线性代数

◎ 主编　柴英明　王 璐　郑志静

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

线 性 代 数

主　编　柴英明　王　璐　郑志静

副主编　谢小凤　丁志瑛　何　曦

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书共分六章，内容包括行列式、矩阵、向量组及线性方程组的解、矩阵的特征值与特征向量、二次型、线性空间和线性变换等。以上各章每节之后都配有一定数量的习题，书后附有习题参考答案。

本书可作为高等院校非数学专业类线性代数的教材，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 柴英明，王璐，郑志静主编. —北京：北京理工大学出版社，2018.8
ISBN 978-7-5682-6043-5

Ⅰ. ①线…　Ⅱ. ①柴…　②王…　③郑…　Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材
Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 181786 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 /（010）68914775（总编室）
（010）82562903（教材售后服务热线）
（010）68948351（其他图书服务热线）
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 /
开　　本 / 710 毫米×1000 毫米　1/16
印　　张 / 11
字　　数 / 212 千字
版　　次 / 2018 年 8 月第 1 版　2018 年 8 月第 1 次印刷
定　　价 / 45.00 元

责任编辑 / 陈莉华
文案编辑 / 陈莉华
责任校对 / 黄拾三
责任印制 / 李志强

前　言

“线性代数”课程是高等院校工科、经济和管理类本科生的一门重要的基础课，它不仅为学习专业知识奠定必要的基础，而且在培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、自主学习能力、创新能力上都具有非常重要的作用。

本书由多年从事线性代数教学一线的教师，遵循教育部制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，以 TOPCARES–CDIO 教育教学理念为指导思想，立足普通高等院校应用型人才培养目标的需要，结合专业需求以及专任教师多年的教学经验编写而成。在本书的编写过程中，我们首先充分考虑到线性代数较为抽象的特点，注重直观简约，力求描述浅显易懂；其次调整了结构，内容由浅入深，梯次渐进，通俗易懂，既宜于教师因材分层讲授，也便于学生循序渐进自学；此外，增加了 R 语言实验部分，培养学生利用数学和计算机解决实际问题的能力。

本书由柴英明、王璐和郑志静担任主编，谢小凤、丁志瑛、何曦担任副主编，具体编写分工为：郑志静编写第一章，丁志瑛编写第二章，王璐编写第三章，谢小凤编写第四章，何曦编写第五章和第六章，最后由柴英明统审全书。

限于编者的水平，书中谬误之处难免，恳请读者批评指正。

编　者

2018 年 4 月

目　　录

第一章

行　列　式

本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及计算方法，并介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆法则.

下面从行列式的产生开始，一起学习行列式.

第一节　二、三阶行列式

行列式的概念最早出现于线性方程组的求解. 下面以二元线性方程组为例，还原行列式的产生过程.

设有二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (2) \end{cases}$

用消元法求解.

$(1)\times a_{22} - (2)\times a_{12}$，得：

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，得：

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

同理可得：

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

这就是一般二元线性方程组的解公式.

但这个公式不好记忆，应用时不方便. 同时可联想，多元线性方程组的解公

式是否更为复杂？因此，便引进新的符号来表示上述解公式，这就是行列式的起源，同时具有扩展性.

一、二阶行列式

定义 1 由 4 个数 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 及双竖线“$||$”组成的符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为二阶行列式. 其中 a_{ij} 表示这个元素所在位置为第 i 行第 j 列.

构成：二阶行列式含有两行、两列. 横排的数构成行，纵排的数构成列. 行列式中的数称为行列式的元素，相等的行数和列数“二”称为行列式的阶.

含义：它按规定的方法表示元素 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 的运算结果，即为：由左上至右下的两元素之积 $a_{11}a_{22}$，减去右上至左下的两元素之积 $a_{12}a_{21}$. 其中每个积中的两个数均来自不同行且不同列.

或者说：二阶行列式是这样的两项的代数和，从左上角到右下角的对角线（又叫行列式的主对角线）上两个元素的乘积减去从右上角到左下角的对角线（又叫副对角线）上两个元素的乘积，即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$-$ $\qquad$ $+$

此称为对角线法则.

一般将行列式记为 D，取自行列式的英文单词 determinant 的首字母，后面还会用 det（ • ）表示对 • 做行列式计算.

例 1 求 $D=\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ 的值.

解：$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5\times 2-(-1)\times 3 = 13$.

例 2 当 λ 为何值时，行列式 $D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ 的值为 0?

解：因为 $D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2-3\lambda=\lambda(\lambda-3)$，要使 $\lambda(\lambda-3)=0$，须使 $\lambda=0$ 或 $\lambda=3$，即知，当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=3$ 时，行列式 $D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ 的值为 0.

