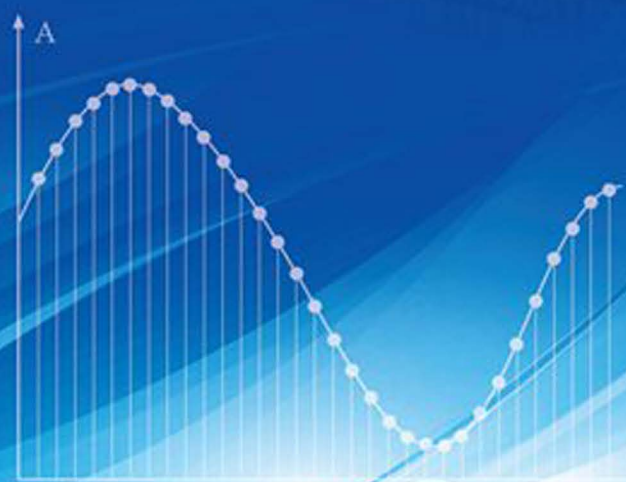


数字信号处理基础

◎ 主 编 周素华
◎ 副主编 刘 刚 姬红旭
孙山林 潘丹青




数字信号处理基础

主 编：周素华

副主编：刘 刚 姬红旭

孙山林 潘丹青

 北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书系统地讲解了数字信号处理的基础知识, 全书共有8章, 论述了数字信号处理的基本概念, 离散时间信号与离散系统的时域、频域(包括离散时间傅里叶变换和 z 变换域)的分析与算法, 离散傅里叶变换及其快速算法, IIR和FIR数字滤波器的基本概念、理论、设计方法与实现。本书注重基础, 深入浅出, 条理清楚, 有较多的例题, 并配有应用实例, 利于加深对理论的理解。

本书既可作为应用型本科院校电子信息类专业和相近专业的教材, 也可作为从事数字信号处理的工程技术人员的参考资料。

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理基础/周素华主编. —北京: 北京理工大学出版社, 2017.2

ISBN 978-7-5682-3754-3

I. ①数… II. ①周… III. ①数字信号处理 IV. ①TN911.72

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第038355号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街5号

邮 编 / 100081

电 话 / (010) 68914775 (总编室)

(010) 82562903 (教材售后服务热线)

(010) 68948351 (其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 /

开 本 / 787毫米×1092毫米 1/16

印 张 / 11.5

字 数 / 287千字

版 次 / 2017年2月第1版 2017年2月第1次印刷

定 价 / 42.00元

责任编辑 / 高 芳

文案编辑 / 赵 轩

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 施胜娟

图书出现印装质量问题, 请拨打售后服务热线, 本社负责调换

自 1965 年快速傅里叶变换算法提出以来, 数字信号处理 (Digital Signal Processing, DSP) 经过多年的发展, 已经广泛应用于通信、医学成像和音视频压缩等许多领域, 快速形成一个主要的学科领域, 并已成为各本科院校电子信息类相关专业的一门重要专业基础必修课。

作为专业基础教材, 本书依据“数字信号处理”课程的基本教学要求, 主要介绍了数字信号处理的基本概念、理论和方法, 重点突出, 弱化数学推导, 在保证系统的理论性及简洁的推导的基础上, 强化物理概念和工程应用; 注重数字信号处理的基本概念、基本规律和基本分析方法, 精心设置基础例题, 讲解细致, 有利于读者对较抽象的理论的理解和难点的突破; 注重直观性, 书中采用大量图片来说明基本原理和应用; 注重理论的发展过程, 便于学生了解知识的发展过程, 书中介绍了数字信号处理发展过程中的里程碑式的人物及重大事件; 注重理论联系实际, 对重要的理论部分举出其应用场景实例。

本书只介绍数字信号处理的基础理论部分, 全书内容安排如下: 第 1 章概述性地介绍了数字信号的基本组成、特点和应用场景; 第 2 章介绍了离散时间信号与系统的时域分析, 包括模拟信号的抽样、抽样定理、典型离散时间序列及其运算和线性移不变系统; 第 3 章介绍了离散时间信号与系统的变换域分析, 包括离散时间傅里叶变换和 z 变换; 第 4 章介绍了离散傅里叶变换 (DFT), 是在离散时域、离散频域中对信号与系统的分析, 是数字信号处理的核心部分; 第 5 章介绍了快速傅里叶变换, 正是它使得 DFT 在实际应用中得到广泛采用; 第 6 章介绍了无限长冲激响应 IIR 数字滤波器的设计方法; 第 7 章介绍了有限长冲激响应 FIR 数字滤波器的设计方法; 第 8 章介绍了数字滤波器实现时各种基本结构的分析。

本书是作者结合多年教学经验并参考国内外优秀教材编写的, 书中配有大量例题, 以期帮助读者提高分析问题的能力。本书主编为北京邮电大学世纪学院的周素华, 编写了第 2、3、4、5、6、7 章; 副主编为北京邮电大学世纪学院的刘刚, 对全书的框架和内容提出了宝贵意见。本书第 1、8 章由齐齐哈尔工程学院的姬红旭编写, 桂林航天工业学院的孙山林和潘丹青老师也参与了本书的编写。

