R

最新课改版

浙大优学

PEIYOU TIGAO SHUQIBAN
CHUZHONG YINGYU XIANJIE JIAOCAI

培优提高暑期班
初中英语衔接教材

七升八

初中英语衔接教材编写组 编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

数学每日一题

高一分册

郑日锋 编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学每日一题.高一分册 /郑日锋编著.—杭州：浙江大学出版社，2016.5
ISBN 978-7-308-15737-7

Ⅰ.①数… Ⅱ.①郑… Ⅲ.①中学数学课—高中—习题集 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 072340 号

数学每日一题(高一分册)
郑日锋　编著

责任编辑　杨晓鸣
责任校对　余梦洁
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007)
(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版　杭州星云光电图文制作有限公司
印　　刷　杭州杭新印务有限公司
开　　本　889mm×1194mm　1/16
印　　张　15.5
字　　数　490 千
版 印 次　2016 年 5 月第 1 版　2016 年 5 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-15737-7
定　　价　35.00 元

前　言

数学是一门高度抽象、高度概括的学科，好比一座大厦，概念、公理、定理是基础，数学问题是主干，问题解决的策略是重心。一些学生在高中阶段能弄懂基础知识，也能解决基础题，但遇到一些新颖题就束手无策；一些学生基础知识扎实，也能解决一些新颖题，但或者耗时很多，或者思路狭窄，或者选择的方法不当。课外的辅导用书大都题量大，搞题海战术，往往在同一层次上重复知识、方法，学生做了课外的辅导书上的大量习题后只能提高到中等水平，很难实现超越，甚至有时适得其反，反而退步，原因何在？笔者的认识是重复操练难以提升数学素养与数学思维！对学生而言，需要的是高质量的数学问题。高质量的数学问题有5个衡量的要素：(1)来源于课本而高于课本；(2)帮助理解和强化方法；(3)提升数学的思维水平；(4)蕴涵重要的数学思想方法；(5)有利于变式、拓展、研究。有了问题，还需要解决问题的策略，这里的关键是怎么找到解决问题的思路。同时还需要相关题的探索，旨在提升认识的水平，形成知识、方法体系。

基于以上的认识，笔者多年来进行了教学尝试：每天在学生完成基本作业的同时，让学生做一题，而不是让学生去刷题，下一节课的前5分钟让学生轮流讲题，取得了较好的效果。(1)激发了学生学习数学的热情。(2)提高了数学交流的能力，每日一题成为学生探究数学问题的热门话题，同学之间经常交流优秀的解法或奇思妙解。(3)激发了学生研究问题的意识。在课堂上的前5分钟，当学生讲完后，笔者常启发学生思考此问题还有其他解法吗？还可作怎样的拓展？在教师的引领下，在课外学生也会提出各种各样的问题。(4)教学相长，每每看到学生提出的一些新问题及新方法、新策略，笔者感到很欣慰，收获良多。(5)轻负担高质量，笔者所任教的班级学生的高考数学成绩名列同类班级前茅，2014届所任教的两个普通班各有1人考上清华大学，各有2人考上上海交通大学，共3人考上复旦大学。

本书按问题——问题特征——问题的解答(多角度探索)——注意点——相关问题——答案与提示编写。考虑到期中、期末复习及节假日，每学期实际新课教学时间为15周左右，每周4课时，在每节新课后布置每日一题。

高一分册按照必修一、必修四、必修五(含选修4—5绝对值不等式)的顺序编写。

由于时间仓促，并限于水平，书中必有许多不当之处，敬请指正，不胜感激！

目　　录

高一第一学期

第一周　集合、函数的三要素

周一

题 1　已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid x^2-(a-2)x+1\geqslant 0\}$，$B=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$，$A\cup B=A$，求实数 a 的取值范围.

尝试解答：

【问题特征】集合的运算、集合的关系问题.

【问题的解答】

思路 1　利用一元二次方程实根的分布.

解法 1　$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$.

分两种情况讨论：

(1) 当 $A=\mathbf{R}$ 时，$\Delta=(a-2)^2-4\leqslant 0$，解得 $0\leqslant a\leqslant 4$.

(2) 当 $A\neq\mathbf{R}$ 时，$\Delta=(a-2)^2-4>0$，即 $a<0$ 或 $a>4$. 设方程 $x^2-(a-2)x+1=0$ 的两实根为 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，则 $A=(-\infty,x_1]\cup[x_2,+\infty)$.

