

数学

M A T H S



谢桂真◎主编



中国海洋大学出版社
CHINA OCEAN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学 / 谢桂真编著. —青岛:中国海洋大学出版社,
2018.8

ISBN 978-7-5670-1882-2

I. ①数… II. ①谢… III. ①数学课—中等专
业学校—教材 IV. ①G634.601

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 162206 号

数 学

出版发行	中国海洋大学出版社	
社 址	青岛市香港东路 23 号	邮政编码 266071
网 址	http://www.ouc-press.com	
出 版 人	杨立敏	
责任编辑	邹伟真	
电 话	0532—85902533	
电子信箱	zwz_qingdao@sina.com	
印 制	蓬莱利华印刷有限公司	
版 次	2018 年 8 月第 1 版	
印 次	2018 年 8 月第 1 次印刷	
成品尺寸	185 mm×260 mm	
印 张	13.75	
字 数	318 千	
印 数	1—600	
定 价	37.80 元	
订购电话	0532—82032573(传真)	

如发现印装质量问题,请致电 0535—5651533,由印刷厂负责调换。

前 言

亲爱的同学们,欢迎大家使用本教材教科书,希望它能够陪伴你们度过一个愉快而充实的数学学习过程.

本教材共八章,内容包含了“集合”“方程与不等式”“函数”“指数函数与对数函数”“三角函数”“平面向量”“三角计算及其应用”“复数”.每个章节的数学概念、数学方法与数学思想都与我们将来所学的专业紧密相关.

在本教材中,我们通过适当的问题情境,引出需要学习的数学内容,通过“观察”“思考”“探究”等教学活动,引导同学们发现问题、提出问题,通过亲身实践、主动思维,经历不断地从具体到抽象、从特殊到一般的抽象概括活动来理解和掌握数学基础知识,夯实数学基础.

在本教材中,我们利用数学内容之间的内在联系,启发和引导同学们学习类比、推广、特殊化、划归等数学思考的常用逻辑方法,使同学们学会数学思考与推理,不断提高数学思维能力.

此外,我们为同学们提供应用数学知识解决各种数学内外问题的机会,使同学们加深对数学概念本质的理解,认识数学知识与实际的联系,并学会用数学知识和方法解决实际问题.

教材中还附加了“数学故事”“数学应用”等拓展性知识,为同学们提供选学素材,有兴趣的同学可以自主选择其中的一些内容进行探究.

祝愿同学们通过本教材的学习,不但学到更多的数学知识,而且在提高数学能力及用数学解决实际问题的能力等方面都有较大的提高,并培养起更浓厚的数学学习兴趣,形成对数学学科更加全面的认识.

由于编者水平所限,书中难免存在不足之处,诚望专家和读者批评指正.

编 者

目 录

第一章 集 合	1
第一节 集合及其表示	1
第二节 集合之间的关系	5
第三节 集合的基本运算	7
第四节 充要条件	10
习题一	13
阅读与实践	14
第二章 方程与不等式	16
第一节 一元二次方程	16
第二节 不等式的解集与区间	19
第三节 含有绝对值的不等式	23
第四节 一元二次不等式的解法	26
习题二	30
阅读与实践	32
第三章 函 数	34
第一节 函数的概念与表示方法	34
第二节 函数的单调性	40
第三节 函数的奇偶性	45
第四节 一元二次函数的图象及应用	49
习题三	56
阅读与实践	56
第四章 指数函数与对数函数	58
第一节 实数指数	58
第二节 指数函数	63
第三节 对数及其运算	67

第四节 对数函数	72
第五节 幂函数	75
习题四	78
阅读与实践	79
第五章 三角函数	81
第一节 任意角与弧度制	81
一、角的概念推广	81
二、用弧度制求扇形的弧长和面积	84
第二节 任意角的三角函数	87
一、任意角的三角函数的定义	87
二、单位圆与正弦、余弦线	90
三、三角函数值的符号	93
第三节 同角三角函数的基本关系	95
第四节 诱导公式	99
第五节 正弦、余弦函数的图象和性质	104
一、正弦函数的图象和性质	104
二、余弦函数的图象和性质	109
习题五	110
阅读与实践	111
第六章 平面向量	114
第一节 向量的概念	114
第二节 向量的线性运算	117
一、向量的加法	117
二、向量的减法	120
三、数乘向量	123
第三节 平面向量的直角坐标运算	126
一、平面向量的直角坐标及其运算	126
二、平面向量平行的坐标表示	130
三、向量的长度公式和中点公式	132
第四节 向量的内积	135
一、向量的内积	135
二、向量内积的直角坐标运算	138
习题六	140
阅读与实践	141