在编写本书的过程中, 我们参考了一些文献 (见书末所列“参考文献”), 参考或采用了其中的内容、例题和习题, 在此向这些文献的作者致以衷心的感谢。

由于编者水平所限, 书中不足和疏漏之处在所难免, 恳请广大读者给予批评指正。

编者
2016 年 8 月

第 1 章 数字信号处理概述	1
1.1 数字信号处理理论简述.....	1
1.2 数字信号处理的实现和应用.....	3
第 2 章 离散时间信号与系统	5
2.1 离散时间信号.....	5
2.1.1 离散时间信号的时域表示.....	6
2.1.2 离散时间信号的长度.....	6
2.1.3 离散时间信号的运算.....	7
2.1.4 常用典型序列.....	9
2.1.5 序列的周期性.....	13
2.2 离散时间系统.....	13
2.2.1 离散时间系统的定义.....	13
2.2.2 离散时间系统的分类.....	14
2.3 线性移不变系统 (LSI).....	17
2.3.1 单位冲激响应.....	17
2.3.2 输入与输出关系: 线性卷积.....	18
2.3.3 简单 LSI 离散时间系统的互联.....	22
2.3.4 LSI 系统因果性和稳定性的条件.....	24
2.3.5 离散时间系统的差分方程描述及分类.....	26
2.4 连续时间信号的抽样和重建.....	27
2.4.1 连续时间信号的理想抽样.....	27
2.4.2 关于抽样信号重建原信号问题.....	31
2.5 人物介绍: 抽样定理与奈奎斯特和香农.....	32
习题.....	33

第 3 章 离散时间傅里叶变换与 z 变换	36
3.1 离散时间傅里叶变换 (DTFT) 的定义	36
3.2 离散时间傅里叶变换 (DTFT) 的性质	39
3.3 离散时间信号的 z 变换	41
3.3.1 z 变换的定义与收敛域	42
3.3.2 z 逆变换	47
3.3.3 z 变换的性质	49
3.4 离散线性移不变 (LSI) 系统的变换域表征	53
3.4.1 LSI 系统的描述	53
3.4.2 LSI 系统的因果、稳定条件	54
3.4.3 LSI 系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 的意义	55
3.5 人物介绍: 傅里叶与傅里叶分析	58
习题	58
第 4 章 离散傅里叶变换 (DFT)	61
4.1 离散时间周期序列的傅里叶级数 (DFS)	62
4.1.1 DFS 的定义	62
4.1.2 DFS 的性质	64
4.2 离散傅里叶变换 (DFT) 及其性质	67
4.2.1 DFT 的定义	67
4.2.2 DFT 的主要性质	70
4.3 频域抽样定理	77
4.4 DFT 的应用	78
4.4.1 利用 DFT 计算线性卷积	78
4.4.2 基于 DFT 的信号频谱分析	80
习题	84
第 5 章 快速傅里叶变换 (FFT)	86
5.1 直接计算 DFT 的运算量	86
5.2 基 2 时间抽取算法 (DIT-FFT)	87
5.3 基 2 时间抽取 FFT 算法的特点	92
5.4 基 2 频率抽取 FFT 算法 (DIF-FFT)	97
5.5 快速离散傅里叶反变换 (IFFT)	99
5.6 利用 FFT 计算两个实序列的 DFT	100
5.7 FFT/IFFT 的应用实例——正交频分复用 (OFDM) 技术	101
习题	102

第 6 章 数字滤波器设计——IIR 滤波器的设计	104
6.1 数字滤波器的表示方法和分类	104
6.1.1 数字滤波器的表示方法	104
6.1.2 数字滤波器的分类	105
6.2 理想滤波器特性	106
6.3 全通滤波器和最小、最大相位滤波器	108
6.3.1 全通滤波器	108
6.3.2 最小相位、最大相位系统	109
6.4 数字滤波器的性能指标和设计步骤	111
6.4.1 数字滤波器的性能指标	111
6.4.2 数字滤波器的设计步骤	113
6.5 IIR 数字滤波器的设计方法	114
6.6 模拟滤波器的设计	115
6.6.1 模拟低通滤波器的设计指标及逼近方法	115
6.6.2 巴特沃思 (Butterworth) 模拟低通滤波器的设计	116
6.6.3 切比雪夫低通滤波器 (Chebyshev) 的设计	119
6.7 由模拟滤波器系统函数到数字滤波器系统函数的转换	122
6.7.1 冲激响应不变法	122
6.7.2 双线性变换法	126
6.8 频率变换	129
6.8.1 模拟域频率变换	129
6.8.2 数字域频率变换	130
习题	132
第 7 章 数字滤波器——FIR 滤波器设计	134
7.1 FIR 滤波器的线性相位条件和特点	135
7.1.1 第一类和第二类线性相位	135
7.1.2 线性相位条件对单位冲激响应的要求	135
7.1.3 两类线性相位情况下, FIR 数字滤波器幅度函数的特点	138
7.1.4 线性相位 FIR 滤波器的零点分布	140
7.2 窗函数法设计 FIR 滤波器	140
7.2.1 窗函数法设计法的设计思路	140
7.2.2 窗函数法设计法的性能分析	141
7.2.3 各种常用窗函数	143
7.2.4 窗函数法设计线性相位 FIR 数字滤波器的步骤	148
7.2.5 数字高通、带通和带阻的线性相位数字滤波器的设计	149
7.3 频率抽样法设计 FIR 滤波器	150

