| 高等职业教育“十三五”规划教材 |

高等数学

GAODENG SHUXUE

主　编○李光华

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等职业教育“十三五”规划教材

高 等 数 学

主　编　李光华
副主编　李双娥　王勇红
主　审　黄　贵

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/李光华主编. —北京:北京理工大学出版社,2016.9
ISBN 978-7-5682-3098-8

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①李…　Ⅲ.①高等数学-高等职业教育-教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 218962 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 /
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 14
字　　数 / 329 千字
版　　次 / 2016 年 9 月第 1 版　2016 年 9 月第 1 次印刷
定　　价 / 28.00 元

责任编辑 / 封　雪
文案编辑 / 封　雪
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 马振武

前　言

本书是依据教育部《高职高专教育专业人才培养目标及规格》和《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》,结合高职高专理工类、经管类的教改实际编写的,是高职高专理工类、经管类的通用教材。

本书针对高职高专培养一线岗位实用性人才的目标,按照“理论必须够用”和“淡化证明、强化应用、突出创新”的原则,对传统的高等数学内容进行精选,并结合计算机专业数学软件技术,进行数学建模和数学实验,使学生易于理解和学习,增长应用数学知识的体验,提高分析问题、解决问题的能力。

本书共11章,分别为:函数、极限与连续,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分及其应用;空间解析几何与向量代数,多元函数微积分及其应用,二重积分,常微分方程,级数,拉普拉斯变换。本书淡化了数列极限、两个重要极限、无穷小的概念及证明,弱化了函数图形的描绘、不定积分计算及定积分计算的技巧,强化了以数形结合方法对中值定理的理解技巧、导数、微分和定积分、条件极值、二重积分、常微分方程的应用,即高等数学在生产实际和生活中的应用,还增加了工科所必需的内容——拉普拉斯变换(第十一章)。

因高等数学与数学建模密切关联,本书每章后面增加了数学建模与实验的内容,介绍了数学模型的概念和建立模型的方法,以及用专业数学软件求解实际问题的方法,为读者解决生产实际问题提供了新技术手段。

本书由李光华主编,参加本书编写的还有李双娥、王勇红等,黄贵教授对本书进行了审订。黄贵、吕贵锋、江莹、陈志钦、郑虹婷等老师对本书的编写给予了许多帮助,在成书的过程中也得到了本校领导的大力支持,在此深表感谢!

由于编写水平有限,书中难免有不当之处,恳请读者批评指正。

《高等数学》编写组

2015.8.20

目　　录

第一章　函数、极限与连续

微积分是高等数学中研究函数的微分、积分以及有关概念和应用的基础学科. 函数是整个微积分理论的研究对象,极限是其研究手段,本章先引入函数的概念,再讨论函数的特性、函数的极限和连续性,为微积分的学习奠定基础.

第一节　函数及其性质

一、函数的概念

引例　设球的半径为 r,体积为 V,则 V 与 r 的关系式由球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

确定.

由引例知,在半径 r 的取值范围 $(0, +\infty)$ 内任取一值,由上面公式可得 V 都有唯一确定的值和它对应.

1. 函数的定义

定义 1　设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的数集,如果对于每个数 $x \in D$,变量 y 按照一定法则总有唯一确定的数值与其对应,则称 y 是 x 的函数,记作

$$y = f(x), x \in D$$

其中 x 称为自变量,y 称为因变量,数集 D 称为该函数的定义域. 与 x 的值相对应的 y 值叫作函数值,函数值的集合 $\{f(x) \mid x \in D\}$ 叫作函数的值域.

2. 函数的两要素

函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 是自变量 x 的取值范围,而函数值 y 又是由对应规则 f 来确定的,所以函数实质上是由其定义域 D 和对应规则 f 所确定的,因此通常称函数的定义域和对应规则为函数的两个要素. 也就是说,只要两个函数的定义域相同,对应规则也相同,就称这两个函数为相同的函数,与变量用什么符号表示无关,如 $y = |x|$ 与 $z = \sqrt{v^2}$,就是相同的函数.

