普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学

（第2版）（上）

Advanced Mathematics (2nd Edition) (Ⅰ)

北京邮电大学高等数学双语教学组 编

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

普通高等教育“十三五”规划教材

高 等 数 学

（第 2 版）（上）

北京邮电大学高等数学双语教学组　编

北京邮电大学出版社
www. buptpress. com

内 容 简 介

本书是根据国家教育部非数学专业数学基础课教学指导分委员会制定的工科类本科数学基础课程教学基本要求编写的教材，全书分为上、下两册，此为上册，主要包括函数与极限、一元函数微积分及其应用和微分方程三部分. 本书对基本概念的叙述清晰准确，对基本理论的论述简明易懂，例题习题的选配典型多样，强调基本运算能力的培养及理论的实际应用. 本书可作为高等理工科院校非数学类专业本科生的教材，也可供其他专业选用和社会读者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上 / 北京邮电大学高等数学双语教学组编. --2 版. -- 北京 ：北京邮电大学出版社，2017.9
ISBN 978-7-5635-5266-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①北… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 214379 号

书　　　名：高等数学(第 2 版)(上)
著作责任者：北京邮电大学高等数学双语教学组　编
责 任 编 辑：彭　楠
出 版 发 行：北京邮电大学出版社
社　　　址：北京市海淀区西土城路 10 号(邮编：100876)
发　行　部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　　销：各地新华书店
印　　　刷：
开　　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　　张：17
字　　　数：442 千字
版　　　次：2012 年 8 月第 1 版　2017 年 9 月第 2 版　2017 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-5266-5　　定价：42.00 元

前　言

高等数学(微积分)是一门研究运动和变化的数学,产生于16世纪至17世纪,是受当时科学家们在研究力学问题时对相关数学的需要而逐渐发展起来的。在高等数学中,微分处理的是当函数已知时,如何求该函数变化率的问题,如曲线的斜率、运动物体的速度和加速度等;而积分处理的是当函数的变化率已知时,如何求该函数的问题,如通过物体当前的位置及作用在该物体上的力来预测该物体的未来位置,计算不规则平面区域的面积,计算曲线的长度等。现在,高等数学已经成为高等院校学生尤其是工科学生最重要的数学基础课程之一,学生在这门课程上学习情况的好坏对其后续课程能否顺利学习有着至关重要的影响。

本书第二版是在第一版的基础上,根据北邮高等数学双语教学组多年的教学实践及第一版教材的使用情况进行全面修订而成。本书上册各章节具体的撰写分工如下:第一章由艾文宝教授编写,第二章和第三章由李晓花副教授编写,第四章和第五章由袁健华教授编写,第六章由默会霞副教授编写。全书由艾文宝教授进行内容审核。本书在内容编排和讲解上适当吸收了欧美国家微积分教材的一些优点,新版教材尽量做到逻辑严谨、叙述清晰、直观性强、例题丰富。本套教材中文版、英文版及习题解答是相互配套的,特别适合双语高等数学的教学需要。由于作者水平有限,加上时间匆忙,书中出现一些错误在所难免,欢迎并感谢读者通过邮箱 jianhuayuan@bupt. edu. cn 指出错误,以便我们及时纠正。