第七章 三角计算及其应用	143
第一节 和角公式	143
一、两角和与差的余弦	143
二、两角和与差的正弦	146
三、两角和与差的正切	151
第二节 倍角公式	154
第三节 正弦型函数的图象和性质	158
第四节 解三角形	166
一、正弦定理	166
二、余弦定理	170
第五节 三角计算应用举例	174
习题七	179
阅读与实践	180
第八章 复 数	183
第一节 复数的概念与几何意义	183
一、复数的概念	183
二、复数的几何意义	187
第二节 复数的运算	191
一、复数的加法和减法	191
二、复数的乘法和除法	193
第三节 复数的三角形式	197
一、复数的三角形式	197
二、复数三角形式的乘除运算	201
第四节 复数的指数形式、极坐标形式及其应用	205
习题八	209
阅读与实践	211

第一章 集 合

无论是海洋里的生物,还是海面上航行的轮船;无论是海滩上游玩的人,还是天空中美丽的风筝,都可以看成一个一个的整体,构成不同的集合.集合是现代数学的基本概念,用它可以简洁、准确地表达数学内容.学好这一章可以为今后学习数学奠定基础,并能进一步提高运用数学语言去理解和处理问题的能力.

第一节 集合及其表示

任务提出

某班上学期期末考试科目是一个整体;而语文、数学、英语、物理、工程基础、船舶电气、船舶辅机和柴油机是组成这个整体的具体元素.那么,某班上学期期末考试科目用集合形式如何表示?数学与这个整体是什么关系?

某班上学期期末考试安排表

星期 时间	一	二	三	四	五
8:30—10:30	语文	数学		物理	船舶辅机
13:30—15:30	工程基础		英语	船舶电气	柴油机

任务分析

“某班上学期期末考试科目”组成的集合,

用描述法表示为: $\{\text{某班上学期期末考试科目}\}$;

用列举法表示为: $\{\text{语文, 数学, 英语, 物理, 工程基础, 船舶电气, 船舶辅机, 柴油机}\}$;

数学与整体的关系表示为：数学属于{某班上学期期末考试科目}.

知识探究

(一) 集合的概念

在初中,我们也用过“集合”这个词.例如,自然数的集合、有理数的集合、不等式 $x-7<3$ 解的集合、平面内到一个定点的距离等于定长的点的集合(即圆),等等.

我们再来看下面的一些例子:

- (1) 某学校高一年级学生的全体;
- (2) 所有的正方形;
- (3) 方程 $x^2=9$ 的所有实数根;
- (4) 平面上到一条线段的两个端点距离相等的点的全体.

例(1)中,我们把某学校高一年级的每一位学生作为一个确定的对象,这些对象的全体构成一个集合;例(3)中,把方程 $x^2=9$ 的每一个实数根作为一个确定的对象,这些对象的全体也构成一个集合;同样地,例(2)(4)中的对象的全体也分别构成一个集合.

一般地,把具有某种特定属性的对象所构成的整体称为**集合**,简称为**集**.集合中的每个对象叫做这个集合的**元素**.

一个集合,通常用大写英文字母 $A, B, C, \dots$ 来表示,它的元素通常用小写英文字母 $a, b, c, \dots$ 来表示.

如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A ,记作 $a \in A$,读作“ a 属于 A ”;如果 b 不是集合 A 的元素,就说 b 不属于 A ,记作 $b \notin A$,读作“ b 不属于 A ”.

关于集合,再作如下说明:

(1) 确定性:集合中的元素是完全确定的.这就是说,不能完全确定的对象不能构成集合.例如,高一(1)班高个子同学的全体,就不能构成集合.这是由于没有规定同学多高的才是高个子,因而“高个子同学”不能确定.