7.3.1 设计思路.....	150
7.4 IIR 数字滤波器与 FIR 数字滤波器的比较.....	152
7.5 FIR 数字滤波器的应用实例——音箱.....	153
习题.....	156
第 8 章 数字滤波器的实现.....	158
8.1 数字滤波器基本运算单元的信号流图表示.....	158
8.2 IIR 数字滤波器的基本实现结构.....	159
8.2.1 IIR 滤波器的直接型结构.....	159
8.2.2 IIR 滤波器的级联型.....	161
8.2.3 IIR 滤波器的并联型.....	163
8.3 FIR 数字滤波器的基本实现结构.....	166
8.3.1 直接型结构.....	166
8.3.2 级联型结构.....	167
8.3.3 频率抽样型结构.....	168
8.3.4 线性相位 FIR 滤波器的实现结构.....	169
8.4 滤波器的有限字长效应.....	171
8.4.1 二进制数的表示方法引起的有限字长效应.....	171
8.4.2 滤波器系数量化引起的有限字长效应.....	172
8.4.3 模拟信号抽样过程中的有限字长效应.....	173
习题.....	174
参考文献.....	176

数字信号处理概述

自 1965 年快速傅里叶变换算法提出后,随着大规模集成电路和软件开发引起的计算机科学的飞速发展,数字信号处理(Digital Signal Processing)技术应运而生,并在科学和工程领域得到了迅速发展,这一学科已经应用于几乎所有工程、科学、技术领域,并渗透到人们日常生活和工作的方方面面。本章简要介绍数字信号处理的定义、基本组成,以及数字信号处理的优点、实现方法和应用领域。

1.1 数字信号处理理论简述

信号是信息的物理表现形式,如电、声、光等,信息则是信号的具体内容。信号通常定义为随着时间、空间或其他自变量而变化的物理量,数学上,我们把一个信号描述为一个或几个变量的函数。例如,函数 $x(t) = 2t$ 描述了一个自变量以自变量时间 t 线性变化的信号;函数 $f(x, y) = 3x + 2xy + 8y^2$ 描述了具有两个自变量 x 和 y 的信号,这两个自变量可以表示一个平面上的两个空间坐标;流媒体电视信号是关于自变量 x 、 y 坐标和时间 t 的多维函数。这些信号都属于一类准确定义的信号,指定了对于自变量的函数依赖关系。本书主要讨论一维的确定信号的处理问题的原理和实现方法,以及一些基本应用。

绝大多数一维信号是时间的函数,按时间(自变量)、幅度(因变量)划分成 4 类信号:

- (1) 连续时间信号:时间连续、幅度可以是连续的也可以是离散的信号。
- (2) 模拟信号:时间连续、幅度也连续的信号,这是连续时间信号的特例。
- (3) 离散时间信号:时间离散、幅度连续的信号。

(4) 数字信号:时间离散、幅度也离散的信号。由于幅度是按二进制编码量化的,故数字信号可用有限位二进制编码表示。若采用 3 位比特量化编码,则有 $2^3 = 8$ 个量化层,其取值只能为 7,6,⋯,1,0。例如,第一个抽样的幅度精确值为 1.8,但是经四舍五入方式的量化后,其幅度数为 2;3 比特编码后的二进制码表示为 010,因此数字信号的输出是二进制码流。

系统为按照人们的要求来处理信号的各种物理设备。实际上,系统是要完成某种运算的,因而可将系统的定义扩展为不仅包括物理设备,还包括对信号操作的软件实现。按所处理的信号种类的不同可将系统分为模拟系统、离散时间系统和数字系统。

数字信号处理是把数字信号(用数字或符号表示的序列)通过计算机或通用(专用)信

号处理设备，采用数值计算的方法对信号进行处理的一门技术，包括滤波、变换、估计、复原、识别、分析等加工处理，以达到提取有用信息、便于应用的目的。数字信号处理应理解为对信号进行数字处理，而不应理解为只对数字信号进行处理，因而它既能对数字信号进行处理，又能对模拟信号进行处理，当然这时要将模拟信号转换成数字信号。

