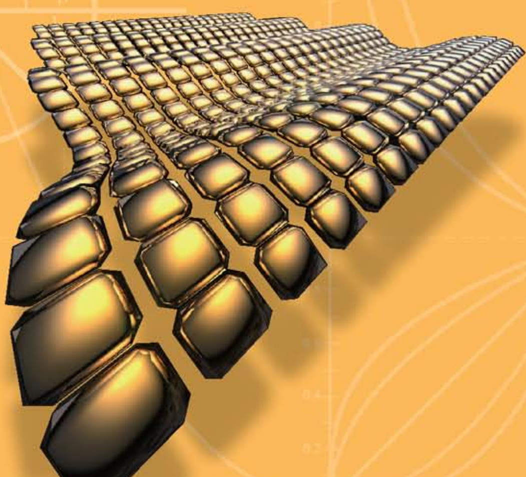
第50届国际数学奥林匹克
中国国家队领队、主教练

朱华伟　主编

AOSHU JIANGYI

奥数讲义

初一分册



数学奥林匹克

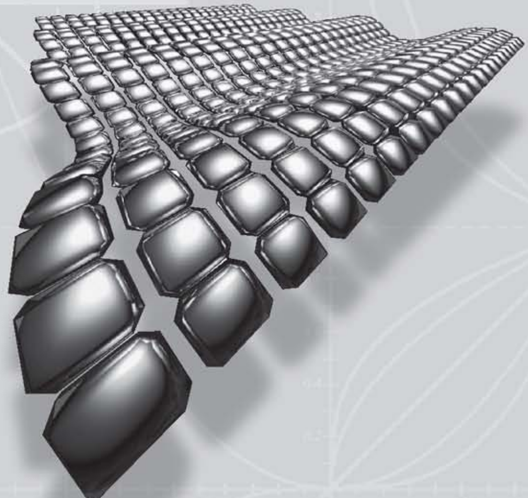
SPM 南方出版传媒
全国优秀出版社
全国百佳图书出版单位
广东教育出版社

第50届国际数学奥林匹克
中国国家队领队、主教练
朱华伟　主编

AOSHU JIANGYI

奥数讲义

初一分册



数学奥林匹克

SPM 南方出版传媒
全国优秀出版社
全国百佳图书出版单位
广东教育出版社
·广州·

图书在版编目（CIP）数据

奥数讲义．初一分册／朱华伟主编．—广州：广东教育出版社，2016.8

ISBN 978－7－5548－1262－4

Ⅰ.①奥…　Ⅱ.①朱…　Ⅲ.①中学数学课－初中－教学参考资料　Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 165334 号

责任编辑：唐健敏
责任技编：杨启承
封面设计：何　维

广东教育出版社出版发行
（广州市环市东路 472 号 12－15 楼）
邮政编码：510075
网址：http://www.gjs.cn
广东新华发行集团股份有限公司经销
广 州 市 番 禺 区 友 联 彩 印 厂 印 刷
（广州市番禺区沙湾陈涌工业区九横路南）
890 毫米×1240 毫米　32 开本　10.25 印张　405 000 字
2016 年 8 月第 1 版　2016 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978－7－5548－1262－4
定价：32.00 元
质量监督电话：020－87613102　邮箱：gjs－quality@gdpg.com.cn
购书咨询电话：020－87615809

编委会

前　言

数学被誉为“科学的皇后”。在人类文明的历史长河中，中华民族对数学的发展曾做出卓越的贡献。勾股定理、祖冲之圆周率、九章算术等丰硕成果无不闪烁出其耀眼的光芒。新中国成立以来，中国的现代数学有了长足的发展，先后涌现出华罗庚、陈景润等一批著名数学家。数学大师陈省身教授曾预言：“21世纪，中国必将成为数学大国。”从1985年我国第一次派队参加国际数学奥林匹克以来，中国代表团共30次参赛，其中19次团队总分居第一位（有11次获得6枚金牌），7次团队总分居第二位，各1次团队总分居第四、六、八位，176人次参赛，共获金牌138块、银牌30块、铜牌6块。中国中学生近年来在国际数学奥林匹克中的出色成绩，使人们相信陈省身教授的这一“猜想”将在21世纪得到证明。

