

根据《2017年浙江省普通高考考试说明》

浙江省名校高级教师 联合审定
资深命题研究专家

高考信息

优化卷

数学

人教版

《高考信息优化卷》编写组/编

名师智慧

名题荟萃

更新

更准

更权威

2017年10月共赴学考选考之约!



冲刺

活页

吉林人民出版社

高考信息优化卷(一)

数 学

参考公式:

如果事件 A, B 互斥, 那么: $P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A, B 相互独立, 那么: $P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率为 p , 那么 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率:

$$P_n(k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k} (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

柱体的体积公式: $V=Sh$

其中 S 表示柱体的底面积, h 表示柱体的高

锥体的体积公式: $V=\frac{1}{3}Sh$

其中 S 表示锥体的底面积, h 表示锥体的高

台体的体积公式: $V=\frac{1}{3}h(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)$

其中 S_1, S_2 分别表示台体的上、下底面积, h 表示台体的高

球的表面积公式: $S=4\pi R^2$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

一、选择题(本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分. 每小题给出的选项中只有一个是符合题目要求的, 不选、多选、错选均不得分)

1. 设全集 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 $A=\{1, 2\}$, $B=\{x|x^2-5x+6=0\}$, 则 $A \cap (\complement_U B)=$

- A. $\{4, 5\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{1\}$ D. $\{4\}$

2. 若“ $\alpha > \beta$ ”是“ $\sin \alpha > \sin \beta$ ”的充要条件, 则前提条件是: α, β 角的终边均在

- A. 第 I 象限 B. 第 II 象限 C. $[0, \pi]$ 内 D. $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 内

3. 已知随机变量 X 的分布列如下:

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{3}$	a	$\frac{1-a}{3}$	$\frac{1}{6}$

- A. $a > \frac{1-a}{3}, E(X)=2$ B. $a < \frac{1-a}{3}, E(X)=\frac{9}{4}$
 C. $a = \frac{1-a}{3}, E(X)=\frac{9}{4}$ D. $a = \frac{1-a}{3}, E(X)=2$

4. $\alpha-l-\beta$ 是 60° 的二面角, 直线 m, n 有: $m \parallel \alpha, n \perp \beta$, 则 m 与 n 所成角为

- A. 30° B. $[30^\circ, 90^\circ]$ 内的角 C. 60° D. $[60^\circ, 90^\circ]$ 内的角

5. 从 $1, 2, 3, \dots, 9$ 这 9 个整数中任意取 3 个不同的数作为二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的系数, 则使函数 $f(x)$ 满足 $\frac{f(1)}{2} \in \mathbf{Z}$ 的概率为

- A. $\frac{11}{21}$ B. $\frac{10}{21}$ C. $\frac{11}{126}$ D. $\frac{1}{21}$

6. 若等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 前 n 项和为 S_n , 记 $b_n = \frac{S_n}{n}$, 则

- A. 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 的公差也为 d
 B. 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 的公差为 $2d$
 C. 数列 $\{a_n+b_n\}$ 是等差数列, $\{a_n+b_n\}$ 的公差为 d
 D. 数列 $\{a_n-b_n\}$ 是等差数列, $\{a_n-b_n\}$ 的公差为 $\frac{d}{2}$

7. 设不等式组 $\begin{cases} x+y \leq 4 \\ y-x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域为 D . 若圆 $C: (x+1)^2 + (y+1)^2 = r^2 (r > 0)$ 不经过区域 D 上的点, 则 r 的取值范围是

- A. $[2\sqrt{2}, 2\sqrt{5}]$ B. $(2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$
C. $(0, 2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{5}, +\infty)$ D. $(0, 3\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{5}, +\infty)$

8. 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点, 若点 P 是以 F_1F_2 为直径的圆与 C 右支的一个交点, PF_1 交 C 于另一点 Q , 且 $|PQ| = 2|QF_1|$, 则 C 的离心率为

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{5}$

9. 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 若 $\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} > 1$, 且 $\frac{b}{a} + \frac{c}{a} \geq -2$, 则下列结论成立的是