于是，将二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ 的解 $\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$ 中的两个不同分子，以及一个共同的分母，按其在方程组中的排列方法，以及二阶行列式的运算规律，可令：解中的分母，亦称方程组的系数行列式，为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

解中未知数 x_1 的分子，亦称 x_1 的分子行列式，为

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}b_1 - a_{12}b_2;$$

解中未知数 x_2 的分子，亦称 x_2 的分子行列式，为

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

其中，系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 是由方程组中两未知数 x_1、x_2 的系数按其原有的相对位置排列而成的；x_1 的分子行列式 $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ 是将系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 中的第 1 列换成方程组的常数项而得到；x_2 的分子行列式 $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ 则是把系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 中的第 2 列换成方程组的常数列而得到.

这样用行列式来表示方程组的解，就得到如下简便、整齐，便于记忆与运算的形式（称为克莱姆法则），即当 $D \neq 0$ 时成立

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

例 3 求解二元线性方程组 $\begin{cases} 5x + 4y = 8 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}$.

解：由于系数行列式 $D = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 16 = 9 \neq 0$，知该方程组有解，

再由于 $D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 40 - 24 = 16$，$D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 30 - 32 = -2$，

得方程组的解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{16}{9}$， $x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-2}{9}$.

似乎这样表示线性方程组的解比原来更为烦琐，但这创造了多元线性方程组解的公式及其规律性的解法，并为用计算机程序求解多元线性方程组打下了良好的基础；更为下一步学习矩阵知识，为学习高级、大型的管理知识做好了准备.

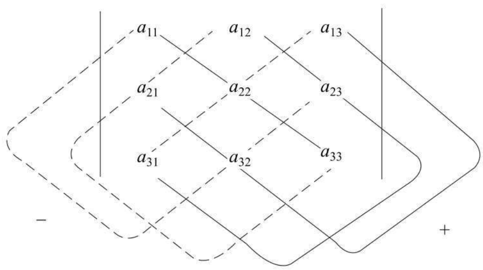
二、三阶行列式

与二阶行列式相仿，对于三元线性方程组做类似的讨论，得到三阶行列式.

定义 2 在双竖线“| |”内，排成三行三列的 9 个数组成的符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，称为三阶行列式.

构成：三阶行列式含有三行、三列. 横排的数构成行，纵排的数构成列. 行列式中的数称为行列式的元素，相等的行数和列数“三”称为行列式的阶.

含义：三阶行列式按规定的方法表示 9 个元素的运算结果，为 6 项的代数和，每项均为来自不同行不同列的三个元素之积，其符号的确定如下所示：



从图中可见，三阶行列式是这样的 6 项的代数和：从左上角到右下角的每条实连线上，来自不同行不同列的三个元素的乘积，此项符号为正；从右上角到左下角的每条虚连线上，来自不同行不同列的三个元素的乘积，此项符号为负. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

此为三阶行列式的“对角线法则”，另外有一种更为方便，但仅适用于三阶行列式展开计算的方法——沙路法：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$
$$a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

例 4　求行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$的值.

解：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}=1\times0\times6+2\times5\times(-1)+3\times4\times0-1\times5\times0-2\times4\times6-3\times0\times(-1)$

$$=-10-48=-58.$$

类似于二元线性方程组的行列式解公式，三元线性方程组也有其系数行列式以及相应未知数的分子行列式，得到如下解法（克莱姆法则）：

记三元线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$的系数行列式为

$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$x_1$的分子行列式为$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$x_2$的分子行列式为

$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$，$x_3$的分子行列式为$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$，则当$D\neq0$时，方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 5　求解线性方程组$\begin{cases} 5x_1+x_2+2x_3=2 \\ 2x_1+x_2+x_3=4 \\ 9x_1+2x_2+5x_3=3 \end{cases}$.

解：由于$D=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 5 \end{vmatrix}=25+9+8-(10+10+18)=42-38=4\neq0$，因此方

程组有解，再计算各分子行列式，得

$$D_1=\begin{vmatrix}2&1&2\\4&1&1\\3&2&5\end{vmatrix}=-1，\quad D_2=\begin{vmatrix}5&2&2\\2&4&1\\9&3&5\end{vmatrix}=23，\quad D_3=\begin{vmatrix}5&1&2\\2&1&4\\9&2&3\end{vmatrix}=-5，$$

即得方程组的解为：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-1}{4}，\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{23}{4}，\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-5}{4}.$$

练习题（一）

1. 用对角线法则计算下列二、三阶行列式.