(2) 互异性:一个给定集合中的元素,是互不相同的.也就是说,相同的元素只能出现一次.

(3) 无序性:集合中的元素没有先后顺序,也就是说,任意改变集合中元素的排列顺序,它们仍然表示同一个集合.

含有有限个元素的集合叫做**有限集**,含有无限个元素的集合叫做**无限集**.

特别地,我们把不含任何元素的集合叫做**空集**,记作 $\emptyset$.例如,由平方等于 -1 的所有实数组成的集合就是空集.

人们约定用特定的一些大写英文字母表示数学中一些常用的数集,见表 1-1.

试一试

试举出几个集合的例子.

读一读

在 1889 年,意大利数学家皮亚诺 (G. Peano, 1858—1932), 首先使用“ $\in$ ”来表示“属于”.

表 1-1 常用数集及其记号

常用数集	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
记号	$\mathbf{N}$	$\mathbf{N}_+$ 或 $\mathbf{N}^*$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{R}$

(二) 集合的表示方法

1. 列举法:当集合中元素不多时,我们把集合中的全部元素一一列举出来,元素与元素之间用逗号隔开,并用大括号“ $\{ \}$ ”括起来,这种表示集合的方法称为**列举法**.

例如,由 1,2,3,4,5 构成的集合,可以表示为 $\{1,2,3,4,5\}$.

又如,中国古代四大发明构成的集合,可以表示为 $\{\text{指南针,造纸术,活字印刷术,火药}\}$.

再如,方程 $x^2+2x-3=0$ 所有的解构成的集合,可表示为 $\{-3,1\}$.

有些集合的元素较多,在不引起误解的情况下,也可列出几个元素作为代表,其他元素用省略号表示.例如,小于 100 的自然数的全体构成的集合,可表示为 $\{0,1,2,3,\dots,99\}$.

有的集合只有一个元素.例如 $\{0\},\{1\},\{a\}$ 等.注意 0 与 $\{0\}$ 的本质区别: $\{0\}$ 表示一个集合,0 是集合 $\{0\}$ 的一个元素.

想一想

a 与 $\{a\}$ 有什么区别?

例 1 用列举法表示下列集合:

- (1) 大于 3 且小于 10 的所有奇数构成的集合;
- (2) 方程 $x^2-x=0$ 的解的全体构成的集合;
- (3) 一次函数 $y=-x+1$ 的图象与坐标轴所有交点构成的集合.

解:(1) $\{5,7,9\}$; (2) $\{0,1\}$; (3) $\{(1,0),(0,1)\}$.

这里(1)(2)均为数集,而(3)是由平面上坐标 $(1,0)$ 和 $(0,1)$ 的两个点构成的点集.

2. 描述法:在大括号内先写上表示这个集合的一般符号及其取值(或变化)范围,再画一条竖线,在竖线后写出这个集合中元素所具有的共同特征,这种表示集合的方法称为**描述法**.

例如,满足不等式 $3x>6$ 的全体实数构成的集合的特征性质是“ $x \in \mathbf{R}$,且 $x>2$ ”.

满足特征性质的元素都在集合中,不满足特征性质的元素都不在这个集合中,所以可以把这个集合表示为 $A=\{x \in \mathbf{R} | x>2\}$.

在某种约定下, x 的取值集合可以不写.例如在实数集 $\mathbf{R}$ 中取值, $x \in \mathbf{R}$ 常常省略不写.上述集合 A 可以简写为 $\{x | x>2\}$.

又如:正偶数 2,4,6,8, $\dots$ 的全体构成的集合,它的每一个元素都具有性质“能被 2 整除,且大于

想一想

2,4 是集合 $A=\{x | x>2\}$ 的元素吗?

试一试

自己举出几个集合的例子,并分别用列举法和性质描述法表示出来.

0”，而不属于这个集合的元素都不具有这种性质. 我们可以把这个集合表示为 $\{x \in \mathbf{Z} \mid x = 2n, n \in \mathbf{N}_+\}$. 有时为了方便, 像正偶数这样的集合也可以描述为 $\{x \mid x \text{ 是正偶数}\}$.