由于计算机的出现，数学已不仅是一门科学，还是一种普适性的技术。从航空到家庭，从宇宙到原子，从大型工程到工商管理，无一不受惠于数学技术。高科学技术本质上是一种数学技术。美国科学院院士格里姆（J. Glimm）说：“数学对经济竞争力至为重要，数学是一种关键的普遍使用的，并授予人能力的技术。”时至今日，数学已兼有科学与技术两种品质，这是其他学科少有的。数学对国家的贡献不仅在于富国，而且还在于强民。数学给予人们的不仅是知识，更重要的是能力，这种能力包括观察实验、收集信息、归纳类比、直觉判断、逻辑推理、建立模型和精确计算。这些能力的培养，将使人终身受益。这些能力的培养，必须从小抓起，从青少年抓起。而数学奥林匹克活动，则是培养这些能力的良好载体。

基于这样的想法，笔者以国内外初中数学奥林匹克为背景，以《全日制义务教育数学课程标准》的新理念、新要求为准绳，根据多年培训数学奥林匹克选手的经验和体会，编写了这套奥数教程，既

为学有余力且对数学感兴趣的初中生提供了一个施展才华和提高数学解题能力的指导，也为参加数学竞赛的初中生提供了一套科学实用的培训教程。本套书的读者对象范围很广，适用于备战初中各种数学竞赛的初中生和老师。

本套书设计新颖，方便老师、学生和家长使用，分初一分册、初二分册、初三分册三册。

本套书每册都以专题的形式编写，每讲的主要栏目有：赛点突破、经典赛题剖析、同步训练。“同步训练”栏目中，题目根据难易程度分为选择题、填空题、解答题，供学生、老师和家长选择使用。全书后附有“同步训练”题目的详解。

问题是数学的心脏，数学奥林匹克是解题的竞赛。要提高解题能力，必须进行一定量的训练。本套书精选了具有代表性的经典例题，配备了足够的训练题和测试题。在这些题目中既有经典的名题，又有国内外近几年涌现的佳题，还有笔者根据自己的教学实践编撰的新题。设置这些题目时，笔者专门针对学生学习的实际，突出知识的重点、难点，以期达到提高的目的。

本套书注重数学基础知识的巩固提高和数学思想方法的渗透，凸现科学精神和人文精神的融合，加强对学生学习兴趣、创新精神、实践能力、应用意识和分析问题及解决问题能力的培养。

数学大师陈省身教授为 2002 年 8 月在北京举行的第 24 届国际数学家大会题词：“数学好玩。”我们深信本套书能让你品味到数学的无穷乐趣。著名数学家陈景润说得好：“数学的世界是变幻无穷的世界，其中的乐趣只有那些坚持不懈的人才能体会得到！”

朱华伟

2016 年 6 月

目 录

第1讲　代数初步知识

赛点突破

从确定的数到用字母表示数,并且表示数的字母像数一样地参加运算,进而引入代数式,是数学发展史上的一个里程碑,也是我们学习过程的一次飞跃.代数式使数量关系的表示简洁明了,使具有相同性质的不同数学问题可以用同一个式子表示,是从具体上升到抽象与概括的有力工具,给研究和计算带来了极大方便.

1.代数式的意义

用运算符号把数或表示数的字母联结而成的式子,叫作代数式.单独的一个数或一个字母,像 -1,0,a,x 也是代数式,这里"用运算符号联结"一般指加、减、乘、除、乘方、开方等运算.

学习本章一定要重视实际生活中数学问题与数学语言的转化,一方面会根据实际情况列出代数式,另一方面会翻译代数式的含义.

2.图形关系的代数表示

有些数量关系是图形中的数量关系或图形中隐藏着某些特殊的数量关系,这种关系通过观察,归纳总结成代数关系——代数式,这样实现数与形的结合,使抽象与直观相结合,对培养数学能力是非常重要的.

3.由代数式展开的推理

在数学问题中恰当地选择表示数的字母,准确合理地列出有关的代数式,通过代数式的比较以及运算展开逻辑推理,是代数式应用的一个重要方面.

4.用字母表示数解题

在某些数学问题中,如果把其中的特殊常数用字母表示,即用字

母表示数解题,常会收到化繁为简、化难为易的效果.

经典赛题剖析

例 1 a,b,c 都是有理数,试说出下列式子的意义:

①$a+b=0$ ②$ab>0$ ③$ab\neq0$ ④$ab=0$ ⑤$ab=1$ ⑥$ab=-1$

⑦$a^2+b^2=0$ ⑧$(a-b)(b-c)(c-a)=0$

⑨$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq0$ ⑩$abc=0$

解 ①$a+b=0$——a,b 互为相反数.

②$ab>0$——a,b 为同号两数.

③$ab\neq0$——a,b 均不为零.

④$ab=0$——a,b 中至少有一个为零.