在工程上遇到的大多数信号是自然模拟信号。也就是说，信号是连续变量的函数，这些连续变量（如时间或空间）通常在一个连续的范围内取值。这类信号可直接被合适的模拟系统处理（如滤波器或频谱分析仪），以达到改变信号的特征或提取有用信息的目的。在这种情况下，信号是直接以模拟形式处理的，如图 1-1 所示。输入信号和输出信号均是模拟形式的信号。

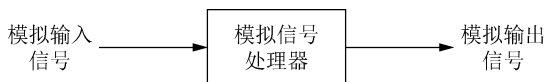


图 1-1 模拟信号处理系统

随着数字信号处理理论及技术的不断成熟和完善，在很多应用场合已逐渐用数字信号处理取代模拟信号处理。典型的数字信号处理系统如图 1-2 所示。

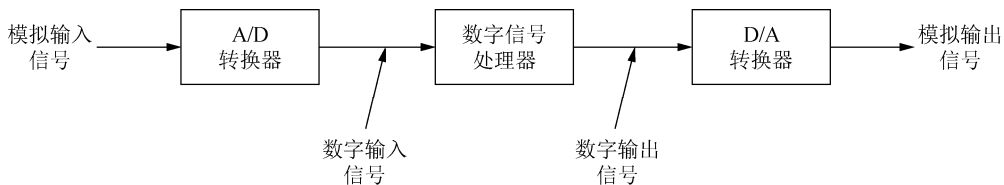


图 1-2 数字信号处理系统

要执行数字处理，需要在模拟信号和数字处理器之间有一个接口，这个接口称为模-数（Analog-Digital, A/D）转换器，它包括了抽样及量化编码两部分。A/D 转换器的输出是数字信号，该信号进入数字信号处理器进行处理和传输。数字处理器可能是一个简单系统，也可能是一个复杂系统。常用的数字处理系统有可编程处理器或大型的数字计算机，也可以是一个对输入信号执行指定操作集的硬连线数字处理器。可编程机器可通过更改软件来灵活地更改信号的处理操作，而纯硬件实现方式很难改变设计参数进行重新配置，因此可编程器件得到广泛应用。在应用中，数字信号处理器的数字输出通常是以模拟信号形式提交给用户的，如语音信息系统，因此我们必须提供从数字域到模拟域的另一个接口。这种接口称为数-模（Digital-Analog, D/A）转换器。

然而，实际的系统并不一定要包括图 1-2 中的所有框图。有些系统不需要 D/A 变换器，如心音听诊系统，其输出是提取的心音信号特征，为数字信号；另一些系统的输入就是数字形式，因而就不需要 A/D 转换器。纯数字系统则只需要数字信号处理器这一核心部分就行了，不需要 A/D 转换器和 D/A 转换器，如输入和输出都是数字信号的股票报价系统。

数字信号处理与模拟信号处理相比具有以下主要优点

(1) 灵活性强。数字系统的性能主要由乘法器的系数决定，而系数是存放在系数存储器中的，因而仅通过更改程序就可灵活性地重新配置数字信号处理系统；而模拟系统的重新配置通常意味着对硬件的重新设计，还要进行测试和校验以观察其是否能正常操作。因此数字

信号处理比改变模拟系统方便得多。

(2) 精度高且容易控制。模拟电路组件的容错性及加性噪声的影响,使得系统设计者很难控制模拟信号处理系统的精度。然而,数字系统可对精度要求提供很好的控制。这些需求需要依次指定 A/D 转换器和数字信号处理器的精度需求,模拟元器件的精度很难达到 10^{-3} 以上。数字系统中,6 位字长可达到 10^{-5} 精度,而目前在计算机和微处理器中,采用 32 位的存储器已经很普遍了,再配合适当编程或采用浮点算法,可以达到更高的精度。因此,在一些要求高精度的系统中,只能采用数字处理技术。

(3) 可靠性强。模拟系统的各元器件都有一定的温度系数,且电平是连续变化的,易受温度、噪声、电磁感应等的影响而产生失真。而数字系统只有两个信号电平“0”和“1”,因此,所受的干扰只要在一定范围以内,就不会产生影响,即数字信号抗干扰能力强。另外,如果用数字信号进行传输,在中继站还可以再生,而且可以进行纠错编码,纠正和检测出传输误码。

(4) 便于大规模集成化。数字部件具有高度规范性,易于大规模集成电路实现,保证了系统的一致性,降低了调试的复杂度,产品成品率高,便于大规模生产,降低成本。尤其是对于低频信号,例如,地震波分析需要过滤几赫兹到几十赫兹信号,用模拟网络处理时,电感器、电容器的数值、体积和质量都非常大,性能也不能达到要求,而数字信号处理系统在这个频率却非常优越。

由于这些优点,数字信号处理已经在广泛的学科领域的实际系统中应用,如语音处理、电话信道传输、图像处理 and 传输、地震学和地球物理学、石油开采、核爆炸的检测、外层空间接收到的信号的处理等。当然,数字实现有它的局限性。一种实际限制是 A/D 转换器和数字信号处理器的运算速度。具有极宽带宽的信号需要快采样率的 A/D 转换器和快速的数字信号处理器,对于一些较大带宽的模拟信号,数字处理方法已经超出数字硬件的技术发展水平。

