李丽霞　骆舒心◇主编

考研线性代数讲义

KAOYAN

XIANXING DAISHU JIANGYI

电子科技大学出版社

李丽霞　骆舒心◇主编

考研线性代数讲义

KAOYAN XIANXING DAISHU JIANGYI

电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研线性代数讲义 / 李丽霞，骆舒心主编. —成都：电子科技大学出版社，2015.10

ISBN 978-7-5647-3288-2

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①李… ②骆… Ⅲ. ①线性代数-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 226101 号

考研线性代数讲义

李丽霞　骆舒心　主编

出　　版：电子科技大学出版社(成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦　邮编:610051)
策划编辑：李述娜
责任编辑：刘　愚
主　　页：www.uestcp.com.cn
电子邮箱：uestcp@uestcp.com.cn
发　　行：新华书店经销
印　　刷：北京市通县华龙印刷厂
成品尺寸：185mm×260mm　**印张**：8.25　**字数**：204 千字
版　　次：2015 年 10 月第一版
印　　次：2015 年 10 月第一次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5647-3288-2
定　　价：25.00 元

前　言

线性代数是研究生入学考试中高等数学科目的内容之一，其概念抽象，定理较多，各部分内容频繁渗透，而线性代数的考研题目综合性较强，有些知识点在本科教学中并不侧重，导致很多同学在复习线性代数时感觉比较困难. 为了使考研同学在较短的时间内掌握基本知识，了解考试重点和难点，提高复习效率及应试水平，编者在多年教学经验及对硕士研究生入学试题深入研究的基础上，依据线性代数考研大纲和多年考研线性代数辅导班的讲义编写了此书，对数一、数二、数三的同学具有普适性，其中数二、数三不要求的内容做了说明.

根据线性代数中各部分内容的联系，将全书分为三个部分：

第一部分　行列式及矩阵的运算；

第二部分　向量组与线性方程组，矩阵的秩；

第三部分　特征值与特征向量，矩阵的对角化与二次型.

每部分开始之前，首先给出了考试要求，让考生知道要考什么，知道哪些内容只需了解，哪些内容要重点掌握，这样在复习中才能做到有的放矢.

每部分包括基本内容、基本计算和典型例题解析.

基本内容部分：对考研大纲中所要求的知识点做了系统总结，帮助同学理解基本概念、公式和结论，达到融会贯通的目的.

基本计算部分：基本计算是典型例题的基础，非常重要. 对第一部分和第二部分中所涉及的基本计算给出了详细的总结. 第三部分中的基本计算在前面已经涉及，所以第三部分仅包括基本内容和典型例题解析.

典型例题解析部分：精选了考研题中常见的题型，对各类解题方法做了系统总结，帮助同学梳理解题思路，掌握解题方法和技巧，将知识真正转化为解题能力的提高.

每部分都精选了适量的练习题，并给出了简单解答，帮助同学巩固所学知识.

本书的编写既照顾了知识的连贯性，也注重了各部分知识的联系与渗透，使刚开始复习的同学不至于由于知识的跳跃性太大，而增加学习难度，又与考研要求紧密结合，使得学生有更好的复习效果. 本书内容全面详细，可以作为线性代数的考研复习用书，也可作为本科学生学习线性代数时的参考书.

本书由河北科技大学数学系的李丽霞和骆舒心编写. 由于编者水平所限，书中难免有一些不妥之处，恳请批评指正.

编　者
2015 年 7 月

目 录

第一部分　行列式及矩阵的运算

考试要求

1. 了解行列式的概念,掌握行列式的性质.

2. 会应用行列式的性质和按行(列)展开定理计算行列式.

3. 理解矩阵的概念,了解单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵、反对称矩阵和正交矩阵以及它们的性质.

4. 掌握矩阵的线性运算、乘法、转置以及它们的运算规律,了解方阵的幂与方阵乘积的行列式的性质.

5. 理解逆矩阵的概念,掌握逆矩阵的性质以及矩阵可逆的充分必要条件,理解伴随矩阵的概念,会用伴随矩阵求逆矩阵.

6. 理解(数二、三:了解)矩阵初等变换的概念,了解初等矩阵的性质和矩阵等价的概念,理解矩阵的秩的概念,掌握用初等变换求矩阵的秩和逆矩阵的方法.