⑤$ab=1$——a,b 互为倒数.

⑥$ab=-1$——a,b 互为负倒数.

⑦$a^2+b^2=0$——a,b 均等于零.

⑧$(a-b)(b-c)(c-a)=0$——a,b,c 中至少有两个相等.

⑨$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq0$——$a,b,c$ 不全相等.

⑩$abc=0$——a,b,c 中至少有一个为零.

例 2 A、B 两家公司都准备向社会招聘人才,两家公司招聘的条件基本相同,只有工资待遇有如下差异:A 公司,年薪 1 万元,每年加工龄工资 200 元;B 公司,半年薪 5000 元,每半年加工龄工资 50 元。从经济收入的角度考虑的话,选择哪家公司有利一些?

解 分别列出第一年、第二年……第 n 年的实际收入:

第一年:

A 公司:10 000(元);

B 公司:5000 + 5050 = 10 050(元).

第二年:

A 公司:10 200(元);

B 公司:5100 + 5150 = 10 250(元).

……

一般地,第 n 年:

A 公司:$10\,000+(n-1)\cdot 200$(元);

B 公司:$[5000+(n-1)\cdot 100]+[5000+(n-1)\cdot 100+50]=10\,050+(n-1)\cdot 200$(元).

也就是说,在 B 公司工作,永远比 A 公司工作的年收入多 50 元,所以选择 B 公司有利一些.

评注　若不细考察的话,很可能选错公司,聪明人也会吃“想当然”的亏,平时学习数学时有意识地培养我们应用数学的意识就会少吃亏.

例 3　分别观察图 1-1(1)、(2)中隐藏的数量关系.

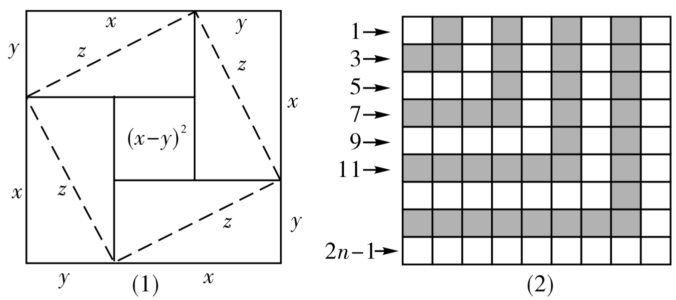


图 1-1

解　(1)对正方形的面积用两种不同的方法计算得到下面的等式:

$(x+y)^2=4xy+(x-y)^2$.

因为$(x-y)^2\geqslant 0$,所以有下面的不等关系:$(x+y)^2\geqslant 4xy$,当 $x=y$ 时取等号.

评注　1. 学过乘法公式之后,上述不等式可化简为 $x^2+y^2\geqslant 2xy$,当 $x=y$ 时取等号.

2. 在该图形中虚线构成一个正方形,它的面积 $z^2=4\cdot\frac{xy}{2}+(x-y)^2$,学过乘法公式之后可化简为:$z^2=x^2+y^2$,这就是著名的勾股定理.

(2)从图中我们可以看到这是一个 $n\times n$ 的方格网,考虑每一个

"L"形中所含格子数恰好分别为 $1,3,5,7,\cdots,2n-1$. 也就是说,这个格网中全部格子数是:

$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)$.

另一方面,它又是 $n\times n$ 的网格,显然网格中全部格子数是 $n\times n=n^2$,于是有:

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

评注 我们要善于观察图形所反映的数量关系,反之也要注意抽象的数量关系如何用直观的图形来描述,实现数形结合,以便由形助数,把抽象的数学问题直观化、形象化.

例 4 如图 1－2,一个矩形被分成 11 个不同大小的正方形,其中最小正方形的边长是 9 mm,求矩形的边长.

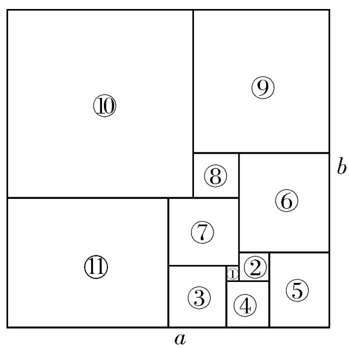


图 1－2

分析 给图中正方形编号. ②号正方形的边长设为 x,则从里到外③④…⑪号正方形边长逐步用 x 的代数式表示. 隐藏的等量关系是每一横行、每一纵列中的正方形边长之和必须分别等于矩形的长和宽. 列出方程求出 x,问题就迎刃而解了.