编　者

目　　录

第 1 章　微积分基础知识 ………………………………………………………… 1

1.1　映射与函数 ………………………………………………………………… 1

1.1.1　集合及运算 ……………………………………………………………… 1

1.1.2　映射与函数 ……………………………………………………………… 6

1.1.3　函数的初等特性………………………………………………………… 10

1.1.4　复合函数与反函数……………………………………………………… 12

1.1.5　基本初等函数和初等函数……………………………………………… 14

习题 1.1　A ……………………………………………………………………… 20

习题 1.1　B ……………………………………………………………………… 22

1.2　数列极限…………………………………………………………………… 23

1.2.1　数列极限的定义………………………………………………………… 23

1.2.2　数列极限的性质………………………………………………………… 27

1.2.3　数列极限的运算………………………………………………………… 30

1.2.4　数列极限存在准则……………………………………………………… 33

习题 1.2　A ……………………………………………………………………… 38

习题 1.2　B ……………………………………………………………………… 40

1.3　函数的极限………………………………………………………………… 40

1.3.1　函数极限的概念………………………………………………………… 40

1.3.2　函数极限的性质和运算法则…………………………………………… 46

1.3.3　两个重要极限…………………………………………………………… 51

习题 1.3　A ……………………………………………………………………… 53

习题 1.3　B ……………………………………………………………………… 55

1.4　无穷小与无穷大量………………………………………………………… 55

1.4.1　无穷小量………………………………………………………………… 55

1.4.2　无穷大量………………………………………………………………… 57

1.4.3　无穷小量和无穷大量的阶……………………………………………… 59

习题 1.4　A ……………………………………………………………………… 62

习题 1.4　B ……………………………………………………………………… 64

1.5　连续函数…………………………………………………………………… 64

1.5.1　函数的连续性…………………………………………………………… 64

1.5.2　连续函数的性质和运算 …… 67
1.5.3　初等函数的连续性 …… 68
1.5.4　间断点及其类型 …… 70
1.5.5　闭区间连续函数的性质 …… 73
习题 1.5　A …… 76
习题 1.5　B …… 78

第 2 章　导数和微分 …… 79

2.1　导数的概念 …… 79
2.1.1　引例 …… 79
2.1.2　导数的定义 …… 80
2.1.3　导数的几何意义 …… 83
2.1.4　函数连续性和可导性的关系 …… 84
习题 2.1　A …… 85
习题 2.1　B …… 86
2.2　函数的求导法则 …… 87
2.2.1　导数的四则运算法则 …… 87
2.2.2　复合函数求导法则 …… 88
2.2.3　反函数的求导法则 …… 90
2.2.4　基本求导法则与导数公式 …… 91
习题 2.2　A …… 92
习题 2.2　B …… 93
2.3　高阶导数 …… 94
习题 2.3　A …… 96
习题 2.3　B …… 97
2.4　隐函数和由参数方程所确定函数的求导法则,相对变化率 …… 98
2.4.1　隐函数求导法则 …… 98
2.4.2　由参数方程所确定的函数的求导法则 …… 99
2.4.3　相对变化率 …… 103
习题 2.4　A …… 104
习题 2.4　B …… 106
2.5　函数的微分 …… 106
2.5.1　微分的概念 …… 106
2.5.2　微分的几何意义 …… 108
2.5.3　微分公式与微分运算法则 …… 108
2.5.3　微分在近似计算中的应用 …… 109
习题 2.5 …… 110

第 3 章　微分中值定理与导数的应用 …… 112

3.1　微分中值定理 …… 112

3.1.1 罗尔中值定理 …… 112
3.1.2 拉格朗日中值定理 …… 114
3.1.3 柯西中值定理 …… 116
习题 3.1 A …… 117
习题 3.1 B …… 118
3.2 洛必达法则 …… 118
习题 3.2 A …… 123
习题 3.2 B …… 124
3.3 泰勒公式 …… 125
3.3.1 泰勒公式 …… 125
3.3.2 泰勒公式的应用 …… 128
习题 3.3 A …… 129
习题 3.3 B …… 130
3.4 函数的单调性、极值与最值 …… 130
3.4.1 函数单调性 …… 130
3.4.2 函数的极值 …… 131
3.4.3 函数的最大(小)值及其应用 …… 134
习题 3.4 A …… 136
习题 3.4 B …… 137
3.5 曲线的凹凸性与拐点 …… 137
习题 3.5 A …… 141
习题 3.5 B …… 142
3.6 曲线的渐近线、函数作图 …… 142
习题 3.6 …… 146

第 4 章 不定积分 …… 147

4.1 不定积分的概念和性质 …… 147
4.1.1 不定积分的定义 …… 147
4.1.2 不定积分的基本公式 …… 148
4.1.3 不定积分的运算法则 …… 149
习题 4.1 A …… 151
习题 4.1 B …… 151
4.2 换元积分法 …… 152
4.2.1 第一类换元法 …… 152
4.2.2 第二类换元法 …… 155
习题 4.2 A …… 159
习题 4.2 B …… 161
4.3 分部积分法 …… 161
习题 4.3 A …… 166
习题 4.3 B …… 167

4.4　有理函数的不定积分 …… 168
4.4.1　有理函数的预备知识 …… 168
4.4.2　有理函数的不定积分 …… 170
4.4.3　不能表示为初等函数的不定积分 …… 173
习题 4.4 …… 174