由 $B\subseteq A$，得 $x_1<x_2\leqslant 1$ 或 $x_2>x_1\geqslant 2$.

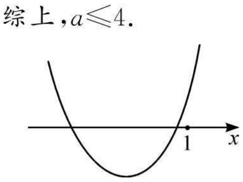
记 $f(x)=x^2-(a-2)x+1$，结合二次函数的图象(如图 1，2)得

$$①\begin{cases}\Delta>0,\\ f(1)\geqslant 0,\\ \dfrac{a-2}{2}<1,\end{cases}\text{或}②\begin{cases}\Delta>0,\\ f(2)\geqslant 0,\\ \dfrac{a-2}{2}>2.\end{cases}$$

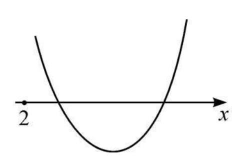
由①得 $a<0$. 由②得 $a\in\varnothing$.

因此当 $A\neq\mathbf{R}$ 时，$a<0$.

综上，$a\leqslant 4$.



(图 1)



(图 2)

思路 2　参数分离，转化为求函数的最值.

解法 2　$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$.

由 $B\subseteq A$，得当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$x^2-(a-2)x+1\geqslant 0$ 恒成立.

即当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$a\leqslant 2+x+\dfrac{1}{x}$ 恒成立.

设 $f(x)=2+x+\dfrac{1}{x}(1\leqslant x\leqslant 2)$，而 $f(x)_{\min}=4$ (当 $x=1$ 时取到)，因此 $a\leqslant 4$.

思路 3　先特殊化，再一般化.

解法 3　$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$.

由 $B\subseteq A$ 得，当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$x^2-(a-2)x+1$

$\geqslant 0$ 恒成立.

将 $x=1$ 代入不等式得 $a\leqslant 4$.

将 $x=2$ 代入不等式得 $a\leqslant \frac{9}{2}$.

综合得 $a\leqslant 4$.

若 $a\leqslant 4$，则 $-(a-2)\geqslant -2$，当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$x^2-(a-2)x+1\geqslant x^2-2x+1=(x-1)^2\geqslant 0$.

因此，$a\leqslant 4$.

【注意点】解法 1 容易忽略 $A=\mathbf{R}$ 的情况，解法 3 容易忽略一般情况的证明.

【相关问题】

1. 已知集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{x\mid ax+1=0\}$，若 $A\supsetneqq B$，求实数 a 的值.

【答案与提示】

$0,-1,-\frac{1}{2}$.

提示：若 $a=0$，$B=\varnothing$，适合条件；

若 $a\neq 0$，$B=\{-\frac{1}{a}\}$. 因为 $A\supsetneqq B$，

所以 $-\frac{1}{a}=1$ 或 2，故 $a=-1$ 或 $-\frac{1}{2}$.

综上，$a=0,-1,-\frac{1}{2}$.

解题心得：

2. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid x^2-4x+(a+1)(3-a)\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$，$A\cup B=B$，求实数 a 的取值范围.

【答案与提示】

$0\leqslant a\leqslant 2$.

提示：$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$.

不等式 $x^2-4x+(a+1)(3-a)\leqslant 0$，

可化为 $[x-(a+1)][x-(3-a)]\leqslant 0$.

(1) 当 $a+1>3-a$，即 $a>1$ 时，$A=\{x\mid 3-a\leqslant x\leqslant a+1\}$，由 $A\subseteq B$ 得 $\begin{cases}a>1,\\3-a\geqslant -1,\\a+1\leqslant 3,\end{cases}$ 解得 $1<a\leqslant 2$.

(2) 当 $a+1=3-a$，即 $a=1$ 时，$A=\{2\}$，满足 $A\subseteq B$.

(3) 当 $a+1<3-a$，即 $a<1$ 时，$A=\{x\mid a+1\leqslant x\leqslant 3-a\}$，由 $A\subseteq B$ 得 $\begin{cases}a<1,\\a+1\geqslant -1,\\3-a\leqslant 3,\end{cases}$ 解得 $0\leqslant a<1$.

综上，$0\leqslant a\leqslant 2$.

解题心得：

周二

题 2　设集合 $A=\{x \mid f(x)=x\}$，
$B=\{x \mid f(f(x))=x\}$.

(1)判断集合 A,B 的关系；

(2)设 $f(x)=x^2-x-3$，求集合 A,B；

(3)设 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的单调递增函数，是否有 $A=B$？说明理由.

尝试解答：

【问题特征】这是集合与函数的综合问题，涉及的知识有集合的包含关系、函数的单调性.

