一种生活方式。教师要树立“为实践而反思,对实践进行反思,在反思中实践”的专业自觉。教育过程不在于教师犯错,而在于如何对待这个

错。思考本身就是对教学的责任,它有助于形成教师爱岗敬业、虚心好学、自我否定、追求完美等优秀职业品质。思考是不断发展的,永远处于旅途之中,就像驿站一样,不断接力下去。教育是遗憾的艺术,思考陪伴教师的一生。教师只有不断反思,步步跟进,孜孜以求,才能实现教育的艺术之美。

思考又是一个“共同”的过程。教师被认为是一个孤独的职业,这种孤独使教师较难接触新鲜的教育思想和教学方法,教学上的压力长期积累无法释放,即使在教学上取得一些成绩也无法得到同事的认可和肯定。教学相对独立的特点以及考试倾向的教育体制和唯分数论的教师评价机制,导致长久以来教师各自为政的现象,团队合作有名无实,不少教师画地为牢,他们不喜欢他人介入自己的课堂教学,在课堂外也缺少与他人的交流与合作。叶圣陶说:“教师要使自己的教育活动真正有益于学生,有益于教学质量的提高,教师之间就要团结合作,互相配合。”随着新课的不断推进,新情况、新问题层出不穷,需要全体教师共同面对。一年一度的宁波市基础教育优秀教学论文评比活动,为全市教师共同交流提供了一个很好的平台,也需要教师的共同参与。

教育是灵魂的回头,是顿悟的艺术。教师应避免或克服对教育问题的主观臆断和简单应付了事,而要经过反思来认识问题和解决问题。其实,教师的问题意识和问题能力不仅是学生问题意识和问题能力培养的必要条件,而且也是教师在复杂教育情境中生成实践智慧,享受职业乐趣和尊严的必要条件。教师在教育工作中多一份经验,多一份反思,就多一份提高,实践反思是教师成长的最根本途径。

是为序。



2017年6月

目录 CONTENTS

- 001 基于系统观理念下的周期函数概念教学设计 桑红迪
- 008 “倒数法”解决一类 $a_{n+1} = a_n + \frac{a_n^2}{f(n)}$ 型通项放缩问题 杨启栋
- 016 “稚化思维”策略助力逻辑推理素养的提升 丁林蓬
- 023 转轴拨弦三两声,未成曲调先有情
——从高中数学核心素养的视角看立体几何引言课教学 周秋艳
- 030 “大阅读”理念下的高中英语核心素养培育 应常伟 贺南松
- 037 深度解读文本,提升思维品质
——以人教版高中英语教材为例 陈佳佳
- 043 例谈高中英语概要写作课堂教学 郑科伟
- 050 启迪思维 提升品质
——试论学科核心素养背景下高中英语阅读教学中思维品质的培养 张凤玲
- 056 例谈高中英语读后续写教学中学生思维品质的培养 顾雪娜
- 064 吾爱政治 吾更爱生活
——构建生活化的政治课堂 王 涵
- 070 巧用时政热点,提升复习品位
——以省公开课《经济全球化与对外开放》为例 徐 磊
- 076 基于历史细节教学,培养学生实证意识
——以《“自由放任”的美国》为例 汪高峰
- 083 基于时空观念核心素养下的历史课堂教学策略
——以《近代民族工业的兴起》为例 秦赛亚