第 5 章　定积分 …… 175

5.1　定积分的概念和性质 …… 175
5.1.1　实例 …… 175
5.1.2　定积分的定义 …… 178
5.1.3　定积分的性质 …… 181
习题 5.1　A …… 185
习题 5.1　B …… 186
5.2　微积分基本定理 …… 186
5.2.1　微积分第一基本定理 …… 187
5.2.2　定积分计算的基本公式 …… 189
习题 5.2　A …… 190
习题 5.2　B …… 192
5.3　定积分的换元法与分部积分法 …… 193
5.3.1　定积分中的换元法 …… 193
5.3.2　定积分的分部积分法 …… 195
习题 5.3　A …… 197
习题 5.3　B …… 198
5.4　反常积分 …… 199
5.4.1　无穷区间上的积分 …… 199
5.4.2　具有无穷间断点的反常积分 …… 202
习题 5.4　A …… 205
习题 5.4　B …… 206
5.5　定积分的应用 …… 206
5.5.1　建立积分表达式的微元法 …… 206
5.5.2　平面图形的面积 …… 208
5.5.3　曲线的弧长 …… 211
5.5.4　立体的体积 …… 214
5.5.5　定积分在物理中的应用 …… 216
习题 5.5　A …… 219
习题 5.5　B …… 220

第 6 章　微分方程 …… 222

6.1　微分方程的基本概念 …… 222
6.1.1　微分方程举例 …… 222

6.1.2 基本概念 …… 223
习题 6.1 …… 225
6.2 一阶微分方程 …… 225
6.2.1 一阶可分离变量方程 …… 225
6.2.2 可化为分离变量的微分方程 …… 226
6.2.3 一阶线性微分方程 …… 230
6.2.4 伯努利微分方程 …… 232
6.2.5 其他可化为一阶线性微分方程的例子 …… 233
习题 6.2 …… 235
6.3 可降阶的二阶微分方程 …… 236
习题 6.3 …… 238
6.4 高阶线性微分方程 …… 239
6.4.1 高阶线性微分方程举例 …… 239
6.4.2 线性微分方程解的结构 …… 241
习题 6.4 …… 243
6.5 常系数线性微分方程 …… 244
6.5.1 常系数齐次线性微分方程 …… 244
6.5.2 常系数非齐次线性方程 …… 248
习题 6.5 …… 253
6.6 *欧拉微分方程 …… 254
习题 6.6 …… 255
6.7 微分方程的应用 …… 255
习题 6.7 …… 259

参考文献 …… 261

第 1 章

微积分基础知识

高等数学(微积分)是研究运动和变化的数学,其研究对象就是变化的量.函数关系是变量之间的依赖关系.微积分中研究函数的基本工具就是极限.本章介绍微积分的基础知识,如集合、函数、极限和函数的连续性等基本概念,以及它们的一些性质.

1.1 映射与函数

1.1.1 集合及运算

1. 集合的概念

集合是数学中的一个基本概念.在研究具体问题时,我们通常遇到一个个的对象,这些研究对象被称为**元素**(element),某些对象(即元素)的总体就叫**集合**(set,简称**集**).通俗说来,所谓集合是指具有某种特定性质的事物的总体.

一般地,我们用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合,用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素.如果 a 是集合 A 的元素,则说 **a 属于 A**,记作 $a\in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,则说 **a 不属于 A**,记作 $a\notin A$ 或 $a\,\overline{\in}\,A$.

表示集合的方法通常有两种,枚举法和描述法.例如,考虑一年的四个季节构成的集合 A,可表示为

$$A=\{春季,夏季,秋季,冬季\}.$$

考虑 1 到 100 之间的所有正整数的集合 B,可表示为

$$B=\{1,2,3,4,\cdots,98,99,100\}.$$

这种将集合的全体元素一一列举出来表示集合的方法称为枚举法.但是并不是每个集合都可以用枚举法来表示.此时,可采用指出集合中的元素的特性来表示该集合,即用描述法来表示集合.若集合 S 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成的,就可以表示成

$$S=\{x\,|\,x\text{ 具有性质 }P\}.$$

例如,考虑全体肉食动物构成的集合 C,可表示为

$$C=\{x\,|\,x\text{ 为肉食动物}\}.$$

考虑方程 $x^2-4=0$ 的解的集合 D,可表示为

$$D=\{x\,|\,x^2-4=0\}.$$

若集合 S 由 n 个元素组成,这里的 n 是一个确定的自然数,则称集合 S 是**有限集**(finite set)，不是有限集的集合称为**无限集**(infinite set). 例如，$A=\{a,b,c,d\}$和 $B=\{1,2,3,4,5\}$都是有限集，$C=\{x|x$ 为大于 1 的实数$\}$是无限集.