- A. a, b, c 同号 B. b, c 同号, a 与它们异号
C. b, c 同号, a 不能确定 D. a, b, c 的符号都不能确定

10. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的可导函数, $f(1) = 0$, 且对于其导函数 $f'(x)$ 恒有 $f(x) + f'(x) < 0$, 则使得 $f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是

- A. $\emptyset$ B. $(0, 1)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

二、填空题(本大题共 7 小题, 多空题每小题 8 分, 单空题每小题 3 分, 共 36 分)

11. 已知 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R}, i$ 为虚数单位), $z + |z| = 2 + 8i$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

12. 在 $(2x - \frac{a}{\sqrt[3]{x}})^4$ 的二项展开式中, 常数项是 8, 则 a 的值为 _____, 展开式中的二项式系数的和为 _____.

13. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为 _____, 表面积为 _____.

14. 已知函数 $f(x) = 1 + \log_2 \frac{1-x}{1+x}$, 若 $f(a) = \frac{3}{2}$, 则 $f(-a) =$ _____.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列, S_n 是其前 n 项和, 若 S_8 是数列 $\{S_n\}$ 中的唯一最小项, 则数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 的取值范围是 _____.

16. 已知向量 $|a + 2b| = 1, |-3a + b| = 1$, 则 $|a + b|$ 的最大值为 _____.

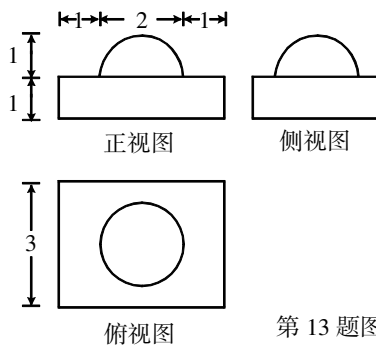
17. 平面直角坐标系 xOy 中, 点 A, B, C 的坐标分别为 $(a, 0), (0, a), (3, 4)$, 点 $P(x, y)$ 是平面内的任意一点, 记 $M(a) = \max\{|PA|, |PB|, |PC|\}$, 则 $M(a)$ 的最小值是 _____.

三、解答题(本大题共 5 小题, 共 74 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

18. (本题满分 14 分) 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x - \sin^2 x + \frac{1}{2}$, $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $f(B) = 1$.

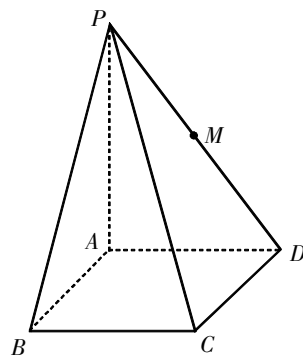
(I) 求角 B 的大小;

(II) 若 $a = \sqrt{3}, b = 1$, 求 c 的值.



第 13 题图

19. (本题满分 15 分) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA=2$, $AD=\sqrt{3}$, $AB=1$, M 为 PD 的中点.
- (I) 求证: 平面 ABM 与平面 PCD 不垂直;
- (II) 求 MC 与平面 PBC 所成角的正弦值;
- (III) 棱 PC 上是否存在点 N , 使平面 BMN 与平面 $ABCD$ 成 30° , 若存在, 找出点 N ; 若不存在, 请说明理由.



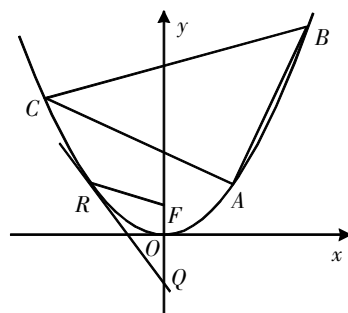
20. (本题满分 15 分) 已知函数 $f(x)=\frac{(x-1)\ln x}{x}$, $g(x)=(x-1)^2$.

