

X

ianxing  
Daishu Xitice

# 线性代数习题册

四川大学数学学院 编



四川大学出版社



# 线性代数 习题册

四川大学数学学院 编

参编人员 陈 丽 胡朝浪 谭英谊



四川大学出版社

# 目 录

|                     |         |
|---------------------|---------|
| 线性方程组 .....         | ( 1 )   |
| 矩阵的加法 数乘 乘法 .....   | ( 9 )   |
| 可逆矩阵和求逆矩阵 .....     | ( 15 )  |
| 矩阵的转置及分块 .....      | ( 21 )  |
| 行列式的定义与性质 .....     | ( 27 )  |
| 行列式的性质与计算(一) .....  | ( 31 )  |
| 行列式的性质与计算(二) .....  | ( 39 )  |
| 综合练习(一) .....       | ( 43 )  |
| 线性相关与线性无关 .....     | ( 47 )  |
| 向量组的极大线性无关组和秩 ..... | ( 51 )  |
| 子空间 .....           | ( 55 )  |
| 基和维数 .....          | ( 57 )  |
| 矩阵的秩 .....          | ( 61 )  |
| 线性方程组 .....         | ( 63 )  |
| 综合练习(二) .....       | ( 71 )  |
| 矩阵的特征值与特征向量 .....   | ( 77 )  |
| 矩阵的相似对角化 .....      | ( 81 )  |
| 实对称矩阵的相似对角化 .....   | ( 87 )  |
| 综合练习(三) .....       | ( 91 )  |
| 二次型及其矩阵表示 .....     | ( 97 )  |
| 二次型化为标准形 .....      | ( 101 ) |
| 正定二次型 .....         | ( 103 ) |
| 综合练习(四) .....       | ( 107 ) |



## 线性方程组

一、利用高斯消元法,化下列方程组为系数矩阵是行阶梯形的方程组,并判断方程组是否有解.若有解,求其解.

$$1. \textcircled{甲} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4; \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1, \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases}$$



$$3. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$$

二、设一线性方程组  $A$  分别满足下列条件, 判断该方程组是否有解, 并说明理由.

1. 方程组  $A$  有  $3 \times 4$  系数矩阵, 该矩阵有三个主元列;

2. 方程组  $A$  有  $3 \times 4$  增广矩阵, 该矩阵第四列为主元列;

3. 方程组  $A$  的系数矩阵的每一行中都有一个主元;



4. 方程组  $A$  有三个变量、三个方程, 其系数矩阵的每一列都有一个主元.

三、方程个数比未知量个数少的一个方程组, 称为一个亚定组. 亚定方程组可能有解, 也可能无解, 为什么? 若一个亚定组有解, 试说明它一定有无穷多解. 请给出一个含两个方程的三元线性方程组, 并举例说明.

四、方程个数比未知量个数多的一个方程组, 称为一个超定组. 超定方程组是否有解? 请给出一个含三个方程的二元线性方程组, 并举例说明.



五、设线性方程组的增广矩阵为  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & a & 0 \end{bmatrix}$ .

1. 该方程组是否无解?

2. 当  $a$  为何值时, 方程组有唯一解? 当  $a$  为何值时, 方程组有无穷多解?

六、设线性方程组的增广矩阵为  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & a & b \end{bmatrix}$ .

1. 当  $a, b$  为何值时, 方程组有无穷多解?



学院\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 教师\_\_\_\_\_

2. 当  $a, b$  为何值时, 方程组无解?

七、已知方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - ax_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = b. \end{cases}$$

1. 当  $a, b$  为何值时, 方程组无解?



2. 当  $a, b$  为何值时, 方程组有唯一解?

八、求数据  $(1, 12)$ ,  $(2, 15)$ ,  $(3, 16)$  插值多项式  $P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$ , 即求  $a_0, a_1, a_2$ , 使得

$$\begin{cases} a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 = 12, \\ a_0 + a_1(2) + a_2(2)^2 = 15, \\ a_0 + a_1(3) + a_2(3)^2 = 16. \end{cases}$$

九、一个投资者将 100 万元投给三家企业甲、乙、丙, 所得利润率分别为 12%, 15%, 22%. 他得到 20 万元的利润.

1. 如果投给乙的钱是投给甲的钱的 2 倍, 那么应分别给甲、乙、丙投资多少?



2. 可不可以投给丙的钱等于投给甲与乙的钱的和?

十、某厂在每批次投料生产中,获得四种不同产量的产品,同时测算出各批次的生产总成本,列表如下:

| 生产批次 | 产量(吨)    |          |          |          | 总成本(万元) |
|------|----------|----------|----------|----------|---------|
|      | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>D</i> |         |
| 1    | 4        | 2        | 2        | 1        | 58      |
| 2    | 10       | 5        | 4        | 2        | 141     |
| 3    | 5        | 2        | 2        | 1        | 68      |
| 4    | 20       | 9        | 8        | 3        | 275     |

求每种产品的单位成本.



## 十一、已知方程组

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 0, \\ x + \lambda y - z = 0, \\ 2x - y + z = 0. \end{cases}$$

则当  $\lambda$  为何值时, 方程组有非零解? 并求其解.

十二、对于同一矩阵  $A$ , 关于非齐次线性方程组  $Ax=b$  ( $b \neq 0$ ) 和齐次线性方程组  $Ax=0$ , 下列说法中正确的是( ).

1.  $Ax=0$  无非零解时  $Ax=b$  无解;
2.  $Ax=0$  有无穷多解时  $Ax=b$  有无穷多解;
3.  $Ax=b$  有无穷多解时  $Ax=0$  无非零解;
4.  $Ax=b$  有唯一解时  $Ax=0$  只有零解.



## 矩阵的加法 数乘 乘法

一、设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$   $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  求  $2A-3B$ .

二、计算下列矩阵乘积.

1.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix};$



学院\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 教师\_\_\_\_\_

$$2. \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} [a \quad b \quad c];$$

$$3. \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n];$$



学院\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 教师\_\_\_\_\_

$$4. \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix};$$

$$5. \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$



三、求  $A^n$   $n$  为自然数.

$$1. A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} [1 \quad 1 \quad -1];$$

$$2. A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix};$$



$$3. A = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

四、已知对角形矩阵  $A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ , 其中  $a_i, i = 1, 2, \cdots, n$  两两互不相等, 且  $AB =$

$BA$ . 证明  $B$  必为对角形矩阵.



五、设  $A, B$  都是  $n$  阶矩阵. 证明:

1.  $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Leftrightarrow AB = BA$ ;

2.  $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B) \Leftrightarrow AB = BA$ ;

3. 若  $AB = BA$ , 则  $(A+B)^m = A^m + mA^{m-1}B + C_m^2 A^{m-2}B^2 + \dots + B^m$ .

六、设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ , 计算  $f(A)$ .