例 2 用性质描述法表示下列集合:

- (1) 不等式 $x-1 < 5$ 的解构成的集合;
- (2) 大于 10 且小于 20 的所有有理数构成的集合.

解: (1) 不等式 $x-1 < 5$ 的解构成的集合用性质描述法表示为 $\{x \mid x < 6\}$;

(2) 设大于 10 且小于 20 的所有有理数为 x , 它满足条件 $x \in \mathbf{Q}$, 且 $10 < x < 20$, 因此用性质描述表示为 $\{x \in \mathbf{Q} \mid 10 < x < 20\}$.

练习

A 组

1. 下面给出的对象中, 哪些能构成集合?

- (1) 某班个子较高的同学;
- (2) 长寿的人;
- (3) $\sqrt{2}$ 的近似值;
- (4) 倒数等于它本身的数;
- (5) 所有的正实数.

2. 用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空:

- (1) $2 \underline{\hspace{1cm}} \mathbf{N}$;
- (2) $-1 \underline{\hspace{1cm}} \mathbf{N}_+$;
- (3) $\sqrt{2} \underline{\hspace{1cm}} \mathbf{Z}$;
- (4) $0 \underline{\hspace{1cm}} \emptyset$;
- (5) $\frac{3}{4} \underline{\hspace{1cm}} \mathbf{Q}$;
- (6) $-2 + \sqrt{3} \underline{\hspace{1cm}} \mathbf{R}$.

3. 用适当方法表示下列集合:

- (1) 大于 2 且小于 17 的全体偶数;
- (2) 平方等于 25 的实数;
- (3) 大于 3 且不小于 7 的全体实数;
- (4) 所有偶数;
- (5) 组成中国国旗的颜色;
- (6) 由 1, 2, 3 组成不重复的三位数;
- (7) 方程 $x^2 - 9 = 0$ 的所有解组成的集合;
- (8) 使分式 $\frac{1}{2x+3}$ 有意义的所有 x 组成的集合;
- (9) 一次函数 $y = 2x - 3$ 图象上所有点组成的集合.

B 组

1. 已知集合 $A = \left\{x \in \mathbf{N} \mid \frac{12}{6-x} \in \mathbf{N}\right\}$, 试用列举法表示集合 A .
2. 已知集合 $A = \{x \mid ax^2 + 2x + 1 = 0, a \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}\}$.

- (1) 若 A 中只有一个元素,求 a 的值;
 (2) 若 A 中至多有一个元素,求 a 的取值范围.
3. 用列举法表示下列集合:
- (1) $\{\text{平方为 } 1 \text{ 的数}\}$; (2) $\{x \mid |x|=3\}$;
 (3) $\{x \mid x^2 - 4x - 5 = 0\}$; (4) $\{x \in \mathbf{Z} \mid -2 \leq x < 10\}$;
 (5) 方程组 $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases}$ 的解集.
4. 用性质描述法表示下列集合:
- (1) 由 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 构成的集合;
 (2) 由 $1, 3, 5, 7, \dots$ 构成的集合;
 (3) 由 $2, 4, 6, 8, \dots$ 构成的集合;
 (4) 由平面直角坐标系内第一象限的点构成的集合.
5. “空集是只包含 0 元素的集合”,这句话对吗? 为什么?

第二节 集合之间的关系

任务提出

考察下列三组集合,说明集合 A 中的任何一个元素与集合 B 的关系.

第一组 李明、张静、王娜、刘远代表轮机 1 班参加学校技能大赛.

集合 $A = \{\text{李明, 刘远}\}$, 集合 $B = \{\text{代表轮机 1 班参加学校技能大赛的所有选手}\}$.

李明 _____ B 刘远 _____ B

第二组 集合 $A = \{1, 3, 5\}$, 集合 $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1 _____ B 3 _____ B 5 _____ B

第三组 集合 $A = \{2, 3\}$, 集合 $B = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$.

2 _____ B 3 _____ B

任务分析

可以发现,“实例考察”的三组集合中,集合 A 中的任何一个元素都属于集合 B ,这时,我们就说集合 A 与集合 B 有包含关系.