- (I) 证明: $\frac{x}{x-1}[f(x)-g(x)] \leq 0$;
- (II) 若 $f(x_1)=f(x_2)$, $x_1 \neq x_2$, 求证: $x_1+x_2 > 2$.

21. (本题满分 15 分) 抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F , 以 $A(x_1, y_1) (x_1 \geq 0)$ 为直角顶点的等腰直角 $\triangle ABC$ 的三个顶点 A, B, C 均在抛物线 C 上.

(I) 过 $Q(0, -3)$ 作抛物线 C 的切线 l , 切点为 R , 点 F 到切线 l 的距离为 2, 求抛物线 C 的方程;

(II) 求 $\triangle ABC$ 面积的最小值.



22. (本题满分 15 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2, a_n = \frac{7a_{n-1} - 3}{3a_{n-1} + 1} (n \geq 2)$.

(I) 设 $b_n = \frac{1}{a_n - 1}$, 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 令 $c_n = \frac{1}{\sqrt{b_n}}$, 设 S_n 是数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和, 求证: 当 $n \geq 2$ 时, $S_n < \frac{4}{3} \sqrt{3n+1} - \frac{7}{4}$.

高考信息优化卷(二) 数 学

参考公式:

如果事件 A, B 互斥, 那么: $P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A, B 相互独立, 那么: $P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率为 p , 那么 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率:

$$P_n(k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k} (k=0, 1, 2, \cdots, n)$$

柱体的体积公式: $V=Sh$

其中 S 表示柱体的底面积, h 表示柱体的高

锥体的体积公式: $V=\frac{1}{3}Sh$

其中 S 表示锥体的底面积, h 表示锥体的高

台体的体积公式: $V=\frac{1}{3}h(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)$

其中 S_1, S_2 分别表示台体的上、下底面积, h 表示台体的高

球的表面积公式: $S=4\pi R^2$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

一、选择题(本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分. 每小题给出的选项中只有一个是符合题目要求的, 不选、多选、错选均不得分)

1. 设全集 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 集合 $A=\{1, 2, 4, 5\}$, 集合 $B=\{2, 5, 6\}$, 则 $(\complement_U A) \cap B=$

- A. $\{6\}$ B. $\{2, 3, 5\}$ C. $\{2, 3, 5, 6\}$ D. $\{3, 6\}$

2. 在复平面内, 复数 $z=\frac{i}{1+i}+(1+\sqrt{3}i)^2$ 对应的点在

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. 已知 $\theta \in \mathbf{R}$, 则“ $\theta=\frac{\pi}{6}$ ”是“ $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ”的

- A. 充分但不必要条件 B. 必要但不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 曲线 $f(x)=x^3-ax$ 存在两条互相垂直的切线, 则实数 a 的取值范围是

- A. $a<0$ B. $a>0$ C. $a\leq 0$ D. $a\geq 0$

5. 若函数 $f(x)=-\log_a(x^3+1)$ ($a>0, a\neq 1$) 的定义域和值域都是 $[0, 1]$, 则 $a=$

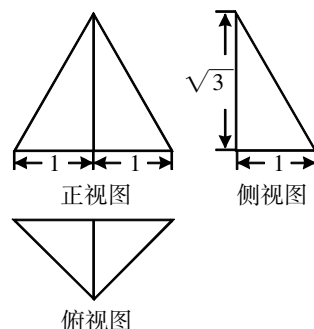
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. 2

6. 点 P 是抛物线 $y^2=4x$ 上一动点, 则点 P 到点 $A(0, -1)$ 的距离与到直线 $x=-1$ 的距离和的最小值是

- A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{3}$
C. 2 D. $\sqrt{2}$

7. 一个几何体的三视图如图所示(单位: cm), 则这个几何体的体积为

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}\text{cm}^3$ B. 1cm^3
C. $\sqrt{3}\text{cm}^3$ D. $\frac{1}{2}\text{cm}^3$



第 7 题图

8. 一个盒子中共有 12 个大小相同的小球, 其中红球 9 个, 黄球 3 个, 从盒子中任取 3 个球, 将其中的红球染成黄色连同黄球一起放回, 此时盒子中黄球的个数为 ξ , 则 $E\xi=$