【问题的解答】

(1)**思路**　要证 $A\subseteq B$，只要证 A 的任意元素都是 B 的元素.

解　设 x_0 是集合 A 的任意元素，

则 $f(x_0)=x_0$，

所以 $f(f(x_0))=f(x_0)=x_0$，

即 $x_0\in B$.

因此 $A\subseteq B$.

(2)**思路**　解方程，并用整体思想.

解　方程 $f(x)=x$

化为 $x^2-x-3=x$，

即 $x^2-2x-3=0$，

解得 $x=-1$ 或 $x=3$.

所以 $A=\{-1,3\}$.

方程 $f(f(x))=x$

化为$(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3=x$，

即$(x^2-x-3)^2=x^2$，

即 $x^2-x-3=x$ 或 $x^2-x-3=-x$.

解得 $x=-1$ 或 $x=3$ 或 $x=\sqrt{3}$或 $x=-\sqrt{3}$.

所以 $B=\{-1,3,-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$.

(3)**思路**　举例发现 $A=B$，由(1)$A\subseteq B$，只要证明 $B\subseteq A$. 直接证明发生困难的情况下考虑用反证法.

解　由(1)$A\subseteq B$. 下证 $B\subseteq A$. 用反证法，假设 $B\subseteq A$不成立，则存在实数 t，使 $t\in B$，而 $t\notin A$. 即 $f[f(t)]=t$，而 $f(t)\neq t$.

若 $f(t)>t$，因为 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的单调递增函数，所以 $f(f(t))>f(t)>t$，所以 $f(f(t))>t$，这与 $f(f(t))=t$ 矛盾.

若 $f(t)<t$，同样得出矛盾.

所以假设不成立.

因此 $B\subseteq A$.

综合得 $A=B$.

【注意点】第(1)(2)小题属于代数推理问题，需要缜密的逻辑推理，第(3)小题用反证法证明时，归谬要对 $f(t)\neq t$ 分两种情况讨论.

【相关问题】

1. 集合 $M=\{x \mid x=12m+8n,m,n\in\mathbf{Z}\}$，$P=\{x \mid x=20p+16q,p,q\in\mathbf{Z}\}$，则 M，P 的关系是________.

【答案与提示】

$M=P$.

提示:对于任意 $x\in M$,

则存在 $m,n\in\mathbf{Z}$,$x=12m+8n$

$=[20\times(-1)+16\times2]m+(20\times2-16\times2)n$

$=20(-m+2n)+16(2m-2n)$,

因为 $m,n\in\mathbf{Z}$,

所以 $-m+2n,2m-2n\in\mathbf{Z}$,

所以 $x\in P$.

故 $M\subseteq P$.

同理 $P\subseteq M$.

因此 $M=P$.

解题心得:

2. 设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$,且集合 $A=\{x\mid f(x)=x,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x\mid f(f(x))=x,x\in\mathbf{R}\}$,如果 A 是只有一个元素的集合,则 A 与 B 的关系为 ( )

A. $A=B$　　B. $A\subset B$

C. $B\subset A$　　D. $A\cap B=\varnothing$

【答案与提示】

A.

提示:因为 A 为单元素集,

所以方程 $f(x)-x=0$ 有两个相等的实根 m,

于是 $f(x)-x=a(x-m)^2$.

即 $f(x)=a(x-m)^2+x$.

方程 $f(f(x))=x$.

化为 $a[a(x-m)^2+x-m]^2+a(x-m)^2+x=x$,

即 $a(x-m)^2\{[a(x-m)+1]^2+1\}=0$,

因为 $[a(x-m)+1]^2+1\neq0$,

所以 $x=m$.

因此 $B=A=\{m\}$.

解题心得:

周三

题 3　有 100 种食品，其中含维生素 A 的有 72 种，含维生素 C 的有 54 种，求同时含维生素 A，C 的食品种数的最大值和最小值.

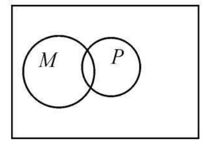
尝试解答：

【问题特征】这是有限集的元素个数的最值问题.

【问题的解答】

思路　利用“设 A,B 均为有限集，若 $A\subseteq B$，则 $\text{card}(A)\leqslant\text{card}(B)$”建立不等式.

解　设 M,P 分别表示含维生素 A，C 的食品组成的集合，由已知 $\text{card}(U)=100$，$\text{card}(M)=72$，$\text{card}(P)=54$.