Tips:　判定两个函数是否相同的依据是:函数的两个要素,即定义域和对应法则.

例 1　求函数 $y = \begin{cases} 2\sqrt{x}, 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1+x, x>1 \end{cases}$ 的定义域.

解　这是一个分段函数,其定义域为 $D = [0,1] \cup (0, +\infty) = [0, +\infty)$.

例 2　求 $y = \sqrt{4-x^2} + \ln(x^2-1)$ 的定义域.

解　要使函数有意义,必须 $4-x^2 \geqslant 0$ 且 $x^2-1>0$,

即 $\begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ x<-1 \text{ 或 } x>1 \end{cases}$.

定义域为$[-2,-1)\cup(1,2]$.

例 3 下列各题中，$f(x)$与$g(x)$是否表示同一函数？为什么？

(1)$f(x)=|x|,g(x)=\sqrt{x^2}$;

(2)$f(x)=x,g(x)=\sin(\arcsin x)$.

解 (1)$f(x)$和$g(x)$是同一函数.因为尽管二者的形式不一样,但定义域和对应法则都相同.

(2)$f(x)$和$g(x)$不是同一函数.因为$f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$,而$g(x)$的定义域是$[-1,1]$.

3. 函数的三种表示方法

(1)图形法.

用函数的图形来表示函数的方法称为函数的图形表示方法,简称图形法.这种方法直观性强并可观察函数的变化趋势,但根据函数图形所求出的函数值准确度不高且不便于作理论研究.

如$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$,其图形如图 1.1 所示.

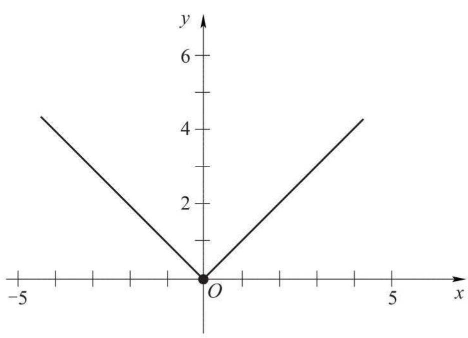

图 1.1 函数$y=|x|$的图形

(2)表格法.

将自变量的某些取值及与其对应的函数值列成表格表示函数的方法称为函数的表格表示方法,简称表格法,见表 1.1.这种方法的优点是查找函数值方便,缺点是数据有限、不直观、不便于作理论研究.

表 1.1 函数 $y=x^2$

x	1	2	3	4	5	6	…
y	2	4	9	16	25	36	…

(3)解析法.

用一个等式表示两个变量的函数关系(解析式)的方法,称为解析法.这种方法的优点是形式简明,便于作理论研究与数值计算,缺点是不如图形法直观.

如某城市居民用的天然气,1 m^3 收费 2 元,则使用 x m^3 天然气应缴纳的费用y为$y=2x$.

你能写出半径为r的圆的周长公式吗？

二、函数的性质

1. 单调性

若对任意$x_1,x_2\in(a,b)$,当$x_1<x_2$时,有$f(x_1)<f(x_2)$,则称函数$y=f(x)$是区间(a,b)上的单调增加函数;当$x_1<x_2$时,有$f(x_1)>f(x_2)$,则称函数$y=f(x)$是区间(a,b)上的单调减少

函数,单调增加函数和单调减少函数统称单调函数. 若函数 $y=f(x)$ 是区间 (a,b) 上的单调函数,则称区间 (a,b) 为单调区间.

函数单调性举例:

函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的,在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的,在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调的,见图 1.2.