1.2 数字信号处理的实现和应用

数字信号处理的主要研究对象是数字信号,数字信号是数据序列,其处理实际上就是对数字或符号序列进行加、减、乘及各种逻辑运算等各种数学函数运算,从而达到处理的目的,实现方法有软件实现、硬件实现和软硬件结合实现。

软件实现就是通过软件对所需要的算法进行编程,然后在通用计算机上执行。信号处理软件使用各种计算机语言编写,也可使用个别研究机构推出的软件包。软件处理灵活、方便和可靠,并能做到一机多用。缺点是计算需要时间,对于复杂的算法,一般不能做到实时处理,因为通用计算机的体系结构与大多数信号处理的算法不匹配,不能充分利用计算机复杂的运算系统,造成浪费,因此成本较高。

硬件处理是用加法器、乘法器、延时器、逻辑器等基本的数字硬件及它们的各种组合组成专用处理机或用专用数字信号处理芯片作为数字信号处理器。硬件处理不如软件处理方便灵活,但是能对数字信号进行实时处理。随着现场可编程逻辑器件(FPGA/EPLD)的处理速度和集成度的快速提高,硬件处理也可以现场下载或调动不同的功能模块,从而得到不同的系统功能。因此,硬件处理在高速实时数字信号处理方面得到了更广泛的应用。

第三种处理方法是近年来日益广泛采用的各种通用和专用的数字信号处理器芯片，如美国 TI (Texas Instrument) 公司的 TMS320 通用系列，AD (Advance Device) 公司的 ADSP21 系列等，这些处理器是专为数字信号处理设计的芯片，它们有专门的数字信号处理算法的硬件，如乘法累加器、并行流水处理结构、位翻转等；而且有专门的数字信号处理指令，所需要的算法靠特定的编程（如 C 语言、汇编语言等）来实现，可以认为是软硬件处理方式的结合。这种方式既灵活方便又一般能够做到实时处理。

综上所述，无论采用哪种方式进行数字信号处理，都是用一些典型的数字电路的组合来对数字信号序列进行所需要的各种运算。

由于对信号的所有变换、分析、识别和处理都可以归结为以信号为对象的运算模型，因此数学理论、信号与系统理论是数字信号处理的理论基础；同时，数字信号又是通信理论、最优控制、人工智能、模式识别等学科的理论基础之一。数字信号处理的主要理论和方法已经在越来越多的领域得到广泛应用。下面介绍其中最重要的一些应用领域。

(1) 语音和音频信号处理领域。这是最早采用数字信号处理技术的应用领域之一。主要包括语音分析、语音编码、语音识别、语音增强等。语音分析是对语音和音频信号的波形特征、统计特性等进行分析、处理和计算；语音编码是将语音和音频信号数字化，在保证语音质量的前提下用尽可能少的二进制码表示数字语音，达到压缩信息的目的；语音识别是采用计算机或专用硬件识别自然语音或说话人；语音增强是从噪声或干扰中提取被掩盖的语音信号。

(2) 数字通信领域。在现代通信系统中，几乎每一部分都要用到数字信号处理技术。主要包括编码调制、自适应均衡、纠错编解码、数字交换、信道复用、移动电话、调制解调器、数字加密解密、扩频技术、卫星通信、TDMA/CDMA/FDMA/OFDMA、IP 电话、软件无线电等。

(3) 数字图像处理领域。图像处理是人们从客观世界获取信息的重要来源。数字图像处理包括静止图像和活动图像、二维图像和三维图像、黑白图像和彩色图像，涉及图像信息的获取、存储、传送、显示和利用，主要包括图像压缩、图像增强、图像复原、图像重建、图像变换、图像分割与描绘、模式识别等。

(4) 工业控制与自动化领域。包括机器人控制、激光打印机控制、自动机、电力线监视器、计算机辅助制造、引擎控制、自适应驾驶控制等。

(5) 医疗领域。包括健康助理、病人监视、超声仪器、诊断工具、CT 扫描、核磁共振、助听器等。

(6) 军事领域。包括雷达处理、声呐处理、导航、全球定位系统 (GPS)、侦察卫星、航空航天测试、阵列天线信号处理等。

随着数字信号处理理论和技术的不断快速发展，数字信号处理的应用领域还将会不断地发展和扩大。

离散时间信号与系统

信号是传递信息的函数，离散时间信号可以表示为函数关系式、图形或者序列。这些函数、图形或者序列满足一定的数学运算关系，为我们处理离散时间信号提供了理论基础。离散时间系统是由满足这些运算关系的模块组合而成的，所以掌握离散时间信号的运算对于分析离散时间信号及其系统都是十分重要的。随着内容的深入，线性移不变系统将作为讨论的重点。