为了表达集合之间的这些关系,我们引入如下概念:

如果集合 A 的任意一个元素都是集合 B 的元素,那么集合 A 叫做集合 B 的**子集**,记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$

读作“ A 包含于 B ”或“ B 包含 A ”.

根据这个定义可知,任何一个集合 A 都是它本身的子集,即 $A \subseteq A$.

当集合 A 不是集合 B 的子集时,记作 $A \not\subseteq B$ 或 $B \not\supseteq A$

读作“ A 不包含于 B ”或“ B 不包含 A ”.

如果集合 A 是集合 B 的子集,并且 B 中至少有一个元素不属于 A ,那么集合 A 叫做集合 B 的**真子集**,记作 $A \subsetneq B$ 或 $B \supsetneq A$

读作“ A 真包含于 B ”或“ B 真包含 A ”.

如果两个集合的元素完全相同,那么我们就说这两个集合相等.集合 A 等于集合 B ,记作 $A=B$.

由集合的定义,可得:

如果 $A \subseteq B$,且 $B \subseteq A$,那么 $A=B$;反之,如果 $A=B$,那么 $A \subseteq B$,且 $B \subseteq A$.

规定:空集是任何集合的子集.也就是说,对于任何集合 A 都有 $\emptyset \subseteq A$.

想一想

$\{0\}$ 与 $\emptyset$ 有什么不同? 有什么关系?

我们常用平面上的封闭曲线的内部来表示一个集合,如图 1-1(1)表示集合 A . 如果集合 A 是集合 B 的真子集,那么把表示集合 A 的区域画在表示集合 B 的区域内部,如图 1-1(2)所示.



图 1-1(1)

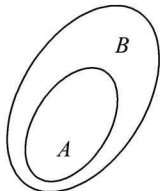


图 1-1(2)

根据子集、真子集的定义可知:

对于集合 A, B, C ,如果 $A \subseteq B, B \subseteq C$,则 $A \subseteq C$;

对于集合 A, B, C ,如果 $A \subsetneq B, B \subsetneq C$,则 $A \subsetneq C$.

例 1 写出集合 $A=\{1,2,3\}$ 的所有子集和真子集.

解: A 的所有子集为: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$.

在上述子集中,除去集合 A 本身,即 $\{1,2,3\}$,剩下的集合都是 A 的真子集.

议一议

怎样保证不重不漏地写出 $\{1,2,3\}$ 的所有子集?

例 2 说出以下两个集合之间的关系:

(1) $A=\{2,4,5,7\}, B=\{2,5\}$;

(2) $S=\{x|x^2=1\}, T=\{-1,1\}$;

(3) $C=\{x|x \text{ 是奇数}\}, D=\{x|x \text{ 是整数}\}$.

解: (1) $A \supsetneq B$; (2) $S=T$; (3) $C \subsetneq D$.

练习

A 组

1. 判断下列集合之间的关系:

$A = \{\text{三角形}\}, B = \{\text{等腰三角形}\}, C = \{\text{等边三角形}\}.$

2. 写出集合 $\{a, b, c\}$ 的所有子集.

3. 集合 $A = \{3, 6, 8, 9\}$ 的子集的个数为_____.

(A) 17

(B) 14

(C) 15

(D) 16

4. 已知集合 $M = \{-1, 0, 1\}, N = \{x | x = ab, a, b \in M \text{ 且 } a \neq b\}$, 则集合 M 与集合 N 的关系是_____.

5. 满足 $\{0, 1, 2\} \subseteq A \subseteq \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 的集合 A 的个数是_____个.

B 组

1. 若 $A = \{-2, 2, 3, 4\}, B = \{x | x = t^2, t \in A\}$, 用列举法表示 B .

2. (1) 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2, 3, 4, a\}$, 若 $A = B$, 则 $a =$ _____;

(2) 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2, 3, a, b\}$, 若 $A = B$, 则点 (a, b) 的坐标为_____;

(3) 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2, 3, a, b\}$, 若 $A \subseteq B$, 则 $a =$ _____.