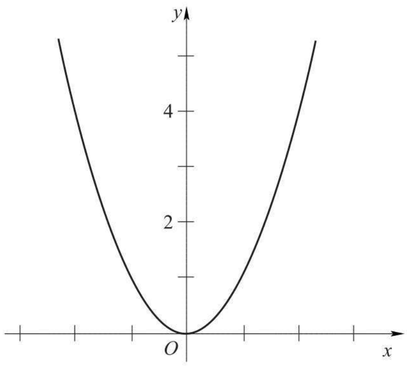

图 1.2　函数 $y=x^2$ 的图形

2. 有界性

如果存在 $M>0$,使对于任意 $x\in D$ 满足 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $y=f(x)$ 是有界的.

函数有界性举例:

(1) $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的: $|\sin x|\leqslant 1$.

(2) 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内是无上界的,或者说它在 $(0,1)$ 内有下界,无上界.

这是因为,对于任一 $M>1$,总有 x_1: $0<x_1<\dfrac{1}{M}<1$,使 $f(x_1)=\dfrac{1}{x_1}>M$,所以函数无上界.

3. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,若对任意 $x\in D$ 满足 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 是 D 上的偶函数;若对任意 $x\in D$ 满足 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 是 D 上的奇函数;既不是奇函数也不是偶函数的函数,称为非奇非偶函数.

Tips: 偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

奇偶函数举例:

$y=x^2$, $y=\cos x$ 都是偶函数. $y=x^3$, $y=\sin x$ 都是奇函数. $y=\sin x+\cos x$ 是非奇非偶函数.

4. 周期性

如果存在常数 T,使对于任意 $x\in D$, $x+T\in D$,有 $f(x+T)=f(x)$,则称函数 $y=f(x)$ 是周期函数,通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

奇偶函数举例:

$y=\cos x$ 或 $y=\sin x$ 都是周期函数,其周期为 2π,如图 1.3、图 1.4 所示.

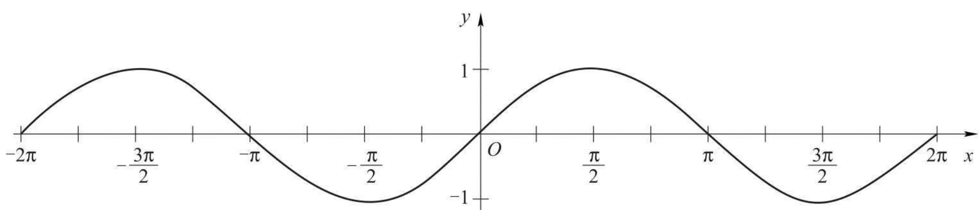

图 1.3　函数 $y=\sin x$ 的图形

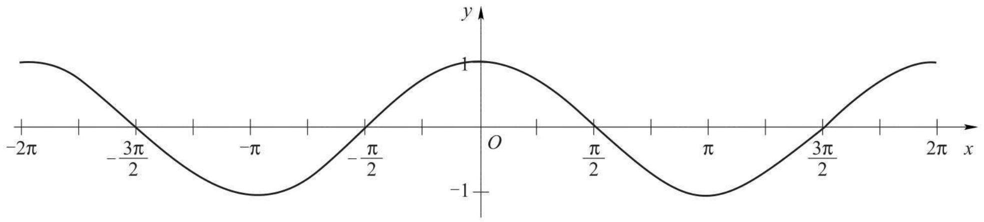

图 1.4　函数 $y=\cos x$ 的图形

三、反函数

设函数 $f(x)$ 的定义域是 D，值域为 M，对任一 $y\in M$，都可由 $f(x)=y$ 确定唯一的 x 和 y 对应，则确定了一个以 y 为自变量的新函数 $x=g(y)$，我们把这个新函数称为 $y=f(x)$ 的反函数.

一般地，$y=f(x)$，$x\in D$ 的反函数记成 $y=f^{-1}(x)$，$x\in f(D)$.

Tips： 函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 是对称的.