解 如图,给图中的小正方形编号. ①号正方形的边长是 9 mm,设②号正方形的边长为 x(mm),矩形的长为 a(mm),宽为 b(mm).

③的边长 $x+9+9=x+18$,

④的边长 $x+9$,

⑤的边长 $x+(x+9)=2x+9$,

⑥的边长 $x+(2x+9)+3x+9$,

⑦的边长 $(x+18)+9=x+27$,

⑧的边长 $(2x+9)+(3x+9)-(x+27)-(x+18)=3x-27$,

⑨的边长 $(3x-27)+(3x+9)=6x-18$,

⑩的边长 $(6x-18)+(3x-27)=9x-45$,

⑪的边长 $(x+27)+(x+18)=2x+45$,

所以 $b=9x-45+2x+45=11x$.

注意到矩形的长边 a 由⑨⑩的正方形的边组成,所以:

$a=(9x-45)+(6x-18)=15x-63$.

a 又可由⑪④③⑤四个正方形的边组成,所以:

$a=(2x+45)+(x+18)+(x+9)+(2x+9)=6x+81$,

所以 $15x-63=6x+81$, $x=16$.

因此,矩形长 $a=15\times16-63=177(\text{mm})$,宽 $b=11\times16=176(\text{mm})$.

例 5　证明一个奇数与一个偶数之和是奇数.

分析　在小学阶段,奇数加偶数等于奇数是靠直接观察概括得出的结论,实际上并没有证明任一个奇数与任一个偶数之和都是奇数. 现在我们通过奇数与偶数的代数式表示来进行证明.

证明　设任一个奇数 $a=2n+1$,其中 n 是整数,任一偶数表示为 $b=2m$,其中 m 是整数. 则 $a+b=(2n+1)+2m=2(m+n)+1=2N+1$.

评注　任一奇数表示为 $2n+1$,任一偶数表示为 $2m$,而不能表示为 $2n$,因为若表示为 $2n$,这样只是对相邻的奇数与偶数之和进行了证明,并未对不相邻的奇数与偶数的情况进行证明,所以奇数表示为 $2n+1$,偶数表示为 $2m$, n 与 m 分别独立地任意取值时才具有一般性,这是初学者容易忽略的事实.

例 6　用 a 米长的篱笆材料,在空地上围成一个训练场地,现有两种设计方案:一种是围成正方形的场地;另一种是围成圆形的场地. 试问选用哪一种方案围成的场地面积较大?并说明理由.

解 设 S_1、S_2 分别表示围成的正方形场地和圆形场地的面积，则：

$$S_1=\left(\frac{a}{4}\right)^2=\frac{a^2}{16},S_2=\pi\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2=\frac{a^2}{4\pi}.$$

因为 $\pi<4$，所以 $\frac{1}{\pi}>\frac{1}{4}$，$\frac{a^2}{16}<\frac{a^2}{4\pi}$.

所以 $S_2>S_1$. 故应选用围成圆形场地的方案，它的面积较大.

例 7 化简 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2001}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2000}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2001}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2000}\right)$.

分析 直接计算复杂而繁难，注意括号内数式的联系，引入字母，将复杂的数值计算转化为简单的代数式的计算.

解 设 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2000}=a$，$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2000}=b$，则

$$\begin{aligned}原式&=\left(b+\frac{1}{2001}\right)a-\left(a+\frac{1}{2001}\right)b\\&=ba+\frac{a}{2001}-ab-\frac{b}{2001}\\&=\frac{a-b}{2001}=\frac{1}{2001}.\end{aligned}$$

例 8 有依次排列的 3 个数：3，9，8. 对任相邻的两个数，都用右边的数减去左边的数，所得之差写在这两个数之间，可产生一个新数串：3，6，9，−1，8，这称为第一次操作；做第二次同样的操作后可产生一个新数串：3，3，6，3，9，−10，−1，9，8. 继续依次操作下去，问：从数串 3，9，8 开始操作第一百次以后所产生的那个新数串的所有数之和是多少？

解 为方便起见，我们设依次排列的 n 个数组成的数串为：

$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$.

依题设操作方法可得新增的数为：

$a_2-a_1, a_3-a_2, a_4-a_3, \cdots, a_n-a_{n-1}$.

所以新增数之和为：

$(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=a_n-a_1$.　①

原数串为 3 个数:3,9,8.

第 1 次操作后所得数串为:3,6,9,-1,8.

根据①可知,新增 2 项之和为：

$6+(-1)=5=8-3$.

第 2 次操作后所得数串为：

3,3,6,3,9,-10,-1,9,8.