2.1 离散时间信号

离散时间信号是一组有序的复数或实数，也称为序列，通常用 $x(n)$ 表示，自变量 n 取整数，表示序列中数的先后顺序，变化范围是从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 。在一些应用中，对连续时间信号 $x_a(t)$ 以相等的时间间隔 T 进行周期抽样，可得到离散时间序列 $x(n)$ ：

$$x(n) = x_a(t)|_{t=nT} = x_a(nT), n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

如图 2-1 所示。式 (2.1) 中的两个相邻抽样值之间的间隔 T 称为抽样间隔或抽样周期。抽样间隔 T 的倒数称为抽样频率，记为 f ，则 $f = 1/T$ ，抽样频率的单位是周期/秒，或当抽样周期以秒为单位时，抽样率的单位为赫兹 (Hz)。

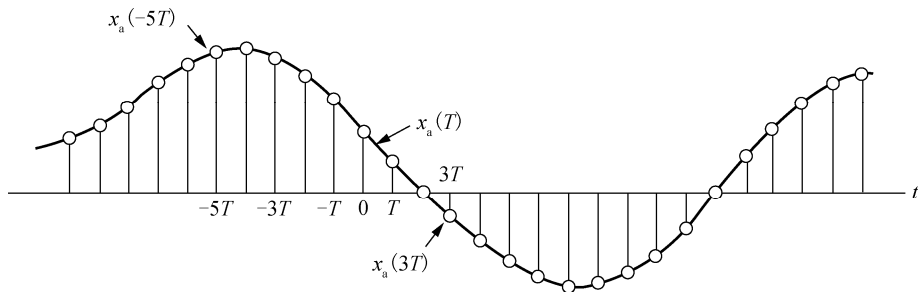


图 2-1 连续时间信号 $x_a(t)$ 通过抽样产生的离散时间信号

有些信号本身就是离散时间信号，如一个时期内某股票每天的价格，这里 n 代表天数。

2.1.1 离散时间信号的时域表示

离散时间信号的时域表示有以下 3 种方法。

(1) 函数表示法。例如，

$$x(n) = \begin{cases} n+1, & n = -2, -1, 0 \\ 3, & n = 1, 2, 3 \end{cases} \text{ 或 } x(n) = a^n u(n)$$

(2) 数列表示法。例如，

$$x(n) = \{\dots, 0.95, -0.2, \underline{2.17}, 1.1, 0.2, -3.67, 2.9, -0.8, 4.1, \dots\}$$

对于时间序号 $n=0$ 处的值 $x(0)$ 下面用下划线表示，右边的值对应于 n 为正值的部分，而左边的值对应于 n 为负值的部分。在这个例子中， $x(-1) = -0.2, x(0) = 2.17, x(1) = 1.1, \dots$ ，依此类推。

(3) 图形表示法。用 $x(n) \sim n$ 坐标系中的竖直点画线图形表示，图 2-2 表示了一个具体的离散时间信号。这种表示非常直观，在分析问题时常用。

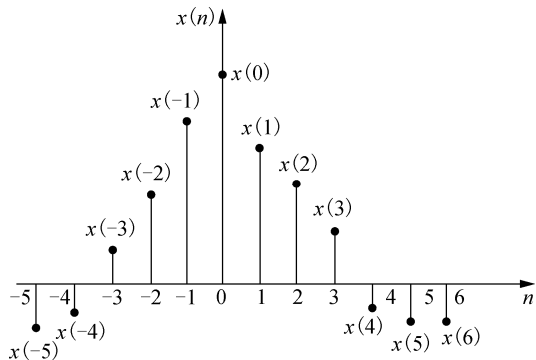


图 2-2 离散时间信号的图形表示

横轴表示时间轴，但只在整数时才有意义，纵轴线段的长短代表各序列值的大小。

若有一个或多个 n ，其对应的 $x(n)$ 为复数，则 $x(n)$ 是复序列。若用实部和虚部来表示复数，则可将复序列 $x(n)$ 写为

$$x(n) = \text{Re}[x(n)] + j\text{Im}[x(n)] \tag{2.2}$$

其中， $\text{Re}[x(n)]$ 和 $\text{Im}[x(n)]$ 分别表示 $x(n)$ 的实部和虚部，它们均为实序列。实序列对于所有的 n 都有 $\text{Im}[x(n)] = 0$ ，而纯虚序列对于所有的 n 都有 $\text{Re}[x(n)] = 0$ 。 $x(n)$ 的复共轭序列通常用 $x^*(n)$ 表示，记为 $x^*(n) = \text{Re}[x(n)] - j\text{Im}[x(n)]$ 。

2.1.2 离散时间信号的长度

离散时间信号可以是有限长序列也可以是无限长序列。有限长序列只在有限时间段内有定义：

$$N_1 \leq n \leq N_2 \tag{2.3}$$

其中， $N_1 < -\infty$ 且 $N_2 < +\infty$ ，并有 $N_1 \leq N_2$ ，上面的有限长序列的长度 N 为

$$N = N_2 - N_1 + 1 \tag{2.4}$$

长度为 N 的离散时间序列包含 N 个样本并且常称为 N 点序列。若把定义范围以外的样本值均设为零，则可将有限长序列看成是无限长序列。这种通过加入零值样本来延长序列的过程称为补零或零填充。