很容易证得，点 $A(a,f(a))$ 与点 $B(f(a),a)$ 关于直线 $y=x$ 对称. 而点 $A(a,f(a))$ 是函数 $y=f(x)$ 上的点，点 $B(f(a),a)$ 则是其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的点. 由 a 的任意性可知，函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称，如图 1.5 所示.

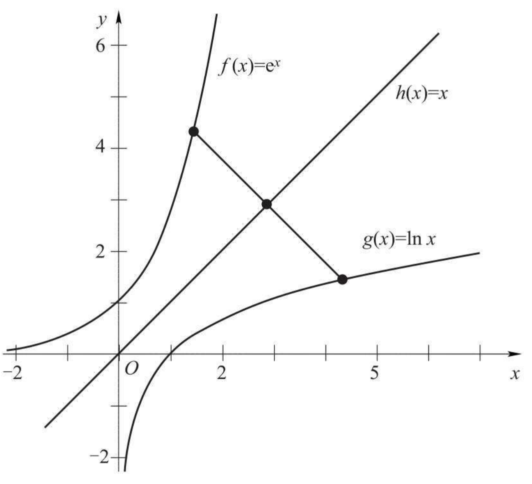

图 1.5　函数 $y=\mathrm{e}^x$ 与反函数 $y=\ln x$ 的图形

例 4　求函数 $y=\ln(x-1)+2$ 的反函数.

解　先解出 x 来，由原函数得

$$\ln(x-1)=y-2$$

$$x-1=\mathrm{e}^{y-2}$$

$$x=1+\mathrm{e}^{y-2}$$

再将上式中的 x,y 分别以 y,x 替换（这是为符合书写习惯），得 $y=1+\mathrm{e}^{x-2}$.

四、初等函数

我们以前学习了以下函数（见表 1.2）：

表 1.2　基本初等函数

函数	解析表达式
常函数	$y=C$（C 为常数）
幂函数	$y=x^a$（a 为常数）
指数函数	$y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$，a 为常数）
对数函数	$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$，a 为常数）
三角函数	$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$

以上函数统称为基本初等函数.

初等函数是由基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算所得到的函数，如 $y=\sin 2x, y=2x+e^x$ 等.

五、复合函数

现实中，自变量和函数有时并不直接联系，而是通过中间变量才联系起来的. 例如，$y=\sin x^2$ 可看成是由 $y=\sin u, u=x^2$ 通过中间变量 u 构成的.

定义　若 $y=f(u), u=\varphi(x)$，当 $\varphi(x)$ 的值域落在 $f(u)$ 的定义域内时，称 $y=f[\varphi(x)]$ 是由中间变量 u 复合成的复合函数.

例 5　指出下列函数是由哪些初等函数复合而成的.

(1) $y=e^{\sin x}$　(2) $y=\ln(x^2+1)$

解　(1) $y=e^{\sin x}$ 可看成是由 $y=e^u, u=\sin x$ 两个初等函数复合而成的.

(2) $y=\ln(x^2+1)$ 可看成是由 $y=\ln u, u=x^2+1$ 两个初等函数复合而成的.

六、常见的经济函数

用数学方法解决经济问题时，首先要将经济问题转化为数学问题，即建立经济数学模型，实际上就是找出经济变量之间的函数关系.

1. 需求函数与供给函数

需求函数

作为市场中的一种商品，消费者对它的需求量是受到诸多因素影响的. 为讨论问题方便起见，我们先忽略其他因素的影响，即假定某种商品的市场需求量 Q 只与该商品的市场价格 p 有关，则需求函数 Q 可以看作价格 p 的一元函数，即 $Q=ap^2+bp+c$. 一般来说，需求函数为价格 p 的单调减少函数.

另外，常见的需求函数还有以下几种类型：

(1) 线性需求函数：$Q=ap+b$.

(2) 二次需求函数：$Q=ap^2+bp+c$.