根据①可知,新增 4 项之和为：

$3+3+(-10)+9=5=8-3$.

按这个规律下去,第 100 次操作后所得新数串所有数的和为：

$(3+9+8)+100\times(8-3)=520$.

同步训练

一、选择题

1. “a 与 b 的和的立方”的代数式表示是(　　).（导学号　53000000）

(A)a^3+b^3　　(B)$a+b^3$　　(C)a^3+b　　(D)$(a+b)^3$

2. M 表示 a 与 b 的和的平方,N 表示 a 与 b 的平方的和,则当 $a=7$,$b=5$ 时,$M-N$ 的值是(　　).（导学号　53000001）

(A)28　　(B)70　　(C)42　　(D)0

3. If $3(4x+5\pi)=P$, then $6(8x+10\pi)=$(　　).（导学号　53000002）

(A)$2P$　　(B)$4P$　　(C)$6P$　　(D)$8P$

4. 小明编制了一个计算程序,当输入任一有理数,显示屏的结果总等于所输入有理数的平方与 1 之和. 若输入 -1,并将所显示的结果再次输入,这时显示的结果应当是(　　).（导学号　53000003）

(A)2　　(B)3　　(C)4　　(D)5

5. 某人在一环形公路上练习跑步,共跑两圈,第一圈的速度是 x 米/分钟,第二圈的速度是 y 米/分钟($x>y$),则平均 1 分钟跑的路程是(　　).　　(导学号　53000004)

(A)$\frac{x+y}{2}$　　(B)$\frac{xy}{x+y}$　　(C)$\frac{x+y}{xy}$　　(D)$\frac{2xy}{x+y}$

二、填空题

6. 当 $x=\frac{2}{3}$时,代数式 $1+3x$ 的值是$\frac{1}{3}$的________.

(导学号　53000005)

7. 当 $x=1,y=2$ 时,$ax+by-3=0$,那么当 $x=2,y=4$ 时,$ax+by-3=$________.　　(导学号　53000006)

8. 圆周上有 n 个互不相等的数,任一数等于它相邻两数之积,则 n 等于________.　　(导学号　53000007)

9. 如图 1-3,O 为圆心,半径 $OA=OB=r$,$\angle AOB=90°$,点 M 在 OB 上,$OM=2MB$,用 r 的式子表示阴影部分的面积是________.

(导学号　53000008)

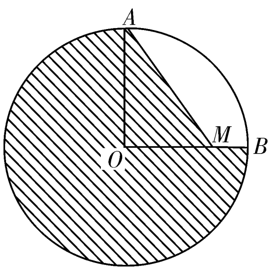


图 1-3

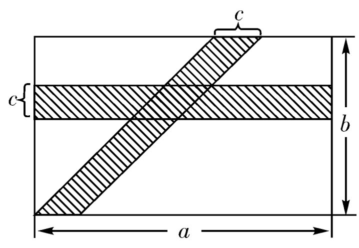


图 1-4

10. 如图 1-4,一个长为 a 宽为 b 的矩形,两个阴影图形都是一对长为 c 的底边在矩形对边上的平行四边形,试用 a、b、c 表示矩形中未涂阴影部分面积,代数式是____________.　　(导学号　53000009)

三、解答题

11. 某工厂去年的生产总值比前年增长 $a\%$,问前年比去年少的百

分数是多少?　(导学号　53000010)

12. 有 15 名运动员进行乒乓球单循环赛,每名运动员都与其他运动员赛一场,若 1 号运动员胜 x_1 场,2 号运动员胜 x_2 场,…,15 号运动员胜 x_{15} 场,试求 $x_1+x_2+\cdots+x_{15}$ 的值.　(导学号　53000011)

13. 一件工作,甲独做要 a 天完成,乙独做要 $b(b<a)$ 天完成,这件工作先由甲做了若干天,然后由乙继续做完,从开始到完成共用了 c 天$(b<c<a)$,问甲、乙两人各做了几天?　(导学号　53000012)

14. 两家售货亭以同样的价格出售某种商品. 一星期后第一家把价格降低 10% ,再过一星期后又提高 20% ,第二家只是在两星期后才提价 10% ,问两星期后哪家售货亭的售价低?　(导学号　53000013)

15. 求证:两个整数之和与这两个整数之差的和,一定是第一个数的 2 倍.　(导学号　53000014)

16. 如果一个自然数正好等于其各个数位上的数字之和的 13 倍,试求出这样的自然数,并说明理由.　(导学号　53000015)