- 088 凸显“人”在遗产教学中的地位
——以《清新典雅的皖南古村落》为例 王思思
- 095 高屋建瓴,形成以“变”应“新”的有效课堂教学
——浅谈新高考模式下地理教学模式的转变及备考策略 康同杰
- 102 地理实践力中“关键经验”的习得策略 周宁银
- 111 基于核心素养的物理模型教学策略 王海岳
- 118 高中物理课堂演示实验的创新与探索 鲁斌
- 130 深挖教材资源 提升教学高度
——浅谈苏教版必修教材“拓展视野”“资料卡”栏目的开发 吴建峰
- 134 基于化学核心素养的观念建构教学
——以电解质概念教学为例 谈小强
- 142 以学生为主体的化学习题教学策略研究 张金海
- 147 烟草与棉花原生质体培养比较 汪静儿 蔡雨霞
- 153 基于核心素养的生物实验教学实践
——以《光合色素的提取与分离》为例 应晓屹
- 157 撷谈回忆性散文文体特征及其教学策略
——以《走一步,再走一步》为例 鲍静静
- 163 探寻欣赏经典的路径 领略名著的不朽魅力
——浅谈指导学生阅读“整本书”的策略 潘蕾
- 171 活动导向 梯度设计 逆向思维
——核心素养视野下基于部编教材的思辨读写能力培养举隅 邵灵琳
- 178 “语言积累与研究”学习任务群操作尝试
——以人教版文言文《满井游记》语言知识教学为例 范冠男
- 184 智于形,慧于心
——初中数学课堂二次评量的实践研究 徐华军
- 192 微课先行,支架推进
——基于支架式教学理论下的三角形分割的实践与思考 付斌
- 201 会当凌绝顶,一览众山小
——浅析高观点下的解三角形 郑瑞
- 208 “生长型”复习课的尝试与思考
——以《相似三角形判定复习》为例 周洋

215	基于数学史的概念形成课教学模式探索	
	——以“一元一次方程起始课”为例	季冰 王伟
224	浅谈英语阅读教学中学生批判性思维能力的培养策略	胡林丹
233	例谈初中英语听说课堂中的情境化词块教学	陈立琳
239	“思维导图”在初中英语写作中的有效运用	江俐娜
249	双“观”齐下,深“析”文本	
	——浅谈语篇分析在初中英语阅读课堂中的运用	朱丹丹
256	蕴“意”·创“益”	
	——由一道原创题说开去	何锋
262	教材深深处,自有千千情	
	——对挖掘《道德与法治》教材中情感因素的思考	周涵歆
268	科学实验在科学概念教学中的应用研究	王万腾
278	例析初中科学实验课开放式教学	张亮
285	“三味教学”,绽放精彩	
	——浅谈基于“学为中心”理念下改善初三学生科学学习状态的教学策略 ...	
	楼静君
292	巧用智慧教学,挖掘数据内涵	
	——浅谈科学智慧课堂中基于数据分析的应对策略	王璐玲子
301	交互式媒体,让初中科学实验课更精彩	鲍璐敏
309	着眼“历史认识” 初探“逆向教学”	
	——以英国资产阶级革命为例	游冰
316	点以图伴学之火 燃核心素养之魂	
	——浅谈以图片教学提高学生历史与社会核心素养	徐凉慧
325	历史课堂教学立意的可行路径探索	
	——以《第二次鸦片战争》为例	程文翔

基于系统观理念下的周期函数概念教学设计^①

姜山中学 桑红迪

摘要:概念教学要在概念的发生发展过程中揭示它的本来面目,要从系统的高度设计学生参与揭示概念本来面目的教学活动,从整体、层次和联系中寻找要素,并与相关概念构成“概念域”,达到学生对概念本质特征的自然建构,从而培养学生的创新精神和实践能力。

关键词:系统理念;周期函数;概念教学;创新能力

在宁波市教研室组织的展示课教研活动中,内容取材于人教A版必修四《1.4.2 正弦函数、余弦函数的性质》第一课时。笔者运用系统观中的整体性原则、层次性原则、联系性原则等理念设计周期函数概念教学,使这节课的结构框架能够在宏观上取得与整个知识体系较为一致的逻辑连贯性,从而减少学生知识构建的歧义和差异。由于教学设计立意高、系统性强,因此受到参会老师的一致好评。采用系统观指导下设计概念课是概念教学的一次新尝试,笔者愿与大家共同探讨。