考虑数集，下面给出一些常用的数集表示：

$\mathbf{N}=\{x|x$ 为自然数$\}=\{0,1,2,\cdots\}$；

$\mathbf{N}_+=\{x|x$ 为正自然数$\}=\{1,2,\cdots\}$；

$\mathbf{Z}=\{x|x$ 为整数$\}=\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$；

$\mathbf{Q}=\{x|x$ 为有理数$\}$；

$\mathbf{R}=\{x|x$ 为实数$\}$.

对于数集，有时我们在表示数集的字母的右上角标上“$*$”来表示该数集内排除 0 的集，用下标“$+$”来表示该数集内排除负数的集，如 $\mathbf{R}^*$ 为排除 0 的实数集合，$\mathbf{R}_+$ 为全体非负实数的集合.

设 A,B 是两个集合，如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集**(subset)，记作 $A\subseteq B$(读作 A 包含于 B)，或 $B\supseteq A$(读作 B 包含 A). 若 A 不是 B 的子集，则记 $A\nsubseteq B$(图 1.1.1). 例如，$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}$，$\mathbf{Q}\nsubseteq\mathbf{R}_+$.

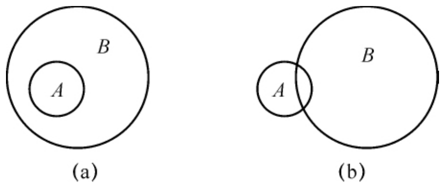

图 1.1.1

如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称两个集合 A 与 B **相等**(equal)，记作 $A=B$. 若 A 与 B 不相等，则记 $A\neq B$. 例如，若

$$A=\{-1,1\},\quad B=\{x|x^2-1=0\},$$

则 $A=B$.

对于集合 A 和集合 B，若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称集合 A 是集合 B 的**真子集**(proper subset)，记作 $A\subset B$. 例如，$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}$，$\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}$，$\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

不含任何元素的集合是**空集**，记作$\varnothing$. 例如，方程 $x^2+1=0$ 的实根所组成的集合

$$\{x|x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x^2+1=0\}$$

就是个空集. 规定空集是任何集合的子集，即任给一集合 A，有$\varnothing\subseteq A$.

例 1.1.1 写出集合 $A=\{1,2,3\}$的所有子集.

解 $\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,2\}$，$\{2,3\}$，$\{1,3\}$，$\{1,2,3\}$. ■

例 1.1.2 设集合 $A=\{-2,-1,1,2\}$，$B=\{x|x^3-x^2-4x+4=0,x\in\mathbf{R}\}$，判断 $A=B$ 是否成立.

解 方程 $x^3-x^2-4x+4=0$ 的实根为 $x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=-2$.

故 $$B=\{1,2,-2\}.$$

可知 $B\subseteq A$，$A\nsubseteq B$，所以 $A\neq B$. ■

2. 集合的运算

集合的基本运算有**并**(union)，**交**(intersection)，**差**(difference)和**补**(complement)四种.

(1) 并集 $A\cup B$

设 A,B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**并集**(union)，记作 $A\cup B$(图 1.1.2(a))，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

例如

$$\{1,2,3\}\cup\{2,3,4\}=\{1,2,3,4\};$$

$$\{x\mid x\in \mathbf{R} \text{ 且 } x\leqslant 0\}\cup\{x\mid x\in \mathbf{R} \text{ 且 } x\geqslant 0\}=\mathbf{R}.$$

(2) 交集 $A\cap B$

设 A,B 是两个集合，由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**交集**(intersection)，记作 $A\cap B$(图 1.1.2(b))，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

例如

$$\{1,2,3\}\cap\{2,3,4\}=\{2,3\};$$

$$\{x\mid x\in \mathbf{R} \text{ 且 } x\leqslant 0\}\cap\{x\mid x\in \mathbf{R} \text{ 且 } x\geqslant 0\}=\{0\}.$$

(3) 差集 $A-B$

设 A,B 是两个集合，由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**差集**(difference)，记作 $A-B$，或 $A\backslash B$(图 1.1.2(c))，即

$$A-B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

例如

$$\{1,2,3\}-\{2,3,4\}=\{1\};$$

$$\{x\mid x\in \mathbf{R} \text{ 且 } x\leqslant 2\}-\{x\mid x\in \mathbf{R} \text{ 且 } x>0\}=\{x\mid x\in \mathbf{R} \text{ 且 } x\leqslant 0\}.$$

