



**Bernard Randé**  
**Alix Deleporte-Dumont**  
**Quentin Guignard**



**Les clefs pour l'écrit MP**  
**ENS-X-Mines-Centrale-CCP**  
**(session 2015)**



**Calvage & Mounet**

Bernard Randé, Alix Deleporte-Dumont,  
Françoise Fontanez, Quentin Guignard

# Les clefs pour les écrits de mathématiques 2015

— Filière MP —



Calvage & Mounet



BERNARD RANDÉ, ancien élève de l'Éns de Saint-Cloud, a été notamment professeur en classe de MP\* au lycée Louis-le-Grand. Il est membre du comité de rédaction de la RMS, auteur de livres d'exercices (éditions Vuibert), d'exercices corrigés (éditions Calvage & Mounet), de problèmes corrigés et des *Carnets indiens de Srinivasa Ramanujan* (éditions Cassini).

ALIX DELEPORTE-DUMONT est élève de l'Éns d'Ulm.

QUENTIN GUIGNARD est élève de l'Éns d'Ulm.

FRANÇOISE FONTANEZ est professeur en classe de spéciales MP au lycée Chaptal et auteur d'un livre d'exercices aux éditions Calvage & Mounet.

# IM-ET-KER

*Im-et-Ker*

101. — Les clefs pour l'X. Bernard Randé & Franck Taïeb
102. — Les clefs pour l'X (2). Roger Mansuy & Bernard Randé
103. — Les clefs pour les Mines. Françoise Fontanez & Bernard Randé
104. — Problèmes clefs pour mathématiques supérieures. Hervé Gianella, Romain Krust, Franck Taïeb & Nicolas Tosel
105. — Les clefs pour la PSI et la PSI\*. Roger Mansuy & Bernard Randé
106. — Une année de colles en Math Sup MPSI. Éric Kouris
107. — Les clefs pour les Hautes Études Commerciales. Philippe Gallic & Jean-Louis Grappin
108. — Le jardin d'Eiden. Une année de colles en MP\*. Jean-Denis Eiden
109. — Un Max de Maths. Maxime Zavidovique
110. — Mathématiques pour la voie économique et commerciale. Jérôme Gärtner
111. — Probabilités. Cours et exercices corrigés (1). Thierry Meyre
112. — Les clefs pour les écrits de mathématiques 2015 (Filière MP). Bernard Randé, avec Alix Deleporte Dumont, Françoise Fontanez et Quentin Guignard

*À nos vieilles cousines à héritage, avec toute notre affection*



# Préface

La session 2015 des concours de la filière MP, comme d'ailleurs des autres filières, a inauguré la mise en place des nouveaux programmes des classes préparatoires, eux-mêmes dans la continuité des programmes modifiés du lycée. C'est dire si l'ampleur des changements de contenu vient de loin, et aurait pu avoir de profondes conséquences sur les problèmes soumis, comme on dit, à la sagacité des candidats. À l'analyse, ces conséquences sont moindres que celles que l'on aurait pu attendre, à l'exception notable de la présence des probabilités, qui constituent un ressort important dans deux épreuves sur les dix traitées dans cet ouvrage. Il est difficile de mesurer, dans cette élégante continuité, ce qui relève de la prudence des directeurs de concours, désirant ne pas créer un hiatus qui aurait injustement défavorisé les redoublants, et ce qui relève d'une inertie propre à certaines grandes machines administratives, dont les porte-parole appellent au changement à condition que rien ne change, chez eux.

Globalement, on peut décerner à ces épreuves un satisfecit quant au contenu. Il est moins certain que les épreuves aient été parfaitement adaptées à des élèves formés très différemment de ceux de la génération précédente. À côté de l'épreuve en quatre heures des Mines, qui certainement emporte la palme de l'épreuve la mieux adaptée, les épreuves de l'École polytechnique et celle en quatre heures des Éns étaient certainement trop longues et trop difficiles pour la grande majorité des candidats. Elles n'ont certes pour fonction que d'en sélectionner une petite fraction, mais il est à craindre dans ce cas que la sélection ne se fasse davantage sur des points de détail que sur l'essentiel. L'épreuve II des Concours communs polytechniques était essentiellement une épreuve verbeuse, tandis que la première épreuve était plus motivante.