一、课堂简录

1. 创设情境,引入新课

(播放视频)不知细叶谁裁出,二月春风似剪刀。首夏犹清和,芳草亦为歇。自古逢秋悲寂寥,我言秋日胜春朝。隆冬到来时,百花迹已绝。

师:四季轮回,周而复始。春夏秋冬,生生不息。每个季节都有属于自己的美丽,“春有百花秋有月,夏有凉风冬有雪”,只要我们用心去欣赏品味,岁月

^① 本文是中国教育科学规划2014年度中小学教育研究课题基金项目——高位提升惠及全民中小学课程建设和课堂教学改革的研究与实践(BHA150042)的研究成果之一。

无时不溢彩,四季无时不流韵。像这样以相同的间隔而重复出现的规律,即“周而复始”的规律,反映的是什么现象?

生1:四季轮回是周期现象。

师:生活中、自然界中、学科领域中还有周期现象吗?

生2:日出日落,月圆月缺,潮起潮落,国际传统节日,属相的简谐运动。

点评 生动有趣、周而复始的情境的创设,体现了系统观中联系性的原则,生活与数学是相互联系的,包括横向联系和纵向联系,这种联系性构成了系统赖以存在和发展的结构体系。深入洞悉教材编写意图的联系性,会对教学有更深刻的理解。周而复始现象不仅体现在生活中的方方面面,数学中也普遍存在,三角函数就是一种显性代表。利用周而复始现象的情境引入,引导学生摆脱周期函数认识的局限,认同周而复始现象是一种迭代思想,有助于周期函数知识的拓展和运用。

2. 数形结合,初探概念

问题1:在我们所学过的函数中,有没有具有“周而复始”变化规律的函数呢?

生3:正弦函数。

师:函数图象的特点如何?(几何画板展示如图1)

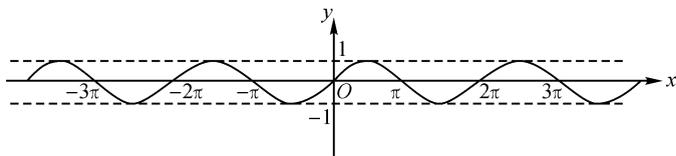


图1

生4:函数图象出现“周而复始”变化规律。

师:函数解析式有何特点?

生5:“周而复始”变化规律的代数刻画:从诱导公式 $\sin(x+2k\pi) = \sin x$ ($k \in \mathbf{Z}$) 可知,当自变量 x 的值增加 2π 的整数倍时,函数值重复出现。

问题2:数学上用周期性这个概念来定量地刻画这种“周而复始”的变化规律。对于任意的函数怎样定义周期函数呢?

生6:对于一个函数,自变量每增加一个不为零的定值,函数值重复出现,那么这个函数叫作周期函数。例如正弦函数就是周期函数。

师(追问):能否用数学符号表示?

(可以类比正弦函数,引导学生把 $\sin x$ 记作 $f(x)$,把 $2k\pi$ 记作 T)

师生一起总结周期函数的定义:对于函数 $f(x)$, 如果存在一个非零常数 T , 使得当 x 取定义域内的每一个值时, 都有 $f(x+T)=f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 叫作周期函数, 非零常数 T 叫作这个函数的周期。

师: 以前我们学习了函数的哪些性质?

生 7: 函数的单调性和奇偶性。

师: 函数的周期性定义与函数的单调性和奇偶性定义有什么区别和联系?

(先分组讨论, 然后各组代表发言, 最后老师总结它们的区别与联系)

点评 问题 1 利用几何画板直观形象给出函数的图象特点, 利用数形结合进行代数刻画。问题 2 遵循由特殊到一般的认知规律, 逐步对函数值重复出现这一现象加深认识, 最后上升到理论高度, 观察归纳出周期函数的概念。通过感知数学现象, 提升对数学的认识, 培养学生的分析、抽象和概括的能力。

3. 小组合作, 深究概念

角度一: 咬文嚼字

师: 为什么要取非零常数 T ?

生 8: $f(x+0)=f(x)$, 所有函数具有周期性, 也就没有讨论和研究的意义了。

师: 为什么 x 取定义域内的每一个值?