(4) 补集 A^C

研究具体问题时，将所有可能的元素构成的集合 X 称为**全集**(universal set)，所研究的其它集合 A 都是 X 的子集，A 的**补集**或**余集**(complement)A^C(图 1.1.2(d))定义为

$$A^C=X-A.$$

例如，在实数集 $\mathbf{R}$ 中，集合 $A=\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$ 的补集就是

$$A^C=\{x\mid x\leqslant 0 \text{ 或 } x>1\}.$$

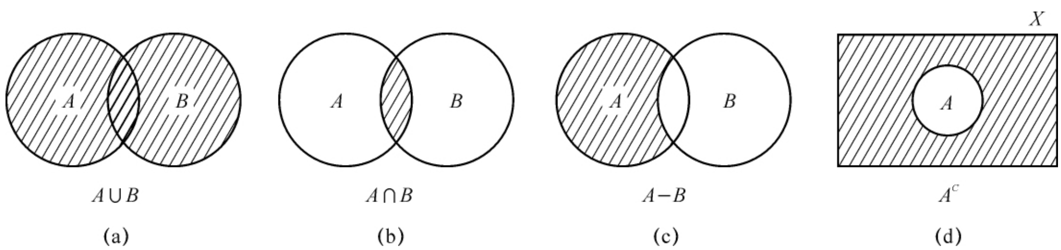

图 1.1.2

(5) 基本集合运算规律

定理 1.1.1(集合运算律) 设 A,B 及 C 为集合，则有

① **交换律**(commutative law) $A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$.

② **结合律**(associative law) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

③ **分配律**(distributive law)　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$;

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

$(A\backslash B)\cap C=(A\cap C)\backslash(B\cap C)$.

④ **幂等律**(idempotent law)　$A\cup A=A$;$A\cap A=A$.

⑤ **吸收律**(absorption law)　$A\cup\varnothing=A$;$A\cap\varnothing=\varnothing$. 若 $A\subseteq B$,则 $A\cup B=B$ 且 $A\cap B=A$.

以上法则都可以根据集合相等的定义验证,现以分配律中的第一个性质为例,给出 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ 的证明. 其余留给读者.

例 1.1.3　设 A,B,C 为任意三个集合,证明 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

证明　首先证明 $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

$x\in A\cap(B\cup C)\Rightarrow x\in A$ 且 $x\in B\cup C$,

$\Rightarrow x\in A$ 且"$x\in B$ 或 $x\in C$",

$\Rightarrow$"$x\in A$ 且 $x\in B$"或"$x\in A$ 且 $x\in C$",

$\Rightarrow x\in A\cap B$ 或 $x\in A\cap C$,

$\Rightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

接下来证明 $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$.

$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\Rightarrow x\in A\cap B$ 或 $x\in A\cap C$,

$\Rightarrow$"$x\in A$ 且 $x\in B$"或"$x\in A$ 且 $x\in C$",

$\Rightarrow x\in A$ 且"$x\in B$ 或 $x\in C$",

$\Rightarrow x\in A$ 且 $x\in B\cup C$,

$\Rightarrow x\in A\cap(B\cup C)$.

综上,$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$. ■

注　以上证明中,符号"$\Rightarrow$"表示"推出"(或"蕴含"). 如果在上例第一段"$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$"证明中,将符号"$\Rightarrow$"改用"$\Leftrightarrow$"(表示"等价"),则上例证明的第二段可省略.

(6) 集合的笛卡儿积 $A\times B$

在两个集合之间还可以定义**笛卡儿积**(Cartesian product,也称为集合的直积). 设 A,B 是任意两个集合,在集合 A 中任意取一个元素 x,在集合 B 中任意取一个元素 y,组成一个有序对 (x,y),由这样的有序对为元素所组成的集合称为集合 A 与集合 B 的笛卡儿积,记为 $A\times B$,即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A \text{ 且 } y\in B\}.$$

例如,$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$,即为 xOy 面上全体点的集合. $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记为 $\mathbf{R}^2$. 更一般地,

$$\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\}$$

称为 n 维空间.