Les énoncés fournis dans cet ouvrage sont essentiellement les énoncés originaux, à cette réserve près qu'ils ont été modifiés pour des raisons typographiques, ce qui est véniel, mais aussi, dans certains cas, pour des raisons plus profondes. Détaillons. Nous avons pensé, en vue d'une correction par le professeur, que la numérotation des questions était plus agréable si elle

suivait un ordre croissant dans tout l'énoncé (sans avoir égard à la partie à laquelle elle appartient). Nous avons donc souvent renuméroté les questions. Pour la même raison, nous avons parfois subdivisé certaines questions en sous-questions, afin d'éviter la difficulté à noter une question globale attendant plusieurs réponses. D'autre part, nous avons modifié stylistiquement certaines questions : on nous pardonnera ces névroses d'auteur. Sur le fond, il nous est arrivé de modifier assez profondément certaines questions, essentiellement lorsque s'y trouvait une ambiguïté ou une erreur. Nous avons étendu cette faculté de modification à deux autres cas : celui où une question nous a semblé trop difficile ou trop technique, et nous l'avons alors guidée ou détaillée, et celui où l'énoncé ne mettait pas assez en lumière à nos yeux le processus de compréhension. Ajoutons que, dans de rares cas, nous avons ajouté une ou deux questions prolongeant naturellement celles effectivement posées. Ces modifications sont expliquées un peu plus en détail dans la partie *Appréciation du problème*, qui précède chaque énoncé.

Puisque nous en sommes là, précisons la structure de chaque chapitre.

*Prérequis.* – Cette partie énumère les parties du programme de deuxième année concernées par le problème. On considère que le programme de MPSI a été traité, et fait universellement partie des prérequis.

*Appréciation du problème.* – Outre les modifications apportées à l'énoncé, cette partie précise l'intérêt mathématique et pédagogique du problème, ainsi que sa difficulté et sa longueur.

*Énoncé.* – Comme indiqué, l'énoncé, tout en étant parfois retouché, reste essentiellement, voire intégralement, conforme à l'original.

*Corrigé.* – Le corrigé est rédigé dans les règles de l'art, comme il devrait l'être par un élève le jour du concours. Une attention particulière a été portée à l'adéquation du corrigé avec le niveau du concours et de l'épreuve.

*Commentaires.* – Les commentaires sont brefs et centrés sur des moments importants du problème. On n'a pas listé toutes les erreurs envisageables, faute d'un temps infini pour le faire, mais plutôt tenté d'éclairer, en prenant le recul nécessaire, les intentions de l'énoncé.

*Théorèmes utilisés.* – On cite, en référence de la question concernée, l'énoncé complet du ou des théorèmes utilisés. On prendra garde que seuls les théorèmes importants sont référencés, et plus particulièrement ceux vus en deuxième année, les propositions relevant de la pratique standard n'étant pas relevées. Par exemple, on énoncera le théorème spectral, mais pas le théorème des valeurs intermédiaires.

Il y a certainement deux circonstances lors desquelles un étudiant composera sur un sujet de concours : lors de ses années de préparation, et le jour

du concours. L'objectif de cet ouvrage est donc doublement contraint : faire travailler le candidat, à un moment où il ne l'est encore que virtuellement.

Les enseignants pourront peut-être trouver intérêt à confronter leurs solutions et leurs points de vue à ceux proposés dans ce livre. Nous espérons que les étudiants en tireront un profit substantiel.

En général, un étudiant vise une certaine catégorie d'écoles et trouvera dans ce livre matière à s'y préparer. Les concours d'entrée à l'École Polytechnique et aux Éns, aux Mines, à Centrale, et les Ccp, rassemblent de fait une majorité des écoles d'ingénieur. Les rares autres ont des niveaux voisins. Un élève qui présente E3a y sera préparé par les Concours communs polytechniques. Néanmoins, des écoles recrutant leurs élèves à l'aide de questionnaires à choix multiples devraient être préparées à l'aide d'autres textes.

Au-delà de la valeur mathématique de l'énoncé, il reste important pour le futur candidat d'avoir quelque idée d'un concours donné. Les jurys changent, les années se suivent sans se ressembler absolument, la politique de recrutement subit des inflexions. La spécificité actuelle de chaque concours est une réalité, à laquelle on est d'autant mieux préparé que les millésimes sont récents. Cette spécificité concerne, non pas, évidemment, le thème abordé, qu'il est aussi vain de chercher à prévoir que le temps de l'année prochaine, mais les attentes du jury, les qualités testées, le niveau d'exigence.