7. 了解分块矩阵及其运算.(数三:了解分块矩阵的概念,掌握分块矩阵的运算法则)

基本内容

一、行列式

1. 行列式的定义

二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

一般地,称

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

为 n 阶行列式. 其中 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 表示由 n 个数 1, 2, …, n 构成的全排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

n 阶行列式为取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和,共 $n!$ 项.

2. 几个特殊的行列式

(1) 上(下)三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\text{(上三角行列式)}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\text{(下三角行列式)}.$$

(2) 副对角线的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}\text{(副上三角行列式)}.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}\text{(副下三角行列式)}.$$

(3) n 阶范德蒙(Vandermonde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j).$$

3. 行列式的性质

性质 1　行列式的行列互换,其值不变(转置不变).

性质 2　行列式的某两行(列)元素成比例,则行列式的值为零.

性质 3　如果行列式中有一行(列)的每个元素都是两个数的和,则行列式可拆成两个行列式的和, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质4　行列式的两行(列)互换,行列式变号.

性质5　如果行列式中某行(列)的元素有公因子,则可将公因子提到行列式外.

性质6　行列式中某一行(列)元素的 k 倍加到另一行(列),其值不变.

说明　用 $r_i \leftrightarrow r_j(c_i \leftrightarrow c_j)$ 表示第 i 行(列)与第 j 行(列)互换.

用 $r_i \div k(c_i \div k)$ 表示第 i 行(列)提出公因子 k,其中 $k \neq 0$.

用 $r_i + kr_j(c_i + kc_j)$ 表示第 i 行(列)的元素加上第 j 行(列)元素的 k 倍.

4. 行列式的展开定理

(1) 余子式,代数余子式

在 n 阶行列式中,将元素 a_{ij} 所在的行与列上的元素划去,剩余元素按照原来的相对位置构成的 $n-1$ 阶行列式,称为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij}. 称 $\boldsymbol{A}_{ij}=(-1)^{i+j}\boldsymbol{M}_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

注　M_{ij} 及 A_{ij} 只与元素所在的位置有关,与元素本身的值无关.

(2) 行列式按行(列)的展开定理

n 阶行列式等于它的任一行(列)的各元素与其代数余子式的乘积之和,即

$$\boldsymbol{D}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\boldsymbol{A}_{ik}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\text{或}\ \boldsymbol{D}=\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\boldsymbol{A}_{kj}(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

n 阶行列式的任一行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零,即当 $i \neq j$ 时,有 $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\boldsymbol{A}_{jk}=0$, $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\boldsymbol{A}_{kj}=0$.

以上两条合起来,用一个公式来表达,即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\boldsymbol{A}_{jk}=\begin{cases}\boldsymbol{D},\ i=j,\\ 0,\ i\neq j,\end{cases} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\boldsymbol{A}_{kj}=\begin{cases}\boldsymbol{D},\ i=j,\\ 0,\ i\neq j.\end{cases}$$

例 1.1　设 $D=\begin{vmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ * & * & * & * \end{vmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}_{41}+\boldsymbol{A}_{42}+\boldsymbol{A}_{43}+\boldsymbol{A}_{44}=$ ____ .

解　原式 $=\sum_{k=1}^{4} a_{3k}\boldsymbol{A}_{4k}=0$.

例 1.2　设 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$,则 $3\boldsymbol{M}_{31}+\boldsymbol{M}_{32}+\boldsymbol{M}_{33}-2\boldsymbol{M}_{34}=$ ____ .

解法一　转化为一个新行列式计算:

原式 $=3\boldsymbol{A}_{31}-\boldsymbol{A}_{32}+\boldsymbol{A}_{33}+2\boldsymbol{A}_{34}$

$$=\begin{vmatrix}1&-1&0&1\\-1&0&2&1\\3&-1&1&2\\3&0&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&0&1\\0&-1&2&2\\0&2&1&-1\\0&1&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&2&2\\2&1&-1\\1&0&0\end{vmatrix}=-4.$$

解法二 直接计算 $M_{3j}(j=1,2,3,4)$.（略）

二、矩阵及其基本运算

1. 矩阵的定义

由 $m\times n$ 个数排成的数表

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

称为 $m\times n$ 矩阵，简记为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$(a_{ij})_{m\times n}$，其中 a_{ij} 表示 $\boldsymbol{A}$ 的 i 行 j 列元素.

注 1　同型矩阵：$m\times n$ 表示矩阵的大小，如果两个矩阵大小相同，就说它们同型.