本题就是求 $\text{card}(M\cap P)$ 的最大值与最小值.

一方面，由韦恩图，得

$$\text{card}(M\cup P)=\text{card}(M)+\text{card}(P)-\text{card}(M\cap P),$$

所以 $$\text{card}(M\cap P)=\text{card}(M)+\text{card}(P)-\text{card}(M\cup P).$$

因为 $M\cup P\subseteq U$，

所以 $\text{card}(M\cup P)\leqslant\text{card}(U)=100$.

所以 $\text{card}(M\cap P)\geqslant 72+54-100=26$.

因此 $\text{card}(M\cap P)$ 的最小值为 26.

另一方面，因为 $M\cap P\subseteq P$，

所以 $\text{card}(M\cap P)\leqslant\text{card}(P)=54$.

因此 $\text{card}(M\cap P)$ 的最大值为 54.

【注意点】

1. 解决本题利用了“若 A,B 均为有限集，则 $\text{card}(A\cup B)=\text{card}(A)+\text{card}(B)-\text{card}(A\cap B)$”. 对于三个有限集，也有类似的结论：“若 A,B,C 均为有限集，则 $\text{card}(A\cup B\cup C)=\text{card}(A)+\text{card}(B)+\text{card}(C)-\text{card}(A\cap B)-\text{card}(B\cap C)-\text{card}(C\cap A)+\text{card}(A\cap B\cap C)$.”同学们还可以把它们推广到 n 个有限集，请写出：

________________________________.

我们称以上结论为“容斥原理”.

2. 解决本题的方法可以形象地称为“拉挤法”，相当于固定 M，将 P 往外拉，便得到最小值；将 P 往里挤，便得到最大值.

【相关问题】

1. 40 名学生参加数学奥林匹克竞赛，他们必须解决一个代数学问题、一个几何学问题以及一个三角学问题. 具体情况如下表所述：

问题	解决问题的学生数
代数学问题	20
几何学问题	18

问题	解决问题的学生数
三角学问题	18
代数学问题和几何学问题	7
代数学问题和三角学问题	8
几何学问题和三角学问题	9

其中有 3 名学生一个问题都没有解决，则三个问题都解决的学生数是 ( )

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

【答案与提示】

A.

提示：设集合 $A=\{$解决代数学问题的学生$\}$，

$B=\{$解决几何学问题的学生$\}$，

$C=\{$解决三角学问题的学生$\}$，

依题意，$\mathrm{card}(A\cup B\cup C)=40-3=37$，

$\mathrm{card}(A)=20$，

$\mathrm{card}(B)=\mathrm{card}(C)=18$，

$\mathrm{card}(A\cap B)=7$，

$\mathrm{card}(A\cap C)=8$，

$\mathrm{card}(B\cap C)=9$.

由容斥原理，$\mathrm{card}(A\cup B\cup C)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)+\mathrm{card}(C)-\mathrm{card}(A\cap B)-\mathrm{card}(B\cap C)-\mathrm{card}(C\cap A)+\mathrm{card}(A\cap B\cap C)$，故 $\mathrm{card}(A\cap B\cap C)=5$.

解题心得：

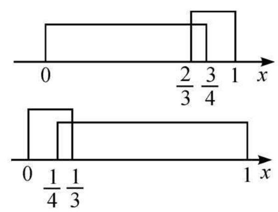
2. 设 $m,n\in\mathbf{R}$，集合 $M=\left\{x\mid m\leqslant x\leqslant m+\frac{3}{4}\right\}$，$P=\left\{x\mid n-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant n\right\}$，且 M，P 都是集合 $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$ 的子集. 如果把 $b-a$ 叫作集合 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 的“长度”，那么集合 $M\cap P$ 的长度的最小值是 ( )

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{12}$　　D. $\frac{5}{12}$

【答案与提示】

C.

提示：画出数轴，当 M 往最左边挤，P 往最右边挤；或当 M 往最右边挤，P 往最左边挤时集合 $M\cap P$ 的长度取最小值.



由图知，$M\cap P$ 的长度的最小值为 $\frac{1}{12}$.

解题心得：

周四

题 4　已知定义域为 **R** 的函数 $f(x)$ 满足 $f(f(x)-x^2+x)=f(x)-x^2+x$.

(1)若 $f(2)=3$,求 $f(1)$;

(2)若 $f(0)=a$,求 $f(a)$;

(3)若有且仅有一个实数 x_0,使 $f(x_0)=x_0$,求 $f(x)$的解析式.