3. 区间与邻域

我们主要讨论实数集 $\mathbf{R}$ 的子集,简称**数集**. 区间是用得较多的一类数集. 设 a 和 b 都是实数且 $a\leqslant b$,闭区间 $[a,b]$,开区间 (a,b),半开区间 $[a,b)$ 和 $(a,b]$ 分别指的是下列数集:

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\};$$

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\};$$

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\};$$

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}.$$
其中,数 a 和 b 称为区间的端点,对开区间 (a,b) 而言,$a\notin(a,b)$ 且 $b\notin(a,b)$. 以上这些区间都称为有限区间. 数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 从数轴上看,有限区间是数轴上长度有限的线段(如图 1.1.3 所示).

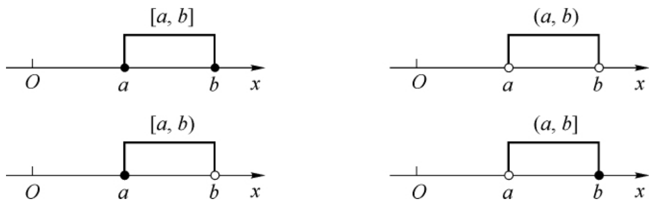

图 1.1.3

此外,我们还能遇到端点含 $\pm\infty$ 的区间,即所谓的无限区间. 例如

$$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\};$$
$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\};$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}=\mathbf{R}.$$

这里"$+\infty$"与"$-\infty$"分别读作"正无穷大"和"负无穷大". 无限区间 $[a,+\infty)$ 和 $(-\infty,b)$ 在数轴上的表示如图 1.1.4 所示.

图 1.1.4

以后在不需要辨明所讨论区间是否包含区间端点,以及区间是有限区间还是无限区间的场合,就简单称之为"**区间**"(interval),且常用 I 表示.

另外一个常用的概念是**邻域**(neighborhood),以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域,记作 $U(a)$. 设 $a\in\mathbf{R}$,$\delta>0$,则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域,称之为 $\boldsymbol{a}$ **的** $\boldsymbol{\delta}$ **邻域**. 它表示与 a 距离小于 δ 的全体实数的集合,记作 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x\mid |x-a|<\delta\}.$$

点 a 称为该邻域的中心,δ 称为该邻域的半径(图 1.1.5).

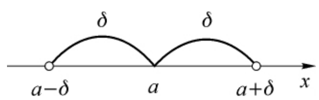

图 1.1.5

集合 $U(a,\delta)-\{a\}$ 表示点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后的数集,称为点 a 的**去心** $\boldsymbol{\delta}$ **邻域**,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

为了方便,有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为点 a 的**左** $\boldsymbol{\delta}$ **邻域**,把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的**右** $\boldsymbol{\delta}$ **邻域**.

1.1.2 映射与函数

***1. 映射的概念**

定义 1.1.1(映射) 设 A 和 B 是两个非空集合. 如果存在一个对应法则 f,使得对集合 A 中每个元素 x,按法则 f 在集合 B 中有唯一确定的元素 y 与之对应,则称 f 为从集合 A 到集合 B 的**映射**(mapping),记为

$$f:A\to B,$$

或

$$f:x\to y=f(x),\quad x\in A.$$

其中元素 y 称为元素 x 在映射 f 下的**像**(image),而元素 x 称为元素 y 在映射 f 下的一个**原像**(inverse image). 集合 A 称为映射 f 的**定义域**(domain 或 domain of definition),记作 D_f,即 $D_f=A$. A 中所有元素的像所构成的集合称为映射 f 的**值域**(range),记作 R_f 或 $f(A)$,即

$$R_f=f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}.$$

注 (1) 构成映射的三要素为:定义域 A,值域范围 B 和对应法则 f;

(2) 对于每个 $x\in A$,其在映射 f 下的像是唯一的;而对于每个 $y\in R_f$,其原像不一定是唯一的;

(3) 映射 f 的值域 R_f 是 B 的一个子集,即 $R_f\subseteq B$,不一定有 $R_f=B$.

例 1.1.4 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,对于每个 $x\in\mathbf{R}$,$f(x)=x^2$,求 R_f.

解 值域 $R_f=\{y\mid y\geqslant 0\}$. ■

例 1.1.5 设 $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$,对于每个 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,$f(x)=\sin x$,求 R_f.