生 9: 如果只对定义域内的某些值成立, 例如: 对于函数 $y=\sin x, x \in \mathbf{R}$, $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin \frac{\pi}{6}$, 可以说 $\frac{2\pi}{3}$ 是函数的周期吗? 而从图象角度观察, $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right) \neq \sin \frac{\pi}{6}$, 得到 $\frac{2\pi}{3}$ 不是函数的周期。所以只是对某些 x 有 $f(x+T)=f(x)$, T 不一定是函数 $f(x)$ 的周期。

角度二: 刨根问底

师: 周期函数的定义域有什么要求? 例如: $y=\sin x(x \in [0, 2\pi])$ 是周期函数吗?

生 10: 可以从图象观察, 它不是周期函数。若 x 是定义域内的一个值, 则 $x+T(T \neq 0)$ 也一定属于定义域, 所以周期函数的定义域是无界的。

师: 周期函数的周期是否唯一? 请你求出正弦函数的周期是多少?

生 11: $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ 以及 $-2\pi, -4\pi, -6\pi, \dots$ 都是正弦函数的周期。事实上, 任何一个常数 $2k\pi (k \in \mathbf{Z}, k \neq 0)$ 都是它的周期。 $f(x+2T) = f(x+T) = f(x) = \dots, kT (k \neq 0)$ 是它的周期。

师: 如果从所有的周期中选定一个作为代表, 你会选谁呢?

生 12: 最小的一个正周期。

师: 如果在周期函数 $f(x)$ 的所有周期中存在一个最小的正数, 那么这个最小的正数叫作 $f(x)$ 的最小正周期。

师: 所有周期函数都存在最小正周期吗?

生 13: 对于常数函数 $f(x) = c (c \text{ 为常数})$, 所有非零实数都是它的周期, 而最小正周期是不存在的, 所以常数函数没有最小正周期。

角度三: 欣赏经典

师: 正弦函数、余弦函数的周期是多少? 最小正周期分别是多少?

生 14: $2k\pi (k \in \mathbf{Z}, k \neq 0)$ 都是它们的周期, 最小正周期都是 2π 。

师: 正弦函数、余弦函数具有“周而复始”的变化规律, 图象不仅周而复始, 而且波浪起伏。用“君看一叶舟, 出没风波里”(范仲淹《江上渔者》)来描述正弦函数、余弦函数的图象是再恰当不过了。正弦函数图象重复、对称, 不是平稳向前, 而是有起有伏, 就像我们的人生道路, 起起伏伏, 今天我们感受到了这种变化, 明天就用更好的心态把控我们的人生, 高峰时不要得意忘形, 低谷时不要灰心丧气。

点评 探究时采用先个人独立思考后小组合作互动的方式, 使学生通过思维碰撞, 擦出智慧的火花, 达到共同完成建构知识的目的; 使不同层次的学生都有所获, 让学生体会发现和创造的趣味感, 发展学生的创造性思维。本环节从不同维度对周期函数的定义进行剖析, 进一步加深了学生对周期函数概念的认识, 同时也教给学生从不同的角度观察身边事物的方法。正弦函数图象比喻人生起起伏伏、高峰低谷的教学设计为下节课研究三角函数的奇偶性、单调性和最值埋下了伏笔。

4. 编题交流, 巩固概念

问题 3: 请以正弦函数、余弦函数为原型, 编拟类似的函数, 要求编完题后同桌交换, 并求它们的周期。

经过 3 分钟的学生讨论, 把全班编的题归为如下四种类型:

$$(1) y = 3\cos x, x \in \mathbf{R}$$

$$(2) y = \sin 2x, x \in \mathbf{R}$$

$$(3) y = 2\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right), x \in \mathbf{R}$$

$$(4) y = |\sin x|, x \in \mathbf{R}$$

合作交流共同解答上述函数的周期。

师:请你从解答过程中归纳,函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$, $x \in \mathbf{R}$ 及函数 $y = A\cos(\omega x + \varphi)$, $x \in \mathbf{R}$ (其中 A, ω, φ 为常数,且 $A \neq 0, \omega > 0$) 的周期与解析式中的哪些量有关?