3. 已知 $\{a, b\} \subseteq M \subseteq \{a, b, c, d\}$, 写出满足条件的所有集合 M .

第三节 集合的基本运算

“运算”这个词, 过去只用于数或数学式子. 这里集合运算的意义是, 有两个已知的集合, 按照某种指定的法则, 构造出一个新的集合.

任务提出

某班参加校运动会男子 100 米短跑比赛和男子跳远比赛的人员各有 4 名. 其中, 学生刘远、张华、李明、王南参加 100 米短跑比赛, 学生李明、王南、赵东、孙晓参加跳远比赛. 总共有多少学生参加这两项比赛?

任务分析

将该班参加男子 100 米短跑比赛同学的全体设为集合 A , 将该班参加男子跳远比

赛同学的全体设为集合 B , 则

$$A = \{\text{刘远, 张华, 李明, 王南}\}$$

$$B = \{\text{李明, 王南, 赵东, 孙晓}\}$$

如图 1-2 所示.

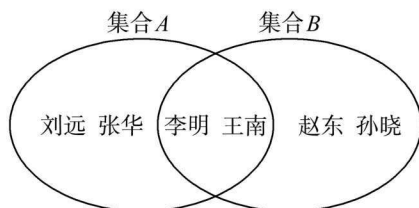


图 1-2

100 米短跑比赛和跳远比赛各有 4 人参加, 那为什么总共仅有 6 人参加这两项比赛而不是 8 人呢? 显然, 原因是集合 A 和集合 B 有公共的部分. 我们把这一公共部分设为集合 C , 把参加这两项比赛的同学的全体设为集合 D . 用列举法表示集合 C 和集合 D .

$$\text{集合 } C = \{\text{李明, 王南}\}$$

$$\text{集合 } D = \{\text{刘远, 张华, 李明, 王南, 赵东, 孙晓}\}$$

知识探究

(一) 交集

一般地, 给定两个集合 A, B , 由既属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素 (或者说是由集合 A 和集合 B 的所有公共元素) 构成的集合, 叫做 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$, 读作“ A 交 B ”, 即 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

例如, $\{3, 6, 8, 9\} \cap \{4, 6, 8, 10\} = \{6, 8\}$.

集合 A 与 B 的交集, 可用图 1-3 中的阴影表示.

由交集的定义可知, 对于任意两个集合 A, B 都有:

- (1) $A \cap B = B \cap A$
- (2) $A \cap A = A$
- (3) $A \cap \emptyset = \emptyset$
- (4) 如果 $A \subseteq B$, 那么 $A \cap B = A$

例 1 设集合 $A = \{x | x < 1\}$, $B = \{x | x < 2\}$, 求 $A \cap B$.

解: $A \cap B = \{x | x < 1\} \cap \{x | x < 2\} = \{x | x < 1\}$.

例 2 设集合 $A = \{x | x \text{ 是奇数}\}$, $B = \{x | x \text{ 是偶数}\}$, $Z = \{x | x \text{ 是整数}\}$, 求 $A \cap Z$, $B \cap Z$, $A \cap B$.

想一想

你能用自己的语言表述 $A \cap B$ 的概念吗?

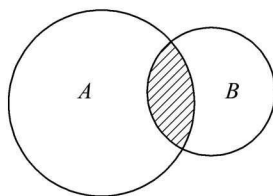


图 1-3

想一想

如果两个集合没有公共元素, 那么它们的交集是什么?

解: 因为 $A \subseteq Z, B \subseteq Z$, 所以 $A \cap Z = A; B \cap Z = B$;

$$A \cap B = \{x | x \text{ 是奇数}\} \cap \{x | x \text{ 是偶数}\} = \emptyset.$$

(二) 并集

一般地, 给定两个集合 A, B , 由属于集合 A 或属于集合 B 的所有元素构成的集合, 叫做 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$, 读作“ A 并 B ”, 即 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

例如: $\{3, 6, 8, 9\} \cup \{4, 6, 8, 10\} = \{3, 4, 6, 8, 9, 10\}$.

集合 A 与 B 的并集, 可用图 1-4 中的阴影表示.