供给函数

如果市场的每一种商品直接由生产者提供，供给量也是受多种因素影响的. 在这里我们不考虑其他因素的影响，只是将供给量 S 看作该商品的市场价格 p 的函数. 由于生产者向市场提供商品的目的是赚取利润，则价格上涨将促使生产者提供更多的商品，从而使供给量增加；反之，价格下跌则使供给量减少. 则供给函数 S 可以看作是价格 p 的一元函数，即

$$S=S(p).$$

常见的供给函数有线性函数、二次函数、指数函数等.

市场均衡

对一种商品而言，如果需求量等于供给量，这种商品就达到了市场均衡，而这时的商品价格 p_0 称为均衡价格. 当市场价格高于均衡价格时，供给量增加而需求量相应减少，这时出现“供过于求”的现象；当市场价格低于均衡价格时，需求量大于供给量，此时出现“供不应求”的现象.

例 6　某种商品的供给函数和需求函数分别为

$$S = 25p - 10, \quad Q = -5p + 200,$$

求该商品的均衡价格 p_0.

解　由供需均衡的条件 $Q = S$,可得

$$25p - 10 = -5p + 200,$$

因此,均衡价格为 $p_0 = 7$.

2. 成本函数、收入函数和利润函数

在生产和产品的经营活动中人们总希望尽可能地降低成本,提高收入和利润. 而成本、收入、利润这些都与产品的产量或销售量 q 密切相关,在不考虑其他因素影响的条件下,它们都可以看作是 q 的函数,分别称为**成本函数** C、**收入函数** R、**利润函数** L.

成本 C 可分为固定成本 C_0 和可变成本 C_1 两部分,在生产规模和能源、材料价格不变的条件下,固定成本 C_0 是不变的,而可变成本 C_1 是产量 q 的函数,所以成本函数 C 也是产量 q 的函数,即

$$C = C_0 + C_1(q).$$

成本函数是多种多样的,常见的是线性函数、二次函数、三次函数等,它们的共同点是总成本随着产量的增加而增加,即成本是产量的增函数.

只研究总成本不能看出生产者生产水平的高低,还需要研究单位商品的成本,即平均成本 $\overline{C}$,即

$$\overline{C} = \frac{C}{q},$$

我们称之为平均成本函数.

如果产品的单位售价为 p,销售量为 q,则总收入函数为

$$R = pq.$$

总利润函数为总收入函数和总成本函数的差,即

$$L = R - C.$$

例 7　生产某种商品的总成本函数是

$$C = 2q + 500,$$

求生产 50 件该种商品时的总成本和平均成本.

解　生产 50 家商品时的总成本为

$$C = 2 \times 50 + 500 = 600,$$

平均成本为

$$\overline{C} = \frac{C}{q} = \frac{600}{50} = 12.$$

习　题　1.1

一、下列各对函数是否相同? 为什么?

(1) $f(x) = x, g(x) = (\sqrt{x})^2$;　　　　(2) $f(x) = x + 1, g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$;

(3) $f(x)=x, g(x)=\sqrt[3]{x^3}$;　　(4) $f(x)=\lg x, g(x)=2\lg|x|$.

二、求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;　　(2) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$;

(3) $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}}$;　　(4) $y=\dfrac{1}{\lg(1-x)}+\sqrt{x+2}$;

(5) $y=\sqrt{16-x^2}+\sqrt{\sin x}$;　　(6) $y=\log_2(\log_2 x)$.

三、求下列函数的反函数.

(1) $y=1+\log_4 x$;　　(2) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$;

(3) $y=\sqrt[3]{x+1}$;　　(4) $y=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)(|x|\geqslant 1)$.

四、指出下列函数中哪些是奇函数,哪些是偶函数,哪些是非奇非偶函数(其中 $a>1$).

(1) $y=2^x$;　　(2) $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$;

(3) $y=\dfrac{1}{2}(a^x-a^{-x})$;　　(4) $y=x\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$.