（1）$\begin{vmatrix}3&1\\2&-2\end{vmatrix}$；　　（2）$\begin{vmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix}a-1&-1\\1&a^2+a+1\end{vmatrix}$；　　（4）$\begin{vmatrix}1&2&3\\3&1&4\\8&9&5\end{vmatrix}$；

（5）$\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&-1&1\end{vmatrix}$；　　（6）$\begin{vmatrix}1&2&3\\2&-2&-1\\-3&4&-5\end{vmatrix}$.

2. 求解下列线性方程组.

（1）$\begin{cases}2x_1+4x_2=1\\x_1+3x_2=2\end{cases}$；　　（2）$\begin{cases}3x-y-5=0\\x+2y-1=0\end{cases}$；

（3）$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=-2\\2x_1+x_2+-3x_3=1\\-x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$.

3. a,b 满足什么条件时有 $\begin{vmatrix}a&b&0\\-b&a&0\\1&0&1\end{vmatrix}=0$？

第二节　n 阶行列式

为了方便给出 n 阶行列式的定义，先从逆序数说起.

一、排列的逆序数及对换

定义 1 由 1，2，…，n 组成一个有序数组称为一个 n 级排列（也叫作这 n 个元素的一个全排列，简称排列）.

例如：1234 是一个 4 级排列，3412 也是一个 4 级排列，而 52341 是一个 5 级排列. 由 1，2，3 组成的所有 3 级排列为：123，132，213，231，312，321，共有 $3!=6$ 个.

n 级排列一共有 $n!$ 个. 而在 n 级排列中，$1234\cdots n$ 这个排列具有自然顺序，称为一个自然排列或标准排列.

定义 2 在一个 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，如果有较大的数 p_t 排在较小的数 p_s 的前面（$p_s<p_t$），则称 p_t 与 p_s 构成一个逆序，一个 n 级排列中逆序的总数，称为这个**排列的逆序数**，记成 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

例如，在 4 级排列 3412 中，31，32，41，42 各构成一个逆序，所以，排列 3412 的逆序数 τ（3412）= 4. 同样可计算排列 52341 的逆序数为 τ（52341）= 7.

下面讨论计算逆序数的方法，为了讨论方便，不妨设一个 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，考虑元素 $p_i(i=1,2,\ldots,n)$，如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个，就说 p_i 这个元素的逆序数是 t_i（个）. 全体元素的逆序个数之总和：$\tau(p_1p_2\cdots p_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n$，即为这个排列的逆序数.

例 1 求排列 52431 的逆序数.

解：在排列 52431 中：

5 排在首位，前面没有其他的数，逆序数为 0；

2 的前面有一个数（5）比 2 大，故逆序数为 1；

4 的前面有一个数（5）比 4 大，故逆序数为 1；

3 的前面有两个数（5，4）比 3 大，故逆序数为 2；

1 的前面有四个数（5，2，4，3）比 1 大，故逆序数为 4；

于是这个排列的逆序数为 τ（52431）$=0+1+1+2+4=8$.

容易看出，自然排列的逆序数为 0.

定义 3 若排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 是奇数，则称此排列为**奇排列**；逆序数是偶数的排列，称为**偶排列**.

例如：排列 3412 是偶排列；排列 52341 是奇排列；自然排列 $123\cdots n$ 是偶排列.

定义 4 把一个排列中的某两个元素位置对调，而其他元素不动，就得到了另一个排列，这种变换称为一个对换.

例如：排列 52341 中的 3 与 4 对换，就得到新排列 52431.

定理 1 任何一个排列经过一次对换，排列改变奇偶性. 即奇排列经过一次对换变成偶排列，偶排列经过一次对换变成奇排列.

例如：排列 52341 为奇排列（逆序数为 7），将其中的 3 与 4 对换，得到的新排列 52431 为偶排列（逆序数为 8）.

定理 2 全部 n 级排列中，偶排列与奇排列各占一半，都是 $\frac{n!}{2}$（$n\geqslant 2$）个.

证明：如果全部 n 级排列中奇排列有 p 个，偶排列有 q 个，所有的排列都经过一次同样的对换（即对换相同的两个数），则奇排列变成了偶排列（即 $q\geqslant p$），偶排列变成了奇排列（即 $p\geqslant q$），所以 $p=q=\frac{n!}{2}$.

二、n 阶行列式的定义

为了给出行列式的定义，先从观察二阶、三阶行列式的特征入手. 已知二阶与三阶行列式分别为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

可以从中发现以下规律：

（1）二阶行列式是 2！项的代数和，三阶行列式是 3！项的代数和；

（2）二阶行列式中每一项是取自不同行且不同列两个元素的乘积，三阶行列式中的每一项是取自不同行且不同列的三个元素的乘积；

（3）每一项的符号都取决于位于不同行且不同列的三个元素的下标排列，如

$a_{12}a_{23}a_{31}$ 的列标排列 231 的逆序数 $\tau(231)=2$，231 为偶排列，此项符号为正；

$a_{13}a_{22}a_{31}$ 的列标排列 321 的逆序数 $\tau(321)=3$，321 为奇排列，此项符号为负.