由并集的定义可知, 对于任意两个集合 A, B 都有

$$(1) A \cup B = B \cup A$$

$$(2) A \cup A = A$$

$$(3) A \cup \emptyset = A$$

$$(4) \text{ 如果 } A \subseteq B, \text{ 那么 } A \cup B = B$$

例 3 已知集合 $A = \{1, 3, 4\}, B = \{2, 4, 5\}$, 求 $A \cup B$.

解: $A \cup B = \{1, 3, 4\} \cup \{2, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

例 4 设集合 $A = \{x | x > 3\}, B = \{x | x > 5\}$, 求 $A \cup B, A \cap B$.

解: 因为 $B \subseteq A$, 所以 $A \cup B = A, A \cap B = B$.

(三) 补集

每一个集合都是某一个给定集合 U 的子集, 那么就称 U 为这些集合的全集. 例如, 我们在研究数集时, 常常把实数集 R 作为全集. 如果 A 是全集 U 的一个子集, 由全集 U 中所有不属于 A 的元素构成的集合, 叫做 A 在 U 中的补集, 记作 $\complement_U A$, 读作“ A 在 U 中的补集”. 如图 1-5 中的阴影所示.

例如, 设全集 $U = \{x | x \text{ 是实数}\}$, 集合 $Q = \{x | x \text{ 是有理数}\}$, 则 $\complement_U Q = \{x | x \text{ 是无理数}\}$.

由补集的定义可知, 对于给定的全集 U 以及它的任意一个子集 A , 有:

$$(1) A \cup \complement_U A = U$$

$$(2) A \cap \complement_U A = \emptyset$$

$$(3) \complement_U (\complement_U A) = A$$

例 5 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 集合 $A = \{1, 3, 5\}$, 求 $\complement_U A, A \cap \complement_U A, A \cup \complement_U A$.

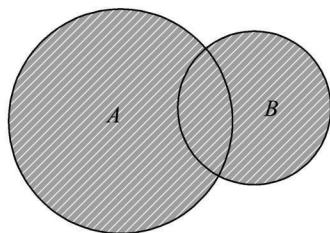
解: $\complement_U A = \{2, 4, 6\}, A \cap \complement_U A = \emptyset, A \cup \complement_U A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

例 6 设全集 $U = R$, 集合 $A = \{x | x > 5\}$, 求 $\complement_U A$.

解: $\complement_U A = \{x | x \leq 5\}$.

想一想

两个集合的公共元素, 在新集合中为什么只出现了一次?



读一读

并集定义中的“或”有三层含义, 一是元素属于集合 A 但不属于集合 B ; 二是元素属于集合 B 但不属于集合 A ; 三是元素属于集合 A 且属于集合 B .

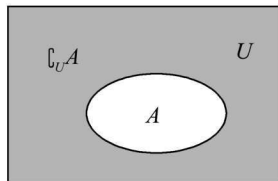


图 1-5

试一试

你能举出几个补集吗?

练习

A 组

- 求下列每小题中两个集合的交集.
 - 设集合 $A=\{a,b,c,d\}, B=\{c,d,e,f\}$;
 - 设集合 $A=\{1,3,5\}, B=\{2,4,6\}$;
 - 设集合 $A=\{x|x\geq -1\}, B=\{x|x<2\}$, 并在数轴上表示.
- 求下列每组中两个集合的并集.
 - 设集合 $A=\{a,b\}, B=\{c,d,e,f\}$;
 - 设集合 $A=\{1,2,3\}, B=\{4,5,6\}$;
 - 已知集合 $A=\{x|-3<x<1\}, B=\{x|x\leq -3\}$.
- 已知集合 $M=\{x|-1<x<1\}, N=\{x|0<x<2\}$, 求集合 $M\cap N, M\cup N$.
- 某年级举行数学、物理、化学三科竞赛活动, 其中 75 人参加数学竞赛, 68 人参加物理竞赛, 61 人参加化学竞赛, 17 人既参加数学竞赛又参加物理竞赛, 12 人既参加数学竞赛又参加化学竞赛, 9 人既参加物理竞赛又参加化学竞赛, 还有 6 人三科都参加, 求参加三科竞赛的总人数.
- 设全集 $U=\{x|x \text{ 是小于 } 9 \text{ 的正整数}\}$, 集合 $A=\{1,2,3\}, B=\{3,4,6\}$, 求 $\complement_U A, \complement_U B$.
- 设全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $A=\{x|x<0\}$, 求 $\complement_U A$.