生 15:只与 ω 有关。

因为 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) = A\sin(\omega x + \varphi + 2\pi) = A\sin\left[\omega\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right] = f\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right)$ 。所以函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$, $x \in \mathbf{R}$ 及函数 $y = A\cos(\omega x + \varphi)$, $x \in \mathbf{R}$ (其中 A, ω, φ 为常数,且 $A \neq 0, \omega > 0$) 的周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 。

师:求函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$, $x \in \mathbf{R}$ 的周期一般有几种方法?

生 15:定义法;公式法;图象法。

点评 本环节充分调动了学生的积极性,引导学生自主编题、解题,培养学生创造性思维和合作精神,打造高效课堂。

5. 归纳小结,知识升华

请同学们思考:

- (1)本节课你学习了哪些内容? 函数周期概念与以前学过的哪些概念有关联?
- (2)本节课学习过程中运用了哪些数学思想方法?
- (3)在概括和运用周期函数概念的过程中你的体会如何?

(先分组讨论,然后各组代表发言,最后老师小结)

点评 采用问题启发式教学进行课堂小结,充分体现以生为本的教学理念。思考(1)是为了加深学生对所学周期函数概念的理解,把函数周期性与单调性、奇偶性等放在一起进行比较,将周期函数纳入学生知识结构的中心。思考(2)是帮助学生养成归纳总结知识的良好习惯,在学习过程中不但要掌握知识、运用知识、提升能力,还要重视数学思想方法的运用。思考(3)的作用是增强学生数学学习的自信心,鼓励学生对自己思维的合理性进行主动、自觉的判断,及时调整自己的思维过程,从而培养学生自我监控的能力。

二、课后反思

系统观念下的周期函数概念教学需要体现构建逻辑连贯概念的形成过程,通过课堂教学实践至少有以下三个方面值得反思。

1. 重视知识的整体性

本节课学生的认知冲突是如何认识“周而复始”的变化规律,这就要考察组成系统的各个要素及其相互关系。从三角函数的知识体系来看:系统的要素有用单位圆定义任意角的三角函数、三角函数线和诱导公式等,这些要素之间关系密切,互为支撑与依赖,如用单位圆定义任意角三角函数的作用在函数周期概念中得到淋漓尽致的显现。三角函数周期性的学习是对高中数学必修一中函数基本性质学习的深入,因此本节课将教学知识逻辑起点定位于自然界“周而复始”和正弦函数图象的变化规律上。先由生活中的实例开始,再到学生已经得到认知的三角函数图象,最后到概念的应用,经历了概念的产生、发展和形成的全过程。教学设计由浅入深,循序渐进,使学生从感性认识到理性认识,再到知识的升华。符合学生的认识规律,也凸显了知识的整体逻辑结构,为后续知识的学习打下了扎实的基础。

2. 关注目标的层次性

本课是研究正弦函数、余弦函数性质的第一个课时,有承上启下的作用。因此本课的教学目标应体现这一地位,具体有如下三个方面的目标层次:

(1)理解周期函数的概念,会求一些简单常见的函数的周期。能用定义法、公式法、图象法求函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi), x \in \mathbf{R}$ 的周期。

(2)探究正弦函数的周期性概念,体会数形结合和从特殊到一般的数学思想。通过类比函数单调性和奇偶性的研究方法,再次体会研究函数性质的基本思路,培养学生的创新精神。

(3)利用三角函数的图象呈周期变化的特点,比喻人生道路,使学生感受人生之路并不平坦,只有努力攀登才能到达顶峰,培养学生勇于探索,不怕困难的精神。

系统观要求下位系统目标应逐渐上升到它的上位系统目标中。为了达到理解函数周期性概念的系统目标,本节课在学生“周而复始”的意识基本形成后,接着从三个角度顺应和同化函数的周期定义,再运用定义法、公式法、图象法求三角函数的周期,最后由三角函数图象比喻人生道路,体现数学的人文价值。本节课的教学设计不是结论的简单告知,而是一种过程的经历,一种体验,一种感悟,立足于三角函数具有周期性的数学本质,关注思想方法的回归,体验生成过程,实现发展学生思维和智慧育人的教学价值理念。