五、下列函数中哪些是周期函数?对于周期函数指出其周期.

(1) $y=\sin x^2$;　　(2) $y=\sin\dfrac{1}{x}$;

(3) $y=\cos(x-2)$;　　(4) $y=\arctan(\tan x)$.

六、对于下列各对函数 $f(x)$ 与 $g(x)$,求复合函数 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$,并确定它们的定义域.

(1) $f(x)=x+1, g(x)=2x$;　　(2) $f(x)=\sqrt{x+1}, g(x)=x^4$;

(3) $f(x)=\dfrac{x}{x+2}, g(x)=\dfrac{x-1}{x}$;　　(4) $f(x)=|x|, g(x)=-x$.

第二节　极限的定义

极限的问题,在现实生活中常常遇见.例如,运动时人体能的极限,在冲破极限前人会非常痛苦,冲破极限后会显得轻松.研究极限,用量来刻画.下面将用数字和函数来讨论极限问题.

一、数列的极限

1.数列的概念

定义:如果按照某一法则,有第一个数 x_1,第二个数 x_2,…这样依次序排列着,使得对应任何一个正整数 n 都有一个确定的数 x_n,那么,这列有次序的数 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ 就叫作数列,记为 $\{x_n\}$.

数列中的每一个数叫作数列的项,第 n 项 x_n 叫作数列的一般项.例如:

$$2,4,6,8,\cdots,2n,\cdots$$

2. 数列的极限

三国时代我国数学家刘徽（约公元 225—295）创造了“割圆术”，成功地推算出圆周率和圆的面积. 圆周率是对圆形和球体进行数学分析时不可缺少的一个常数，各国古代科学家均将圆周率作为一个重要课题. 我国最早采用的圆周率数值为三，即所谓“径一周三”.《九章算术》中就采用了这个数据.

对于一个半径为 R 的圆，先作圆内接正六边形，记其面积为 A_1；再作圆内接正十二边形，记其面积为 A_2，循此下去，每次边数成倍增加，得到一系列圆内接正多边形的面积

$$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n,\cdots$$

构成一列有次序的数，其中内接正 $6\times 2^{n-1}$ 边形的面积记为 $A_n(n\in\mathbf{Z})$.

（1）当 n 越大，内接正多边形与圆的差别就越小，从而以 A_n 作为圆面积的近似值也越精确.

（2）无论 n 取得如何大，只要 n 取定了，A_n 终究只是多边形的面积，还不是圆的面积.

因此，设想无限增大（记为 $n\to\infty$，读作 n 趋于无穷大），即内接正多边形的边数无限增加，在这个过程中，内接正多边形无限接近于圆，同时 A_n 也无限接近于某一确定的数值，这个确定的数值就理解为圆的面积. 这个确定的数值在数学上称为上面这列有次序的数（所谓数列）$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n,\cdots$ 当 $n\to\infty$ 时的极限.

定义：对于数列 $\{x_n\}$，当 n 无限增大时，数列的一般项 x_n 能无限接近常数 l，就称 l 是数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l,$$

也称数列 x_n 收敛于 l.

例 1　观察下列数列的极限.

（1）$u_n=\dfrac{n+1}{n}$；　（2）$u_n=(-1)^n$；　（3）$u_n=3n-1$.

解：（1）由通项 $u_n=\dfrac{n+1}{n}$，数列为 $2,\dfrac{3}{2},\dfrac{4}{3},\dfrac{5}{4},\dfrac{6}{5},\cdots,\dfrac{n+1}{n},\cdots$.

当 $n=10\ 000$ 时，$u_{10\ 000}=1.000\ 1$，当 $n=100\ 000\ 000$ 时，$u_{100\ 000\ 000}=1.000\ 000\ 01$，当 $n\to\infty$ 时，$u_n\to 1$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=1$.