B 组

- 设全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$, 集合 $A=\{5,2,1\}, B=\{5,4,3,2\}$, 求 $\complement_U A, \complement_U B, \complement_U A \cap \complement_U B, \complement_U A \cup \complement_U B$.
- 设全集 $U=\mathbf{Z}$, 集合 $A=\{x|x=2k, k\in\mathbf{Z}\}, B=\{x|x=2k+1, k\in\mathbf{Z}\}$, 求 $\complement_U A, \complement_U B$.
- 已知集合 $A=\{(x,y)|2x+y=4\}, B=\{(x,y)|3x-2y=-1\}$, 求 $A\cap B$.
- 已知全集 $I=\{x\in\mathbf{N}_+|x\leq 10\}$, $A=\{1,2,4,5,9\}, B=\{3,5,7\}, C=\{4,6,7,8,10\}$. 求: $A\cap B, A\cup B, (A\cap B)\cap C, (A\cup B)\cap C, \complement_U A \cap \complement_U B, \complement_U (A\cap B)$.
- 设全集 $U=\{2,3,5\}, A=\{2,|a-5|\}, \complement_U A=\{5\}$, 求 a 的值.
- 写出满足条件 $\{1,2\}\cup B=\{0,1,2,3\}$ 的所有集合 B .

第四节 充要条件

数学是一门逻辑性很强的学科, 表述数学概念和结论、进行推理和论证, 都要使用逻辑用语. 学习一些常用逻辑用语, 可以使我們正确理解数学概念、合理论证数学结论、

准确表达数学内容.

知识探究

(一) 充要条件

在数学中,我们经常遇到,“如果 p ,那么 q ”的形式,当“如果 p ,那么 q ”正确时,我们就说 p 可以推出 q ,记作 $p \Rightarrow q$,读作“ p 推出 q ”.

此时,我们称 p 是 q 的充分条件,又称 q 是 p 的必要条件.

也就是说“如果 p ,那么 q ”是正确的命题;

$p \Rightarrow q$;

p 是 q 的充分条件;

q 是 p 的必要条件.

这四句话的含义是相同的.下面我们举例说明.

(1) “如果 $x=2$,那么 $x^2-4=0$ ”是正确的命题,这个命题还可表述为

$x=2 \Rightarrow x^2-4=0$;

$x=2$ 是 $x^2-4=0$ 的充分条件;

$x^2-4=0$ 是 $x=2$ 的必要条件.

(2) “如果四边形是矩形,那么四边形的对角线互相平分”是正确的命题,这个命题还可表述为

四边形是矩形 $\Rightarrow$ 四边形的对角线互相平分;

“四边形是矩形”是“四边形的对角线互相平分”的充分条件;

“四边形的对角线互相平分”是“四边形是矩形”的必要条件.

如果 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$,那么称 p 是 q 的充要条件,记作 $p \Leftrightarrow q$,

读作“ p 与 q 等价”或“ p 与 q 互为充要条件”.

例如,一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac=0 \Rightarrow$ 这个一元二次方程有两个相等的实数根;且一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等的实数根 $\Rightarrow \Delta=0$. 所以 $\Delta=0$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等的实数根的充要条件.

例 1 用充分条件、必要条件或充要条件表述下列各题中 p 与 q 的关系:

(1) $p: x > 3, q: x > 5$;

(2) $p: x=y, q: x^2=y^2$;

(3) $p: x$ 是矩形, $q: x$ 是有一个角为直角的平行四边形.

解: (1) 因为 $x > 5 \Rightarrow x > 3$, 所以

q 是 p 的充分条件;

p 是 q 的必要条件.

(2) 因为 $x=y \Rightarrow x^2=y^2$, 所以

p 是 q 的充分条件;

q 是 p 的必要条件.