注 2　相等矩阵：若两个同型矩阵的对应元素都相等，就说这两个矩阵相等.

注 3　行(列)矩阵：若 $m=1$，就称 $\boldsymbol{A}$ 为行矩阵(行向量)；若 $n=1$，就称 $\boldsymbol{A}$ 为列矩阵(列向量).

注 4　矩阵与向量组的关系：矩阵可由其行向量组或列向量组表示，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n),$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})(i=1,2,\cdots,m)$，$\boldsymbol{\beta}_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{mi})^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,n)$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组和列向量组.

注 5　方阵：若 $m=n$，就称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，可简记为 $\boldsymbol{A}_n$.

注 6　几种常用的特殊矩阵：

$m\times n$ 的零矩阵　$\boldsymbol{O}_{m\times n}=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$.

n 阶三角矩阵　$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$(上三角矩阵)；$\begin{pmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$(下三角矩阵).

特殊地，n 阶对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$. n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}$.

2. 矩阵的运算

(1) 矩阵的线性运算——加法与数乘

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$.

加法：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$.

数乘：$k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}$.

负矩阵：$-\boldsymbol{A}=(-1)\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}$.

减法：$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$.

矩阵的线性运算满足的运算规律：

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 为同型矩阵，k, l 为常数，则有

① $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$； ② $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

③ $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$； ④ $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$；

⑤ $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$； ⑥ $(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})=l(k\boldsymbol{A})$；

⑦ $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$； ⑧ $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$.

(2) 矩阵的乘法运算

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，称矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\ (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n).$$

注 1　只有 $\boldsymbol{A}$ 的列数 $=\boldsymbol{B}$ 的行数时，$\boldsymbol{AB}$ 才有意义，且 $\boldsymbol{AB}$ 的行数 $=\boldsymbol{A}$ 的行数，$\boldsymbol{AB}$ 的列数 $=\boldsymbol{B}$ 的列数.

注 2　矩阵乘法不满足交换律：一般情况下，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

如：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, 显然，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换.

如 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 n 阶单位矩阵 E 满足 $\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{A}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 可交换.

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 n 阶零矩阵 $\boldsymbol{O}$ 满足 $\boldsymbol{AO}=\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{O}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{O}$ 可交换.

注 3　矩阵乘法不满足消去律：即若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，当 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 时，一般不能推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$；若 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{CA}$，当 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 时，一般不能推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$. 如：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, 显然，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，但 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$.

注 4　矩阵乘法不满足零因子律：若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$（或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$），一般不能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

如：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, 显然，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$, 但是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$.

注 5　矩阵乘法满足的运算规律：

① $(AB)C=A(BC)$；$k(AB)=(kA)B=A(kB)$；

② $A(B+C)=AB+AC$；$(A+B)C=AC+BC$.

(3) 矩阵的幂运算

设 A 是 n 阶方阵，k 为正整数，k 个 A 相乘，记为 A^k，规定 $A^0=E$.

注 1　矩阵的幂运算满足的运算规律：设 k，l 为正整数，则 $A^kA^l=A^{k+l}$；$(A^k)^l=A^{kl}$.

注 2　由于矩阵乘法不满足交换律，所以一般地，$(AB)^k\neq A^kB^k$，但当 $AB=BA$ 时，$(AB)^k=A^kB^k$，从而有

$$A^2-B^2=(A-B)(A+B);$$
$$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2);$$
$$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2);$$
$$(A+B)^n=A^n+C_n^1A^{n-1}B+\cdots+C_n^kA^{n-k}B^k+\cdots+C_n^nB^n.$$

(4) 矩阵的多项式

设 A 是 n 阶方阵，$f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是一个一元 m 次多项式，用 A 代替 x，得到矩阵 A 的多项式 $f(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0E$.

如：$f(A)=2A^3-A^2+3A+4E$ 是一个矩阵多项式，其中 $f(x)=2x^3-x^2+3x+4$.

注 1　n 阶方阵的多项式还是一个 n 阶方阵.

注 2　矩阵多项式是可交换的. 即设多项式 $f(x)=g(x)h(x)$，则

$$f(A)=g(A)h(A)=h(A)g(A).$$

如：
$$(E-2A)(E+A)=(E+A)(E-2A)$$

(5) 矩阵的转置

设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵，称

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为 A 的转置，记为 A^{T}（或 A'）.