A. 1

B. $\frac{21}{4}$ C. $\frac{17}{4}$

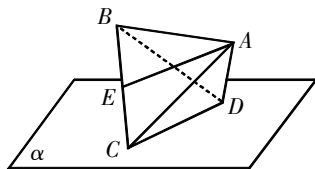
D. 3

9. 已知函数 $f(x) = x^2 + bx + c$ ($b, c \in \mathbf{R}$). 集合 $A = \{x | f(x) = 0\}$ 与集合 $B = \{x | f(f(x)) = 0\}$ 满足 $A \cap B \neq \emptyset, A \cup B \neq A$, 则实数 b 的取值范围是

A. $[0, 4]$ B. $(-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$ C. $[0, 4)$ D. $(-\infty, 0) \cup [4, +\infty)$

10. 已知正四面体 $ABCD$ 的棱 CD 在平面 α 上, E 为棱 BC 的中点, 当正四面体 $ABCD$ 绕 CD 旋转时, 直线 AE 与平面 α 所成最大角的正弦值为

A. 1

B. $\frac{\sqrt{33}}{6}$ C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 

第 10 题图

二、填空题(本大题共 7 小题, 多空题每小题 6 分, 单空题每小题 4 分, 共 36 分)

11. 已知 $a > 0$, 若 $(ax + \frac{2}{x})^5$ 的展开式中 x^3 的系数为 10, 则 a 的值为_____.

12. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $S_8 = 4a_3 + 12$, 则 $a_6 =$ _____; 又当 $a_2 = 11$ 时, 使得 S_n 达到最大值时的 $n =$ _____.

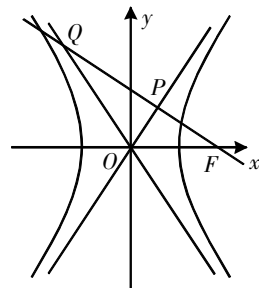
13. 已知函数 $f(x) = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})$, 则 $f(x)$ 在 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时的值域是_____; 又若将函数 $y = f(x)$ 的图像向左平移 a ($a > 0$) 个单位长度得到的图像恰好关于点 $(\frac{\pi}{4}, 0)$ 对称, 则实数 a 的最小值为_____.

14. 设 $m > 1$, 在约束条件 $\begin{cases} y \geq x \\ y \leq mx \\ x + y \leq 1 \end{cases}$ 下, 目标函数 $z = x + my$ 的最大值记为 $z(m)$, 则 $z(2) =$ _____; $z(m)$ 的取值范围是_____.

15. 如图, F 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$) 的右焦点, 过 F 作渐近线的垂线, 垂足为 P , 与另一条渐近线相交于 Q , 若 $|PF| = |PQ|$, 则 C 的离心率为_____.

16. 已知 a, b 满足 $|a| = 1, b$ 与 $b - a$ 的夹角为 120° , 则 $|b|$ 的取值范围是_____; $|b|^2 - (a \cdot b)^2$ 的最大值为_____.

17. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 对任意 $0 \leq x \leq 1$, 都有 $|ax + b| \leq 1$ 成立, 则 $|20a + 14b| + |20a - 14b|$ 的最大值是_____.



第 15 题图

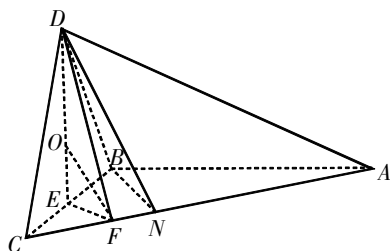
三、解答题(本大题共 5 小题, 共 74 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

18. (本题满分 14 分) 设 $\triangle ABC$ 的三内角 A, B, C 对边分别是 a, b, c , 若 $b \cos C + \sqrt{3} b \sin C = a + c$.

(I) 求角 B 的大小;

(II) 若 $b = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值.