尝试解答:

【问题特征】已知条件未给出函数 $f(x)$的类型,而是关于函数 $f(x)$满足的关系式,这类问题称为抽象函数问题.

【问题的解答】

(1)在条件等式中,令 $x=2$,

得 $f(f(2)-2)=f(2)-2$.

因为 $f(2)=3$,

所以 $f(1)=1$.

(2)在条件等式中,令 $x=0$,

得 $f(f(0))=f(0)$.

因为 $f(0)=a$,

所以 $f(a)=a$.

(3)由已知可得 $f(x)-x^2+x=x_0$.

即 $f(x)=x^2-x+x_0$.

令 $x=x_0$,

得 $x_0=x_0^2-x_0+x_0$,

解得 $x_0=0$ 或 $x_0=1$.

当 $x_0=0$ 时,$f(x)=x^2-x$.

使 $f(x)=x$ 的 x 的值为 0,2,不适合条件;

当 $x_0=1$ 时,$f(x)=x^2-x+1$.

使 $f(x)=x$ 的 x 的值只有 1,适合条件.

综上,$f(x)=x^2-x+1$.

【注意点】

1.方程 $f(x)=x$ 的实根称为函数 $f(x)$的不动点.

2.解决抽象函数问题的常见方法是“赋值法”,要结合已知及目标巧妙“赋值”.本题第(1)小题令 $x=2$,第(2)小题令 $x=0$,第(3)小题,因为要求出 x_0 的值,需建立关于 x_0 的方程,于是令 $x=x_0$.

【相关问题】

1.设函数 $f(x)$,$g(x)$满足下列条件:

(1)$f(-1)=-1$,$f(0)=0$,$f(1)=1$;

(2)对任意实数 x_1,x_2 都有 $f(x_1)f(x_2)+g(x_1)g(x_2)=g(x_1-x_2)$.

求 $g(0)$,$g(1)$,$g(2)$的值.

【答案与提示】

$g(0)=1$,$g(1)=0$,$g(2)=-1$.

提示:在(2)中令 $x_1=x_2=0$,

得 $g^2(0)=g(0)$.

所以 $g(0)=0$ 或 $g(0)=1$.

若 $g(0)=0$,令 $x_1=0$,$x_2=-x$,

得 $g(x)=0$.

再令 $x_1=x_2=1$，

得 $1+g^2(1)=g(0)=0$，这是不可能的.

所以 $g(0)=1$. 令 $x_1=x_2=1$，

得 $1+g^2(1)=1$，

故 $g(1)=0$.

令 $x_1=1, x_2=-1$，

得 $-1=g(2)$.

故 $g(2)=-1$.

解题心得：

2. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx$ 满足 $f(2)=0$，且 $f(x)=x$ 有等根.

(1)求 $f(x)$ 的解析式.

(2)是否存在实数 $m, n(m<n)$，使 $f(x)$ 的定义域和值域分别为 $[m,n]$，$[2m,2n]$. 若存在，求出 m，n；若不存在，说明理由.

【答案与提示】

(1) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x$.

提示：方程 $f(x)=x$ 化为 $ax^2+(b-1)x=0$，

因为它有等根，

所以 $b-1=0$，

即 $b=1$.

由 $f(2)=0$，

得 $4a+2=0$，

解得 $a=-\frac{1}{2}$.

因此 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x$.

(2)存在且 $m=-2, n=0$.

提示：由于 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}$，所以 $[2m,2n]\subseteq(-\infty,\frac{1}{2}]$，

即 $2n\leqslant\frac{1}{2}$，于是 $n\leqslant\frac{1}{4}$.

因此 $f(x)$ 在 $[m,n]$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 在 $[m,n]$ 上的值域为 $[f(m),f(n)]$.

故 $\begin{cases} f(m)=-\frac{1}{2}m^2+m=2m, \\ f(n)=-\frac{1}{2}n^2+n=2n, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} m=0 \text{ 或 } m=-2, \\ n=0 \text{ 或 } n=-2, \end{cases}$

又 $m<n$，所以 $m=-2, n=0$.

解题心得：

第二周　函数的基本性质

周一

题 5　设 $f(x)$ 对除 $x=0$ 及 $x=1$ 以外的一切实数 x 有意义，且 $f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x$，求 $f(x)$ 的解析式.

尝试解答：

【问题特征】这是函数方程问题，所谓函数方程就是含有未知函数的等式.