无限长序列有 3 类：右边序列、左边序列和双边序列。右边序列是指当 $n < N_1$ 时 $x(n)$ 的值为零，即

$$x(n) = 0, n < N_1 \quad (2.5)$$

其中， N_1 是值为正或负的有限整数。若 $N_1 = 0$ ，则右边序列通常称为因果序列。同样，左边序列是指当 $n > N_2$ 时 $x(n)$ 的值为零，即

$$x(n) = 0, n > N_2 \quad (2.6)$$

其中， N_2 是值为正或负的有限整数。若 $N_2 \leq 0$ ，则左边序列通常称为非因果序列。双边序列对所有正的和负的 n 值都有定义。图 2-3 说明了上述两种单边序列。

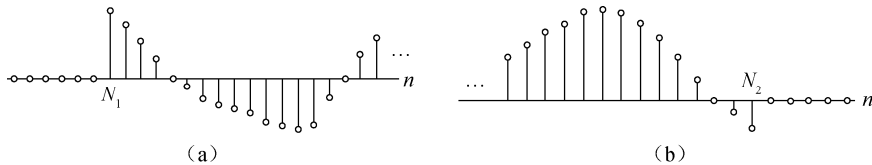


图 2-3 右边序列与左边序列

(a) 右边序列；(b) 左边序列

2.1.3 离散时间信号的运算

数字信号处理是通过各种运算来完成的，将一些基本运算组合起来，有可能使系统处理信号的能力得以加强。序列的基本运算包括乘法运算、加法运算、移位运算和翻褶运算。数字信号处理中，序列的运算都是通过 3 个基本运算单元—加法器、乘法器和延时单元来实现的。图 2-4 给出了这几种序列基本运算的示意图表示。

1. 乘法运算

设 $x(n)$ 和 $y(n)$ 是两个已知序列。这两个序列的样本值的乘积是指将两个序列的样本值逐点对应相乘，从而得到新序列 $w_1(n)$ ：

$$w_1(n) = x(n) \cdot y(n) \quad (2.7)$$

在一些应用中提到的“调制”也就是乘法运算。实现调制运算的器件称为调制器，其运算功能的框图如图 2-4 (a) 所示。

当 $x(n)$ 或 $y(n)$ 是常数 A 时，称为标量乘法。

$$w_2(n) = A \cdot x(n) \quad (2.8)$$

实现标量乘法的器件称为乘法器，其运算功能的框图如图 2-4 (b) 所示。

2. 加法运算

设 $x(n)$ 和 $y(n)$ 是两个已知序列，这两个序列的样本值的和是指把两个序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的样本值逐一相加得到新序列 $w_3(n)$ ：

$$w_3(n) = x(n) + y(n) \quad (2.9)$$

实现加法运算的器件称为加法器，其运算功能的框图如图 2-4 (c) 所示。若把序列 $y(n)$ 的所有样本值的符号取反，则加法器也可以实现减法运算。

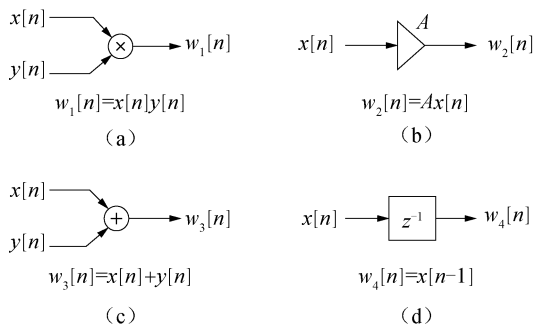


图 2-4 序列基本运算的示意图表示

(a) 调制器；(b) 乘法器；(c) 加法器；(d) 单位延时

3. 移位运算

$x(n)$ 和它的时域移位运算结果 $w_4(n)$ 之间的关系为

$$w_4(n) = x(n - m) \quad (2.10)$$

其中， m 是整数。当 $m > 0$ 时，表示序列 $x(n)$ 逐项依次右移 m 位，此时它是延时运算；而当 $m < 0$ 时，表示序列 $x(n)$ 逐项依次左移 $|m|$ 位，则它是超前运算。当 $N=1$ 时，输入输出关系为 $w_4(n) = x(n-1)$ ，像这样实现延时一个样本的器件称为单位延时器。在实际应用中，常用 z^{-1} 表示单位延时，如图 2-4 (d) 所示。