转置矩阵有如下性质：

① $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$；　② $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$；　③ $(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$；　④ $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

对称矩阵：若 n 阶方阵 A 满足：$A_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，即 $A^{\mathrm{T}}=A$，则称 A 为对称矩阵.

反对称矩阵：若 n 阶方阵 A 满足：$a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，即 $A^{\mathrm{T}}=-A$，则称 A 为反对称矩阵.

如：$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ 为 3 阶对称矩阵，$B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 为 3 阶反对称矩阵.

注　奇数阶反对称矩阵的行列式等于零.

三、矩阵的秩

1. k 阶子式

在矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 中，任意选取 k 行与 k 列，位于这些行列交叉处的 k^2 个数按照原来的相对位置构成的 k 阶行列式，称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 阶子式，记作 $\boldsymbol{D}_k$.

2. 矩阵的秩

在矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 中，若有某个 r 阶子式不为零，而所有的 $r+1$ 阶子式（如果有的话）全为零，就称 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，记作 $R(\boldsymbol{A})=r$ 或 $r(\boldsymbol{A})=r$.

显然，若 $\boldsymbol{A}$ 有一个 r 阶子式不为零，则 $R(\boldsymbol{A})\geqslant r$；若 $\boldsymbol{A}$ 的所有的 $r+1$ 阶子式全为零，则 $R(\boldsymbol{A})\leqslant r$.

如：由于 3 阶反对称矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & -2 & -1\\ 2 & 0 & -3\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$ 有一个 2 阶子式 $\begin{vmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=4\neq 0$，而唯一的一个 3 阶子式，即 $|\boldsymbol{B}|=0$，所以 $R(\boldsymbol{B})=2$.

如：行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -4 & 1\\ 0 & 4 & 3 & -5 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 有一个 3 阶子式 $\begin{vmatrix}1 & 2 & -4\\ 0 & 4 & -5\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=4\neq 0$，而所有的 4 阶子式全为零，所以 $R(\boldsymbol{A})=3$.

注 1　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩即为 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式的阶数.

注 2　规定零矩阵的秩为零. 因此有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})=0$.

注 3　行阶梯形矩阵的秩即为其非零行的行数.

注 4　非零行（列）向量的秩为 1.

3. 满秩矩阵

若 $R(\boldsymbol{A}_{m\times n})=m$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 行满秩；若 $R(\boldsymbol{A}_{m\times n})=n$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 列满秩；若 $R(\boldsymbol{A}_{n\times n})=n$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满秩.

注 1　n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满秩 $\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

注 2　一般来讲，矩阵乘法不满足消去律，但当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满秩（或列满秩）时，由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 可得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$；当 $\boldsymbol{A}$ 满秩（或行满秩）时，由 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{CA}$ 可得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

例 1.3　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 的矩阵，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}$，以下选项（　　）是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 的充分条件.

(A) $R(\boldsymbol{B})=m$　(B) $R(\boldsymbol{B})=n$　(C) $m=n$　(D) $\boldsymbol{B}$ 是任意非零矩阵

解　$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{EB}$，当 $\boldsymbol{B}$ 满秩或行满秩即 $R(\boldsymbol{B})=n$ 时，有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$. (B) 正确.

4. 关于矩阵秩的几个重要结果

(1) $R(\boldsymbol{A}_{m\times n})\leqslant\min\{m, n\}$；

(2) $k\neq 0$ 时，$R(k\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})$；

(3) $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$；

(4) $R(\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times s})\leqslant\min\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\}$；

(5) $R(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$；

(6) $R(\boldsymbol{A})=1 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 为非零列向量;

(7) 若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times s}=\boldsymbol{O}$,则 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n$,其中 n 为 $\boldsymbol{A}$ 的列数或 $\boldsymbol{B}$ 的行数;

(8) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 的矩阵,$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶,n 阶的满秩矩阵,则

$$R(\boldsymbol{PAQ})=R(\boldsymbol{PA})=R(\boldsymbol{AQ})=R(\boldsymbol{A});$$

(9) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 的矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times s$ 的矩阵,若 $R(\boldsymbol{A})=n$,则 $R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{B})$;若 $R(\boldsymbol{B})=n$,则 $R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{A})$.

例 1.4 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4×3 的矩阵,$R(\boldsymbol{A})=2$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$, 则 $R(\boldsymbol{AB})=$______.