Quelle que soit l'école, le candidat devra adopter des règles générales. Il est bon d'avoir une idée globale de l'énoncé en le lisant dès le début de l'épreuve, au moins dans ses grandes lignes. Cela permet en effet de définir une stratégie. Rien n'est pire, par exemple, que d'aborder la première question à l'aide de techniques qui feront l'objet de la troisième partie, ou de tenter de démontrer de prime abord un résultat intermédiaire qui est en réalité le but du problème. Des questions ultérieures peuvent, parfois, donner des indications sur la réponse à une question ouverte de l'énoncé. On peut aussi mesurer l'indépendance des questions, détecter celles qu'il est absolument nécessaire de traiter, ou au contraire celles que l'on peut admettre. La règle est en effet qu'il est loisible de considérer comme acquis un résultat fourni par l'énoncé, quand bien même on ne l'aurait pas traité, à condition bien entendu de ne pas l'utiliser avec effet rétroactif : admettre la troisième question pour traiter la deuxième sera toujours considéré comme un possible cercle vicieux.

La longueur apparente du problème est un élément important d'appréciation, quoique parfois délicat à utiliser. Comment, dans le cas d'un problème très long, établir un compromis efficace entre le nombre des questions traitées et la qualité de la rédaction ? Le rapport du jury fournira certainement des éclaircissements à ce sujet. Ce rapport est d'ailleurs, dans tous les cas,

un élément important d'information pour le taupin qui devra, lors de sa parution, le mettre en regard avec les corrigés présentés dans cet ouvrage.

Le jour du concours, les erreurs d'énoncé, une fois repérées, devront être signalées explicitement, et le candidat devra à cet égard faire preuve d'initiative. Dans le cas présent, les auteurs, après avoir cherché à les éliminer, espèrent n'en avoir pas introduit de nouvelles.

Se pose la question cruciale de la rédaction. Puisqu'une bonne partie du travail en classes préparatoires est consacrée à son apprentissage, il n'est pas utile de s'y étendre. Cependant, nous devons signaler que le corrigé détaillé, tel qu'il est proposé, a pour vocation à être un modèle (cela ne signifie pas qu'il réalise cette vocation). En d'autres termes, il contient tout ce qu'il nous semble nécessaire de mettre, et rien de ce qui nous paraît inutile. Ce n'est donc pas une rédaction succincte, où seules seraient présentées les idées ou les preuves non triviales, pas plus qu'un discours sur le thème du problème. Néanmoins, il faut préciser ce point de vue un peu absolu. Pratiquement, le candidat est conduit à viser à la plus grande efficacité. Nous n'avons donc pas cherché à fournir à tout prix la solution la plus élégante, dont la brièveté apparente cache la durée d'élaboration. Pour permettre à l'étudiant une vraie réflexion sur son travail, les commentaires qui suivent le corrigé explorent parfois certaines alternatives, et les évaluent. L'étudiant pourra plus aisément trouver un point de vue sur la méthode qu'il a choisie, lorsque choix il y a.

Chaque concours a sa propre langue, qui s'exprime aussi bien dans les locutions que dans les notations. Il convient de s'y prêter, afin de ne pas se trouver dans une situation équivoque. Certains concours, par exemple, utilisent le symbole  $\infty$  là où certains autres écrivent  $+\infty$ . Il faut, le cas échéant, justifier le changement de notation. Si, le jour du concours, on est conduit à utiliser telle ou telle notation, tournure ou encore davantage abréviation qui ne serait peut-être pas dans le lexique implicite du jury, mieux vaut le signaler avec trop de détails que pas assez : rien n'interdit de prévoir, en début de copie par exemple, un endroit où, au fur et à mesure des besoins, on précisera ces idiotismes. Sans cela, le correcteur serait peut-être surpris de lire « d'après le CSSA », et un correcteur surpris est souvent un correcteur de mauvaise humeur. Le candidat préférera alors écrire « d'après le CSSA (critère spécial aux séries alternées) » et réemployer cette abréviation librement dans la suite.

Il va de soi que la présentation manuscrite ne prend pas la même forme que la présentation imprimée, et l'usage de l'encadré ou du souligné est tout à fait légitime, et souvent même fort utile.

La rédaction proposée ici est probablement trop soutenue pour un jour de concours, où les articulations logiques peuvent se limiter à des « donc »

et des « or ». Cependant, la trame logique, l'appel des hypothèses, la mise en évidence des conclusions doivent être respectés, et de ce point de vue le corrigé fourni n'en fait pas trop.

Reste à définir le degré de détail dans les preuves. Celui que nous proposons vise à être largement suffisant. Notre point de vue a été celui que devrait avoir un candidat, à savoir adapter la minutie des arguments au niveau de l'épreuve.

La seconde épreuve des Concours communs polytechniques vise partiellement à estimer la capacité d'un candidat à recopier une solution fournie par l'énoncé : notre corrigé respecte cette consigne implicite.