4. 翻褶运算

如果序列为 $x(n)$ ，则 $x(-n)$ 是将序列 $x(n)$ 以纵坐标轴 $n = 0$ 为对称轴加以翻褶得到的。例如，当 $x(n) = \{0, 0, 1, 1/2, 1/4, 1/8, \dots\}$ 时，

$$x(-n) = \{\dots 1/8, 1/4, 1/2, 1, 0, 0\}$$

注意：当序列运算中既有移位又有翻褶时，最好先翻褶后移位。例如，由 $x(n)$ 求得 $x(2-n)$ 时，可先将 $x(n)$ 翻褶得到 $x(-n)$ ，再向右平移 2 个单位，得到 $x[-(n-2)]$ ，即 $x(-n+2)$ ，如图 2-5 所示。推广到一般情况，若由 $x(n)$ 求得 $x(-n+m)$ ，可先画出翻褶序列 $x(-n)$ ，然后若 $m > 0$ ，则将 $x(-n)$ 右移 m 位；若 $m < 0$ ，则将 $x(-n)$ 左移 $|m|$ 位。

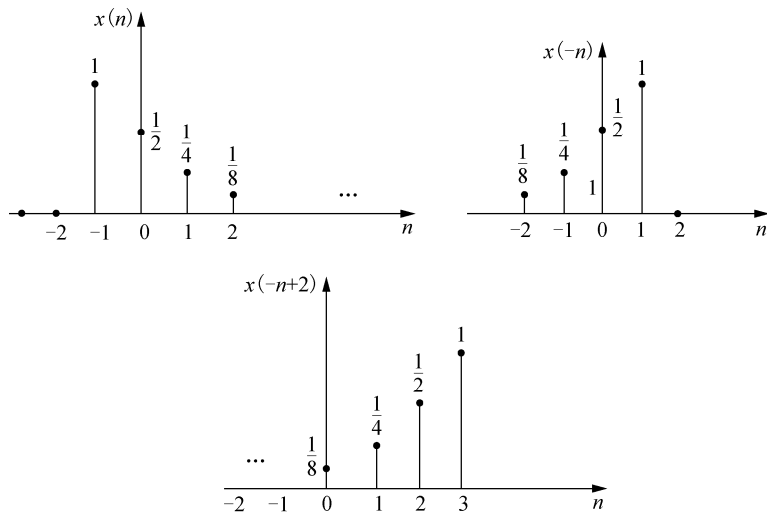
5. 时间尺度变换

(1) 抽取。 $x_d(n) = x(Dn)$ ， D 为整数。抽取是为了减小抽样频率。

(2) 插值。抽取是为了增加抽样频率。例如，插零值可表示为

$$x_l(n) = \begin{cases} x(n/I), & n = mI, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

抽取和插值在时间轴上有压缩或扩展的作用。

图 2-5 序列 $x(n)$ 、翻褶序列 $x(-n)$ 及翻褶移位序列 $x(-n+2)$

【例 2.1】已知下面两个定义在 $0 \leq n \leq 4$ 上且长度为 5 的序列：

$$c(n) = \{3.2, 41, 36, -9.5, 0\}$$

$$d(n) = \{1.7, -0.5, 0, 0.8, 1\}$$

计算 $c(n) \cdot d(n)$ 、 $c(n) + d(n)$ 及 $3.5c(n)$ 。

$$w_1(n) = c(n) \cdot d(n) = \{5.44, -20.5, 0, -7.6, 0\}$$

解： $w_2(n) = c(n) + d(n) = \{4.9, 40.5, 36, -8.7, 1\}$

$$w_3(n) = 3.5c(n) = \{11.2, 143.5, 126, -33.25, 0\}$$

如例 2.1 所示，若所有的序列具有相同的长度并且时间序号 n 定义在相同的范围内，则可以通过对其中两个或两上以上的序列进行运算产生新序列。然而，参与运算的序列长度不同，这时可以对长度较短的序列插入零值，以便使所有序列都定义在相同的时间序号 n 的范围内。该过程将在例 2.2 中加以说明。

【例 2.2】不等长序列的基本运算。考虑定义在 $0 \leq n \leq 2$ 上且长度为 3 的序列 $g(n) = \{-21, 1.5, 3\}$ ，很明显，不能将该序列与例 2.1 中任一个长度为 5 的序列进行运算。然而，对 $g(n)$ 添加两个零值样本后，可使之成为定义在 $0 \leq n \leq 4$ 上且长度为 5 的序列：

$$g_e(n) = \{-21, 1.5, 3, 0, 0\}$$

$g_e(n)$ 与例 2.1 中的 $c(n)$ 进行运算产生新序列的例子给出如下：

$$w_4(n) = c(n) \cdot g_e(n) = \{-67.2, 61.5, 108, 0, 0\}$$

$$w_5(n) = c(n) + g_e(n) = \{-17.8, 42.5, 39, -9.5, 0\}$$

2.1.4 常用典型序列

下面介绍几种常用的典型序列。一般序列都可以分解若干典型基本序列的线性组合。对应于线性时不变或者移不变系统，可以从典型序列的输入/输出关系推导出一般序列的输入/输出关系。

最常用的典型序列是单位抽样序列、单位阶跃序列、矩形序列。正弦序列和指数序列。