解 因为 $|\boldsymbol{B}|=10\neq 0$,所以 $R(\boldsymbol{B})=3$,即 $\boldsymbol{B}$ 满秩,所以 $R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{A})=2$.

四、矩阵的逆矩阵

1. 逆矩阵的定义

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,如果存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$,使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵,记为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

注 1 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则其逆矩阵唯一.

注 2 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$,则 $\boldsymbol{A}$ 可逆,且 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

注 3 负幂:设 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 定义 $\boldsymbol{A}^{-k}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{k}(k=1, 2, \cdots)$.

2. 逆矩阵的性质

设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵,数 $\lambda\neq 0$,则有

(1) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$;　　(2) $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$;

(3) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$;　　(4) $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

3. 方阵的行列式

方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$的行列式, 记作 $\det\boldsymbol{A}$, 或者 $|\boldsymbol{A}|$.

若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异(满秩)矩阵;若 $|\boldsymbol{A}|=0$,称 $\boldsymbol{A}$ 为奇异(降秩)矩阵.

方阵的行列式的性质:设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵,则有

(1) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$;　　(2) $|\lambda\boldsymbol{A}|=\lambda^{n}|\boldsymbol{A}|$,$\lambda$ 为常数;

(3) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$;　　(4) $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$(其中 $\boldsymbol{A}$ 可逆).

例 1.5 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵,$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则有(　　).

(A) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$　　(B) $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$

(C) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$　　(D) $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$

解 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 可得: $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=0$,即 $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$. (B) 正确.

4. 伴随矩阵

(1) 伴随矩阵的定义

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$为 n 阶方阵,$\boldsymbol{A}_{ij}$为 $|\boldsymbol{A}|$中元素 a_{ij}的代数余子式,称 n 阶方阵

$$\boldsymbol{A}^{*}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{A}_{ij})^{\mathrm{T}}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

如:2 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$(主对角线上的元素对调,副对角线上的元素变号).

(2) 关于伴随矩阵的重要公式(其中 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵)

① $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$(明星公式); ② $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$;

③ $(k\boldsymbol{A})^*=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$; ④ $(\boldsymbol{AB})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$;

⑤ $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$(其中 $\boldsymbol{A}$ 可逆); ⑥ $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$;

⑦ $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$.

由公式①可得:当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^*$ 均可逆,且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*,(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}.$$

注 $\boldsymbol{A}$ 可逆$\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

(3)$\boldsymbol{A}^*$的秩与 $\boldsymbol{A}$ 的秩的关系

$$R(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})=n, \\ 1\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})=n-1, \\ 0\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})<n-1. \end{cases}$$

例 1.6 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, 若 $R(\boldsymbol{A}^*)=1$,则( ).

(A) $a=b$ 或 $a+2b=0$ (B) $a=b$ 且 $a+2b\neq 0$

(C) $a\neq b$ 且 $a+2b=0$ (D) $a\neq b$ 且 $a+2b\neq 0$

解 因为 $R(\boldsymbol{A}^*)=1$,所以 $R(\boldsymbol{A})=2$,因此 $|\boldsymbol{A}|=(a+2b)(a-b)^2=0$,但当 $a=b$ 时,$R(\boldsymbol{A})=1$ 不合题意,所以 $a+2b=0$. (C)正确.

说明:由 $|\boldsymbol{A}|=0\Rightarrow R(\boldsymbol{A})<3$,不一定就是 $R(\boldsymbol{A})=2$,所以一定要分情况讨论.

例 1.7 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times 3}$满足 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,若 a_{11}, a_{12}, a_{13}为 3 个相等的正数,则 a_{11}为( ).

(A)$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (B) 3 (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\sqrt{3}$

解 由 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 知 $\boldsymbol{A}_{ij}=a_{ij}(i, j=1, 2, 3)$,所以 $|\boldsymbol{A}|=\sum_{k=1}^{3}a_{1k}\boldsymbol{A}_{1k}=\sum_{k=1}^{3}a_{1k}{}^2=3a_{11}{}^2\neq 0$.

又由 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 得 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$,即 $|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}|$,所以 $|\boldsymbol{A}|=0$(舍去)或 $|\boldsymbol{A}|=1$,因此 $3a_{11}{}^2=1$,得 $a_{11}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. (A)正确.

说明:本题还可证明 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵,请自己练习.

5. 矩阵可逆的判断方法

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆(即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 且 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$)

$\Leftrightarrow\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$(或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$);

$\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq 0$;

$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})=n$;