3. 注重概念的关联性

系统观理念下的概念是相互依存、相互联系的。函数周期性与函数的定义域、值域、奇偶性和单调性等概念形成了“概念域”,系统下的“概念域”的联系是自然且合情合理的。本节课教学设计从“周而复始”的变化规律出发,通过实际模型,逐步

使语言精确化、符号化,通过“每隔一定时间出现”“函数值就重复出现”等语言逐步过渡到用定量来刻画这种“周而复始”的变化规律,从而给出函数的周期的定义。概念辨析阶段,将函数的周期性与奇偶性和单调性进行比较,充分考虑知识体系的关联性,为此教学设计中要更多地考虑学生可直接参与的探究活动,让学生经历用正弦函数图象分析归纳函数的周期概念的形成过程,重视数形结合的思想方法,体验从特殊到一般再到特殊的探究过程,从而感受研究函数性质的一般方法。课堂氛围轻松、自由、充满活力,无论是学生独立思考、师生(生生)对话还是小组探究,教师始终关注每个学生的真实思维活动,让学生在讨论、展示、交流中不断矫正、完善认知结构,凸显概念的关联性。

总之,概念教学要在概念的发生发展过程中揭示它的本来面目,要从系统的高度,设计学生参与揭示概念本来面目的教学活动,从整体、层次和联系中寻找要素,并与相关概念构成“概念域”,达到学生对概念本质特征的自然建构,从而培养学生的创新精神和实践能力。

参考文献:

- [1] 任伟芳,江一鸣. 历经三重境界探究椭圆性质的一个案例[J]. 中学教研(数学),2013,(10):23-26.
- [2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(实验)[M]. 北京:人民教育出版社,2003:4.
- [3] 张奠宙. 张奠宙数学教育随想集[M]. 上海:华东师范大学出版社,2013.

“倒数法”解决一类 $a_{n+1} = a_n + \frac{a_n^2}{f(n)}$ 型 通项放缩问题

奉化中学 杨启栋

摘要:近几年随着浙江省高考改革,数学中的数列问题越来越受到重视,尤其是一类 $a_{n+1} = a_n + \frac{a_n^2}{f(n)}$ 二次型递推,在各种模拟题甚至高考题中出现频繁。例如2015年浙江省高考理科数学最后一题就是此种题型。笔者认为解决此类问题的方法可概括为①变形,②放缩,③累加。变形关键在于构造 $\frac{1}{a_{n+1}}, \frac{1}{a_n}$ 之间的倒数齐次递推关系,即 $\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} = g(a_n)$,且要求 $\frac{1}{a_{n+1}}, \frac{1}{a_n}$ 系数相等;放缩难点在于将 $g(a_n)$ 放缩为一个可累加的 $h(n)$,这里我们需把握“度”的问题;最后利用累加法进行消项求和。笔者以课堂实录记录与学生探究的过程。

关键词: $a_{n+1} = a_n + \frac{a_n^2}{f(n)}$; 变形; 放缩; 累加; 课堂实录

一、课前准备,有的放矢

引例:已知数列 $\{a_n\}$, 满足 $a_n - a_{n+1} = a_n a_{n+1}, a_1 = 1$, 求 a_n 的通项公式.

变1:已知数列 $\{a_n\}$, 满足 $a_n - a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} a_n a_{n+1}, a_1 = 1$, 求证 $a_n \geq \frac{n}{2n-1}$.

引例:【学生】左右两边同除以 $a_n a_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 1$, 然后利用累加法可得

$$\frac{1}{a_n} = n, \therefore a_n = \frac{1}{n}.$$

变1:【学生】左右两边同除以 $a_n a_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{(n+1)n} = \frac{1}{n}$