（2）由通项 $u_n=(-1)^n$，数列为 $-1,1,-1,1,-1,1,\cdots,(-1)^n,\cdots$. 可以看到，数列的取值有两个，$-1$ 和 1，当 $n\to\infty$ 时，无法确定某一个固定值，故数列极限不存在.

（3）由通项 $u_n=3n-1$，数列为 $2,5,8,11,14,\cdots,3n-1,\cdots$. 当 $n=10\ 000$ 时，$u_{10\ 000}=29\ 999$，知当 $n\to\infty$ 时，$u_n\to\infty$，即数列极限不存在.

二、函数的极限

先考查自变量趋于 x_0 时和趋于无穷时函数的变化趋势.

1. $x\to x_0$ 时函数的极限

观察函数 $y=x^2$ 的图形，当 $x\to 1^-$ 时和 $x\to 1^+$ 时，函数的变化趋势.

由图 1.6、图 1.7 可知，当 $x\to 1$ 时，$f(x)\to 1$.

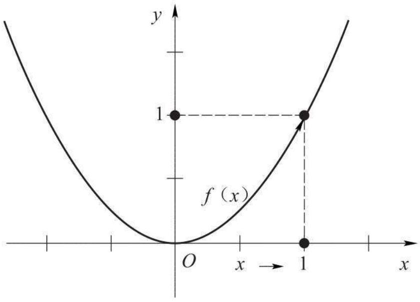

图 1.6　$x \to 1^-$ 时

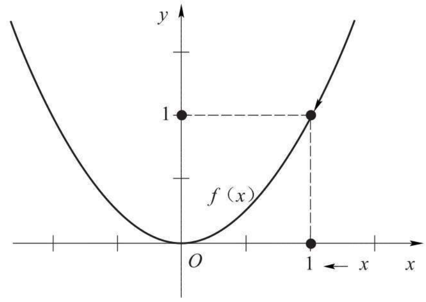

图 1.7　$x \to 1^+$ 时

定义 1　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义,若当 $x \to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 无限接近于某一确定的常数 A,则 A 叫作函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时的极限,记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

例如:$\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$.

2. $x \to \infty$ 时函数的极限

观察函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 的图形,当 $x \to +\infty$ 时和 $x \to -\infty$ 时,函数的变化趋势.

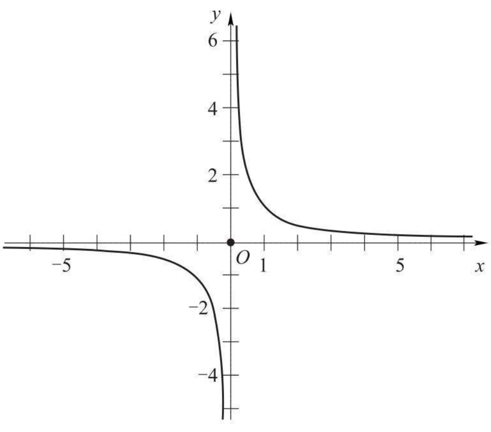

图 1.8　函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 的图形

由图 1.8 可知,当 $x \to \infty$ 时,$f(x) \to 0$.

定义 2　设函数 $f(x)$ 在实数集有定义,若当 $x \to \infty$ 时,函数 $f(x)$ 无限接近于某一确定的常数 A,则 A 叫作函数 $f(x)$ 在 $x \to \infty$ 时的极限,记作 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

注:若 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$:

(1) l 是唯一的确定的常数;

(2) $x \to \infty$ 既表示趋于 $+\infty$,也表示趋于 $-\infty$.

例如:$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

3. 左右极限

定义 3　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义,若当 $x \to x_0^-$ ($x \to x_0^+$) 时,函数 $f(x)$ 无限接近于某一确定的常数 A,则 A 叫作函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0^-$ ($x \to x_0^+$) 时的左(右)极限,记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A, \text{或} f(x_0^-) = A,$$

或

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A, \text{或} f(x_0^+) = A.$$

例如:$\lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = 1$, $\lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1$.