19. (本题满分 15 分)如图,在三棱锥 $D-ABC$ 中,已知 $\triangle BCD$ 是正三角形, $AB \perp$ 平面 BCD , $AB=BC=a$, E 为 BC 的中点, F 在棱 AC 上,且 $AF=3FC$.
 (I)若 O 为 $\triangle BCD$ 的重心, N 在棱 AC 上,且 $CF=2FN$,求证: $OF \parallel$ 平面 DBN ;
 (II)求直线 AD 与平面 DEF 所成角的正弦值.



20. (本题满分 15 分)已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax + (a-1)\ln x$, $a > 1$.
 (I)讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
 (II)证明:若 $a < 5$,则对任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 且 $x_1 < x_2$, 都有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > -1$.

21. (本题满分 15 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 椭圆 C 上的动点到焦点距离的最小值为 $\sqrt{2} - 1$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 设 P 为椭圆 C 上一点, 若过点 $M(2, 0)$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于不同的两点 S 和 T , 满足 $\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OT} = t\overrightarrow{OP}$ (O 为坐标原点), 求实数 t 的取值范围.

22. (本题满分 15 分) 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = \frac{2x_n}{x_n^2 + 1}, n \in \mathbf{N}^*$.

(I) $x_{n+1} > x_n$;

(II) 求证: $\frac{(x_1 - x_2)^2}{x_1 x_2} + \frac{(x_2 - x_3)^2}{x_2 x_3} + \dots + \frac{(x_n - x_{n+1})^2}{x_n x_{n+1}} < \frac{5}{16}$.

高考信息优化卷(三)

数 学

参考公式:

如果事件 A, B 互斥, 那么: $P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A, B 相互独立, 那么: $P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率为 p , 那么 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率:

$$P_n(k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k} (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

柱体的体积公式: $V=Sh$

其中 S 表示柱体的底面积, h 表示柱体的高

锥体的体积公式: $V=\frac{1}{3}Sh$

其中 S 表示锥体的底面积, h 表示锥体的高

台体的体积公式: $V=\frac{1}{3}h(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)$

其中 S_1, S_2 分别表示台体的上、下底面积, h 表示台体的高

球的表面积公式: $S=4\pi R^2$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

一、选择题(本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分. 每小题给出的选项中只有一个是符合题目要求的, 不选、多选、错选均不得分)

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-4\leq 0, x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{y|\sqrt{y}\leq 2, y\in\mathbf{Z}\}$, 则 $A\cap B=$

- A. $\emptyset$ B. $[0, 2]$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{0, 1, 2\}$

2. 已知复数 $z=1+2i$, i 为虚数单位, 则 $\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z+i}$ 等于

- A. $\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$ B. $-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$ C. $-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$ D. $\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$

3. 某同学在前三次考试中数学得分分别为 105、110、115 分, 由于勤奋和学习得法, 第四次考试得分 130 分. 记前三次数学得分分数的方差为 S_1^2 , 前四次数学得分分数的方差为 S_2^2 , 则 $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ 等于

- A. $\frac{4}{7}$ B. $\frac{4}{15}$ C. $\frac{4}{21}$ D. $\frac{4}{35}$

4. 函数 $f(x)=x+\frac{a}{x+1}$ ($0\leq x\leq 2$) 在 $x=0$ 处取得最大值, 则 a 的取值范围是

- A. $a\geq 1$ B. $a\leq 1$ C. $a\geq 3$ D. $a\leq 3$

5. 设 F_1, F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$) 的左、右焦点, B 为双曲线右支上一点, $\angle F_1F_2B=120^\circ$, 且 $|F_1F_2|=|F_2B|$, 则双曲线的离心率为

- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}+1$ D. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

6. 设函数 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$ ($0\leq x\leq 4$) 的图像 Γ 的最高点为 A , 最低点为 B , 图像 Γ 与 x 轴的交点从左至右依次为 O, M, T . 现把图像 Γ 沿线段 AB 的垂直平分线方向向右上方向平移, 使 M 点移至点 C , 让 A, B, C 恰好构成等边三角形, 则此时点 T 移至点