Le niveau de détail dans l'épreuve en trois heures des Mines est plus grand que dans celle en six heures de l'Éns. Cela ne signifie absolument pas qu'elle est plus rigoureuse dans le premier cas que dans le second, mais que certaines vérifications évidentes sont faites dans celui-là, et pas dans celui-ci. Ces questions méritent une réflexion préalable, en liaison avec l'énoncé lui-même. Si celui-ci pose une question facile, il faut y répondre en détail, car à quoi sert-il de répondre à une question facile en disant que c'est évident ? En revanche, si une vérification du même ordre intervient au milieu d'une question ardue, s'en dispenser peut être acceptable, à condition toutefois de signaler l'existence de cette vérification. Dans le même ordre d'idée, le degré de détail dans les réponses peut diminuer au fur et à mesure que l'on avance dans l'énoncé, ne fût-ce que parce que le candidat aura déjà prouvé sa capacité à utiliser les techniques les plus élémentaires au cours des premières questions. Enfin, il faut tenir compte de l'esprit de l'énoncé.

L'objectif des commentaires est de permettre à l'étudiant de consolider ses connaissances mathématiques et de répondre efficacement aux attentes du jury. On y trouvera enfin une mise en perspective du contenu mathématique de l'épreuve.

Si l'ouvrage est bon, on le devra à des amis qui ont relu attentivement le manuscrit : Amaury Bittmann, Yves Duval, Jean-Denis Eiden, Cécile Gachet, Jean-Louis Grappin, Mohamed Houkari, Idriss Mazari, Louis Mutricy, Clément de Seguins Pazzis, Christophe Steiner, Salim Tayou, Nicolas Tosel. Les auteurs endossent avec résignation la responsabilité du reste.



# Table des matières

|  |     |
|--|-----|
| 1. Concours communs polytechniques, épreuve 1 . . . . .  | 1   |
| 2. Concours communs polytechniques, épreuve 2 . . . . .  | 17  |
| 3. Concours commun Centrale, épreuve 1 . . . . .         | 35  |
| 4. Concours commun Centrale, épreuve 2 . . . . .         | 59  |
| 5. Concours commun Mines-Ponts, épreuve 1 (3h) . . . . . | 85  |
| 6. Concours commun Mines-Ponts, épreuve 2 (4h) . . . . . | 103 |
| 7. Concours X-ENS, épreuve A . . . . .                   | 121 |
| 8. Concours X-ENS, épreuve B . . . . .                   | 141 |
| 9. Concours X-ENS, épreuve C . . . . .                   | 169 |
| 10. Concours X-ENS, épreuve D (6h) . . . . .             | 191 |



# Avant-propos

L'ouvrage est constitué de dix chapitres contenant chacun un problème de concours d'entrée aux grandes écoles scientifiques, posé à la session 2015 dans la filière MP. Dans l'ordre, deux problèmes des Concours communs polytechniques, deux problèmes du concours commun aux Écoles centrales, deux problèmes du concours commun Mines-Ponts, deux problèmes du concours d'entrée à l'École Polytechnique, deux problèmes du concours d'entrée aux Écoles normales supérieures (en fait, ces quatre épreuves relèvent du concours X-Éns).

Chaque chapitre est constitué des prérequis à l'épreuve, d'une appréciation globale du problème, d'un énoncé, d'un corrigé, d'un commentaire et des références aux principaux théorèmes utilisés. L'énoncé est, soit l'énoncé original, soit cet énoncé légèrement modifié en vue de l'améliorer, notamment en cas d'erreurs ou d'imprécisions. L'ampleur de ces modifications est indiquée dans l'appréciation du problème. Sauf dans les épreuves des Ccp, la numérotation a été modifiée pour que les questions successives suivent une numérotation à un seul nombre, sans avoir égard à la partie du problème à laquelle elles appartiennent. Par exemple, si l'énoncé original numérote les questions de la première partie de 1 à 6, et celles de la deuxième de 1 à 5, ces questions seront ici numérotées de 1 à 11.

Les notations utilisées sont standard. Le symbole «  $:=$  » signifie « égal par définition ». Lorsque l'on écrit «  $x$  excède  $y$  », on signifie que  $x \geq y$ . De même pour «  $x$  excède  $y$  strictement ». Lorsque l'on écrit que «  $f$  appartient à la classe  $O(g)$  », on signifie par là que «  $f = O(g)$  » (au voisinage ad hoc). Enfin, on pourra écrire «  $f \ll g$  » au lieu de «  $f = o(g)$  ».