即当这一项中元素的行标是按自然序排列时，元素列标排列为偶排列时，此项符号为正；为奇排列时，此项符号为负.

作为二、三阶行列式的推广，下面给出 n 阶行列式的定义.

定义 5 由排成 n 行 n 列的 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$组成的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**．它是 $n!$项的代数和，每一项是取自不同行且不同列的 n 个元素的乘积，各项再乘以一个正、负号：每一项各元素的行标排成自然序排列，若列标的排列为偶排列时，则此项符号为正；为奇排列时，则此项符号为负．于是得 n 阶行列式按行标自然顺序排列的展开式为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \qquad (1)$$

其中，$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和；$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 称为行列式的一般项.

特别说明：

（1）行列式是一种特定的算式符号；

（2）n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和；

（3）n 阶行列式的每项都是位于不同行且不同列的 n 个元素的乘积；

（4）$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 乘以 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$；

（5）一阶行列式 $|a| = a$，如 $|-2| = -2$；

例如：当 $n=4$ 时，4 阶行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ 表示 $4!\ (=24)$ 项的代数和，因为取自不同行且不同列 4 个元素的乘积恰有 $4!$ 项. 根据 n 阶行列式的定义，4 阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2j_3j_4)} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}\ .$$

例如：$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 行标排列为 1234，元素取自不同的行；列标排列为 4312，元素取自不同的列，因为 $\tau(4312)=5$，所以该项符号为负号，即 $-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 是上述行列式中的一项.

例 2 在 5 阶行列式中，$a_{12}a_{35}a_{23}a_{41}a_{54}$ 这一项的符号是什么？

解：这一项各元素的行标未按自然顺序排列，应先将此项按行标的自然顺

序排列为$a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{54}$，此时列标的排列为 23514．因 τ（23514）＝4，故这一项符号为正号．

例 3　写出 4 阶行列式中，带负号且包含因子$a_{11}a_{23}$的项．

解：包含因子$a_{11}a_{23}$项的一般形式为$(-1)^{t(13j_3j_4)}a_{11}a_{23}a_{3j_3}a_{4j_4}$．

按定义，j_3 可取 2 或 4，j_4 可取 4 或 2，因此包含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项只能是 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$或$a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$，但因$\tau(1324)=1$ 为奇数，$\tau(1342)=2$ 为偶数，所以此项只能是$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$．

例 4　计算上三角行列式$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$．

解：由 n 阶行列式的定义，应有 $n!$项，其一般项为$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$．

但由于 D 中有许多元素为零，只需求出上述一切项中不为零的项即可．在 D 中，第 n 行元素除 a_{nn} 外，其余均为 0．所以 $j_n=n$；在第 $n-1$ 行中，除 $a_{(n-1)(n-1)}$ 和 $a_{(n-1)n}$ 外，其余元素都是零，因而 j_{n-1} 只取 $n-1$、n 这两个可能，又由于 a_{nn}、$a_{(n-1)n}$ 位于同一列，而 $j_n=n$，所以只有 $j_{n-1}=n-1$．这样逐步往上推，不难看出，在展开式中只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 一项可能不为零．而这项的列标所组成的排列的逆序数是 τ（$12\cdots n$）＝0，故取正号．因此，由行列式的定义有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

即上三角行列式的值等于主对角线上各元素的乘积．

同理可得下三角行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，

特别地，对角行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$．

上（下）三角行列式及对角行列式的值，均等于主对角线上元素的乘积．

例 5 计算行列式$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解：这个行列式除了 $a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$ 这一项外，其余项均为零，现在来看这一项的符号. 列标的 n 级排列为 $n(n-1)\cdots 21$，$\tau(n(n-1)\cdots 21)=0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)=\dfrac{n\bullet(n-1)}{2}$，所以

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}.$$

同理可得：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}.$$

n 阶行列式还可以有第二种定义：

定义 6 n 阶行列式也可以定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1p_2\cdots p_n)} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n},$$

其中，$\tau(p_1p_2\cdots p_n)$为行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数，$\sum\limits_{(p_1p_2\cdots p_n)}$ 表示对所有的 n 级排列求和.

n 阶行列式的第三种定义：

定义 7 n 阶行列式也可以定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)+\tau(l_1l_2\cdots l_n)} a_{p_1l_1}a_{p_2l_2}\cdots a_{p_nl_n},$$

其中，$\tau(p_1p_2\cdots p_n)$为行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数，$\tau(l_1l_2\cdots l_n)$为列标排列