- A. $(2+2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ B. $(4+\sqrt{3}, \sqrt{3})$
C. $(2+\sqrt{6}, \sqrt{6})$ D. $(4+2\sqrt{6}, 2\sqrt{6})$

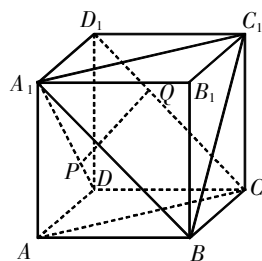
7. 已知数列 $\{a_n\}$ 对任意 $n\geq 2$ 的自然数均有 $a_n\leq \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$, 则下列命题正确的是

A. $\frac{a_7-a_2}{5} \leq \frac{a_6-a_3}{3}$ B. $a_2+a_7 \leq a_3+a_6$

C. $3(a_7-a_6) \geq a_6-a_3$ D. $a_2+a_3 \geq a_6+a_7$

8. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 是 A_1D 上的一点, 且满足 $A_1P=2PD$, 下列命题正确的是

- A. 在 CD_1 上存在点 Q , 使得 $PQ \parallel$ 平面 AA_1C_1C
 B. 在 CD_1 上存在点 Q , 使得 $PQ \perp$ 平面 AA_1C_1C
 C. 在 CD_1 上存在点 Q , 使得 $PQ \parallel$ 平面 A_1BC_1
 D. 在 CD_1 上存在点 Q , 使得 $PQ \perp$ 平面 A_1BC_1



第 8 题图

9. 坐标平面内点 $P(x,y)$ 满足条件: $\begin{cases} x^2+y^2 \leq 4 \\ t \leq y-x \leq t+2\sqrt{2} \end{cases}$, 则点 $P(x,y)$ 的集合所对应图形面积的最大值为

A. $2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$ B. $2\sqrt{3} + \frac{8}{3}\pi$ C. $4\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi$ D. $\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$

10. 已知向量 a, b 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, $|a-b|=|a|=5$, 向量 $c-a, c-b$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$, 向量 c 与 $c-b$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, $|c-a|=2\sqrt{3}$, $|c| \geq 5$, 则 $|c| =$

A. $8-\sqrt{3}$ B. $19-8\sqrt{3}$ C. $19+8\sqrt{3}$ D. $4+\sqrt{3}$

二、填空题(本大题共 7 小题, 多选题每小题 6 分, 单空题每小题 4 分, 共 36 分)

11. 抛物线 $y=3x^2$ 的焦点坐标是 _____; 准线方程是 _____.

12. 若 $(1+2x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$, 则 $a_0+a_1+a_3+a_5=$ _____.

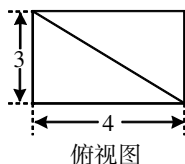
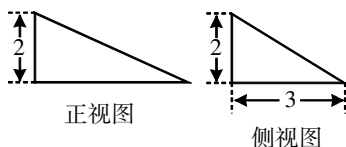
13. 已知 $\alpha \in (0, \pi)$, 且 $\sin 2\alpha = \frac{5}{13}$, 则 $\sin \alpha + \cos \alpha =$ _____, $\cos \alpha =$ _____.

14. 一个空间几何体的三视图如图所示, 则该几何体外接球的表面积为 _____.

15. 设掷两枚骰子, 它们各面均分别刻有 1, 2, 2, 3, 3, 3, 设 ξ 是掷得的点数的差的绝对值, 则 $E(\xi) =$ _____; $D(\xi) =$ _____.

16. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC \perp BC$, M 是侧面 ABB_1A_1 内的一点, 若 MC 与平面 ABC 所成的角为 30° , MC 与平面 ACC_1A_1 所成的角也为 30° , 则 MC 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值为 _____.

17. 已知实数 x, y 满足 $x^2+xy+y^2=3$, 则 xy 的最小值为 _____, x^2-xy+y^2 的最小值为 _____.