解 值域 $R_f=[-1,1]$. ■

设 f 是从集合 A 到集合 B 一个映射. 若集合 B 中任一元素 y 都是 A 中某元素的像,即值域 $R_f=B$,则称 f 为从集合 A 到集合 B 上的**满射**;若对于 A 中任意两个不同元素,它们对应的像都不同,即任给 $x_1,x_2\in A$,$x_1\neq x_2$,有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则称映射 f 为集合 A 到集合 B 的**单射**;若映射 f 既是单射,又是满射,则称 f 为**一一映射**或**双射**(bijection).

对于 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,$f(x)=x^2$,易知 f 既非单射,又非满射;而对于 $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$,$f(x)=\sin x$,易知 f 既是单射,又是满射,因此 f 是一一映射.

映射又被称为**算子**,在不同的数学分支中,由于集合 A 与 B 的不同情形,映射又有不同的惯用名称. 例如,从非空集合 A 到数集 B 的映射,又称为集合 A 上的**泛函**;从非空集合 A 到 A 的映射,又称为 A 上的**变换**;从实数集(或其子集)A 到实数集 B 的映射通常称为定义在 A 上的**函数**(function).

定义 1.1.2(逆映射) 设 A 和 B 是两个非空集合,f 是 A 到 B 的单射,即对于每个 $y\in R_f$,有唯一的 $x\in A$ 使得 $f(x)=y$,于是可定义一个从 R_f 到 A 的新映射 g,即

$$g:R_f\to A.$$

对于每个 $y\in R_f$,规定 $g(y)=x$,使得元素 x 满足 $f(x)=y$,这个映射 g 称为 f 的**逆映射**(inverse mapping),记作 f^{-1},其定义域 $D_{f^{-1}}=R_f$,值域 $R_{f^{-1}}=A$.

由逆映射的定义可知,只有单射才存在逆映射. 例如,$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,$f(x)=x^2$ 不是单射,不存在逆映射,但 $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$,$f(x)=\sin x$ 为单射,存在逆映射.

例 1.1.6 写出映射 $f:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1]$，$f(x)=\sin x$ 的逆映射，并求出 $D_{f^{-1}}$，$R_{f^{-1}}$.

解 f^{-1}为反正弦函数，即

$$f^{-1}(x)=\arcsin x,\quad x\in[-1,1].$$

其定义域 $D_{f^{-1}}=[-1,1]$，值域 $R_{f^{-1}}=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. ■

定义 1.1.3(复合映射) 设有两个映射

$$g:A\to B,\quad f:C\to D,$$

其中 $B\subseteq C$，则由映射 g 和 f 可以定义一个从 A 到 D 的新的对应法则，使得任给 $x\in A$，有 $f[g(x)]\in D$. 该对应法则确定了一个从集合 A 到集合 D 的映射，称为映射 g 和 f 构成的**复合映射**(composite mapping)，记作 $f\circ g$，即

$$f\circ g:A\to D.$$

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)],\quad x\in A.$$

注 (1) 由复合映射的定义可知，映射 g 和 f 构成复合映射的条件是映射 g 的值域 R_g 必须包含在映射 f 的定义域内，即 $R_g\subseteq D_f$；

(2) 映射 g 和映射 f 的复合是有顺序的，$f\circ g$ 有意义并不表明 $g\circ f$ 有意义，即使 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 都有意义，复合映射 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 也未必相同.

例 1.1.7 设有映射 $g:\mathbf{R}\to[-1,1]$ 且 $g(x)=\sin x$，映射 $f:[-1,1]\to[0,1]$ 且 $f(u)=\sqrt{1-u^2}$，求 $f\circ g$.

解 任给 $x\in\mathbf{R}$，有

$$f[g(x)]=f(\sin x)=\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|,$$

故

$$(f\circ g)(x)=|\cos x|,\quad x\in\mathbf{R}.$$ ■

2. 函数的概念

定义 1.1.4(函数) 设 X 和 Y 为两个非空数集，若对每个 $x\in X$，按对应法则 f，总有唯一确定的 Y 中的元素 y 与之对应，则称 f 是一个从集合 X 到集合 Y 的**函数**(function)，记为

$$y=f(x),\quad x\in X.$$

其中 x 称为**自变量**(independent variable)，y 称为**因变量**(dependent variable). X 称为**定义域**(domain 或 domain of definition)，记作 D_f，即 $\mathrm{D}_f=X$.