【问题的解答】

思路　利用赋值法——在函数定义域内，给自变量赋以某些特殊值或式，从而求出函数的解析式.

解　$f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x$，①

在①中以 $\frac{x-1}{x}$ 代 x，得

$f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(-\frac{1}{x-1}\right)=\frac{2x-1}{x}$，②

在①中以 $-\frac{1}{x-1}$ 代 x，得

$f\left(-\frac{1}{x-1}\right)+f(x)=\frac{x-2}{x-1}$，③

①+③−②得

$$2f(x)=1+x+\frac{x-2}{x-1}-\frac{2x-1}{x}=\frac{x^3-x^2-1}{x^2-x}.$$

因此，$f(x)=\frac{x^3-x^2-1}{2(x^2-x)}$.

【注意点】

用赋值法解函数方程，要有目标意识，从①到②的代换的目的是为了得到另一个关于 $f(x)$ 与 $f\left(\frac{x-1}{x}\right)$ 的方程，在这个过程中，又增加了一个新的"未知数"——$f\left(-\frac{1}{x-1}\right)$，因此需要再次代换，即从①到③的代换.

【相关问题】

1. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f(x)=2f\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\sqrt{x}-1$，求 $f(x)$ 的解析式.

【答案与提示】

$f(x)=\frac{2\sqrt{x}+1}{3}$.

提示：$f(x)=2f\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\sqrt{x}-1$，④

以 $\frac{1}{x}$ 代 x，得

$f\left(\frac{1}{x}\right)=2f(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}-1$,

即 $2f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\sqrt{x}+\sqrt{x}$,⑤

⑤×2−④,得 $3f(x)=2\sqrt{x}+1$.

因此,$f(x)=\frac{2\sqrt{x}+1}{3}$.

解题心得:

2.已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,且 $f(x)=2f(-x)+x^2-x$,求 $f(x)$ 的解析式.(此题与前一题属姐妹题)

【答案与提示】

$f(x)=x^2-\frac{x}{3}$.

提示:$f(x)=2f(-x)+x^2-x$,⑥

以 $-x$ 代 x,得

$f(-x)=2f(x)+x^2+x$,

即 $2f(x)=f(-x)-x^2-x$,⑦

⑦×2−⑥,得 $3f(x)=-3x^2-x$.

因此,$f(x)=-x^2-\frac{x}{3}$.

解题心得:

周二

题 6　求函数 $y=\dfrac{x^2-2x}{x^2-2x+3}$ 的值域.

尝试解答：

【问题特征】这是求函数的值域问题，所给的函数是分子、分母均为二次函数的分式函数.

【问题的解答】

思路 1　利用二次函数的最值及不等式的性质.

解法 1　将函数式化为 $y=1-\dfrac{3}{x^2-2x+3}=1-\dfrac{3}{(x-1)^2+2}$.

因为 $(x-1)^2+2\geqslant 2$，

所以 $0<\dfrac{1}{(x-1)^2+2}\leqslant\dfrac{1}{2}$.

所以 $-\dfrac{1}{2}\leqslant 1-\dfrac{3}{(x-1)^2+2}<1$.

即 $-\dfrac{1}{2}\leqslant y<1$.

因此，函数的值域为 $\left[-\dfrac{1}{2},1\right)$.

思路 2　将 $y=f(x)$ 看作关于 x 的方程，求值域就是求使方程有实根的 y 的取值范围.

解法 2　将函数式化为

$(y-1)x^2-2(y-1)x+3y=0$. ①

(1)若 $y-1=0$，

即 $y=1$，①无解，

所以 $y=1$ 不是函数的值域.

(2)若 $y-1\neq 0$，

即 $y\neq 1$，①有解，

等价于 $\Delta=4(y-1)^2-12y(y-1)\geqslant 0$.

即 $(y-1)(2y+1)\leqslant 0$.

解得 $-\dfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1$.

结合条件得 $-\dfrac{1}{2}\leqslant y<1$.

综上，得 $-\dfrac{1}{2}\leqslant y<1$.

因此，函数的值域为 $\left[-\dfrac{1}{2},1\right)$.

【注意点】

1. 解法 1 利用不等式的性质，先将函数式变形，然后从易求取值范围的式子(如本题中的 $(x-1)^2+2$)出发，再利用不等式的性质；解法 2 可以称为判别式法，此方法适用于分子、分母均为二次函数的分式函数或分子、分母其中之一为一次函数，另一为二次函数的分式函数.

2. 在解法 2 的过程中，容易忽视对 $y=1$ 这一特