可知,函数 $y = x^2$ 在点 $x = 1$ 处极限存在,且左右极限相等. 反之,函数在某一点的左右极限相等,函数在这点的极限是否存在呢?

Tips: 函数在某一点存在极限的充要条件是函数的左右极限存在且相等,即

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A = \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

4. 极限的性质

定理1(唯一性) 如果极限 $\lim f(x)$ 存在,则它只有一个极限,即若 $\lim f(x) = A$, $\lim f(x) = B$,则 $A = B$.

定理2(有界性) 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,则函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一空心邻域内有界.

定理3(局部保号性) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$,并且 $A > 0$(或 $A < 0$),则在 x_0 的某一空心邻域内,有 $f(x) > 0$(或 $f(x) < 0$).

推论 若在 x_0 的某一空心邻域内有 $f(x) \geqslant 0$(或 $f(x) \leqslant 0$),且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$,则 $A \geqslant 0$(或 $A \leqslant 0$).

5. 极限的运算

计算极限,有其运算法则.

定理4 设 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$,则

(1) $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$

(2) $\lim[f(x)g(x)] = \lim f(x) \lim g(x) = A \cdot B$

若 $g(x) = C$(常数),则 $\lim[Cf(x)] = C \lim f(x) = CA$

(3) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B} (B \neq 0)$

定理说明:上述法则还可以推广到两个以上函数的情形.

$$\lim[f(x) \pm g(x) \pm h(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) \pm \lim h(x)$$

$$\lim[f(x)g(x)h(x)] = \lim f(x) \lim g(x) \lim h(x)$$

例2 求 $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 - x + 5)$.

解 $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 - x + 5) = 15$.

例3 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^3 - x + 5}$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^3 - x + 5} = \dfrac{6}{5}$.

例4 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n - 1}{3^n + 1}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n - 1}{3^n + 1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{1}{3^n}}{1 + \dfrac{1}{3^n}} = \dfrac{0}{1} = 0$.

6. 两个重要极限

在微积分中,极限的计算会经常遇到.下面介绍两个重要极限的公式,以便计算极限问题时可以应用它们来简化计算.

夹逼准则:如果数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件:

(1) $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n\ (n=1,2,3\cdots)$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$,

那么数列$\{x_n\}$的极限存在,且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

第一个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

观察图 1.9 可知,当$x\to 0^-$或$x\to 0^+$时,函数$f(x)\to 1$,即$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

此公式当然可以进行证明,其思路为$x\to 0$时函数值$\frac{\sin x}{x}$进行放大和缩小后的极限均为1,由夹逼准则知其极限为1.证明过程略.

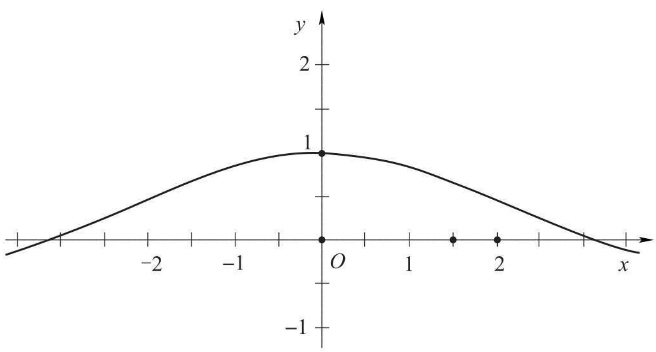

图 1.9　函数$y=\frac{\sin x}{x}$的图形

例 5　计算$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1$

例 6　计算$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

解　$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\frac{x}{2}\to 0}\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2 = \frac{1}{2}.$$

单调有界定理:若数列$\{a_n\}$递增(递减)有上界(下界),则数列$\{a_n\}$收敛,即单调有界数列必有极限.