注 (1) 函数定义中，与 x 按照法则 f 对应的唯一值 y 称为函数 f 在 x 处的函数值(value)，记作 $f(x)$，即 $y=f(x)$；

(2) 因变量 y 与自变量 x 之间的依赖关系通常称为函数关系；

(3) 函数值 $f(x)$的全体所构成的集合称为函数 f 的值域(range)，记作 R_f 或 $f(X)$，即

$$R_f=f(X)=\{y\mid y=f(x),\ x\in X\}.$$

值域不一定就是 Y，仅有 $R_f\subseteq Y$ 成立.

例 1.1.8 已知函数 $f(x)=\sqrt{\sin x}$，求其定义域 D_f 和值域 R_f.

解 只有当根号内的 $\sin x$ 非负时，这个函数才有意义，可见它的定义域为

$$D_f=\{x\mid x\in[2n\pi,(2n+1)\pi],\ n\in\mathbf{Z}\}.$$

值域为

$$R_f=[0,1].$$ ■

例 1.1.9 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x-2}}$，求其定义域 D_f 和值域 R_f.

解 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x-2}}$ 的定义域为满足不等式

$$x^2+x-2=(x+2)(x-1)>0$$

的全部 x 值，即 $x<-2$ 或 $x>1$，则

$$D_f=\{x \mid x<-2 \text{ 或 } x>1\},$$

且

$$R_f=(0,+\infty). \quad \blacksquare$$

例 1.1.10 求函数的定义域：

$$y=\sqrt{1-|x|}+\ln(2x-1). \tag{1.1.1}$$

解 定义域为使 y 可以用式(1.1.1)定义的所有 x 的集合. 若记 $y_1=\sqrt{1-|x|}$ 且 $y_2=\ln(2x-1)$，则 y_1 在 $|x|\leqslant 1$ 或 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时有定义，y_2 在 $x>\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{1}{2}<x<+\infty$ 时有定义. 由于 y_1 和 y_2 需要同时有定义，故

$$x\in A=\{x \mid -1\leqslant x\leqslant 1\}\cap\left\{x \,\middle|\, \frac{1}{2}<x<+\infty\right\}=\left\{x \,\middle|\, \frac{1}{2}<x\leqslant 1\right\}.$$

因此，式(1.1.1)定义的函数的定义域为

$$D_f=\left\{x \,\middle|\, \frac{1}{2}<x\leqslant 1\right\}. \quad \blacksquare$$

特别注意，表示函数的记号是可以任意选取的，除了常用的 f 外，还可用其他的英文字母和希腊字母，如“g”，“h”，“F”，“φ”等. 相应地，函数可以记作 $y=g(x)$，$y=h(x)$，$y=F(x)$，$y=\varphi(x)$等. 当然，函数本质上与记号所采用字母没有关系，对于两个函数 f 和 g 当且仅当它们有相同的定义域 X，且对于 X 内的每一个实数 x，它们有相同的函数值，才能称这两个函数相等，记为 $f=g$，否则就是不同的. 也就是说构成函数的要素是定义域和对应法则. 由于函数的值域总在 $\mathbf{R}$ 内，两函数相等时，它们的值域也必相同.

例 1.1.11 判断下列每组函数是否相等：

(1) $f(x)=\sin x$，　$g(x)=\dfrac{x\sin x}{x}$；

(2) $f(x)=x^2+2x+1$，　$g(t)=t^2+2t+1$.

解 (1) $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，$g(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 因为它们的定义域不一样，所以这两个函数并不相等.

(2) 函数 $f(x)$与 $g(x)$的定义域相同，都是$(-\infty,+\infty)$，且对于每一个实数，它们有相同的函数值，虽然两个函数的记号不同，但是这两个函数是相等的. $\blacksquare$

还应该注意的是，在函数概念中，并没有标明变量之间的函数关系式非得用一个式子来表达不可. 事实上，表示函数的主要方法有三种：**表格法，图形法和解析式法(公式法)**. 例如，火车时刻表是用列表的方法来表示火车出站和进站车次与时间的函数关系，这就是表格法；而气象站中的温度记录器是用自动描绘在纸带上的一条连续不断的曲线来记录温度与时间的一种函数关系，这就是图形法.

一般地，用图形法来表示函数是基于函数图像的概念，即坐标平面上的点集

$$\{(x,y) \mid y=f(x), x\in X\}$$

称为函数 $y=f(x)$，$x\in X$ 的图像. 通过这个方法可以绘制一个函数的图像，并很容易看出函数的趋势.

下面给出几个函数的例子.