第 14 题图

三、解答题(本大题共 5 小题, 共 74 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

18. (本题满分 14 分) 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 且满足 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = 4\cos C$.

(I) 求 $\frac{\sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 C}$ 的值;

(II) 若 $\tan A = 2\tan B$, 求 $\sin A$ 的值.

19. (本题满分 15 分)在矩形 $ABCD$ 中, $AB=4\sqrt{5}$, $AD=2\sqrt{5}$, 将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起, 使得点 A 折起至 A' , 设二面角 $A'-BD-C$ 的大小为 θ .

(I) 当 $\theta=90^\circ$ 时, 求 $A'C$ 的长;

(II) 当 $\cos\theta=\frac{1}{4}$ 时, 求 BC 与平面 $A'BD$ 所成角的正弦值.

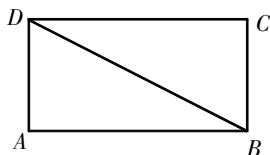


图 1

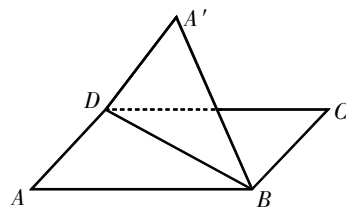


图 2

20. (本题满分 15 分)已知函数 $f(x)=a^x-e(x+1)\ln a-\frac{1}{a}$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$), e 为自然对数的底数.

(I) 当 $a=e$ 时, 求函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程;

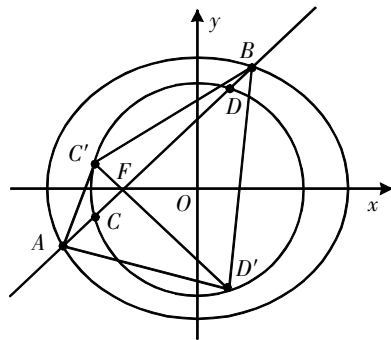
(II) 若函数 $f(x)$ 只有一个零点, 求 a 的值.

21. (本题满分 15 分)过 $F(-1,0)$ 作直线交椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 于 A, B 两点, 交圆 $x^2 + y^2 = 2$ 于 C, D 两

点, 已知 $|FA| \cdot |FB| = \frac{5}{2} |FC| \cdot |FD|$.

(I) 求直线 AB 的斜率;

(II) 设 C, D 关于 x 轴的对称点分别为 C', D' , 求四边形 $AC'BD'$ 的面积.



22. (本题满分 15 分) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 数列 $\{a_n\}$ 定义为 $a_1 = a, a_{n+1} = \frac{S_n}{S_n - 1}, n \geq 1$.

(I) 证明: 存在正实数 a , 使得 a_1, a_2, a_3 成等差数列;

(II) 求实数 a 的取值范围, 使得当 $n \geq 2$ 时, $0 < a_n < 1$.

高考信息优化卷(四)

数 学

参考公式:

如果事件 A, B 互斥, 那么: $P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A, B 相互独立, 那么: $P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率为 p , 那么 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率:

$$P_n(k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k} (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

柱体的体积公式: $V=Sh$

其中 S 表示柱体的底面积, h 表示柱体的高

锥体的体积公式: $V=\frac{1}{3}Sh$

其中 S 表示锥体的底面积, h 表示锥体的高

台体的体积公式: $V=\frac{1}{3}h(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)$

其中 S_1, S_2 分别表示台体的上、下底面积, h 表示台体的高

球的表面积公式: $S=4\pi R^2$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

一、选择题(本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分. 每小题给出的选项中只有一个是符合题目要求的, 不选、多选、错选均不得分)

1. 已知全集为 $\mathbf{R}$, 集合 $A=\{x|x^2-3x-4\leq 0\}$, $B=\{x|\log_2 x\geq 0\}$, 则 $A\cap B=$

- A. $\{x|0\leq x\leq 4\}$ B. $\{x|-1\leq x\leq 0\}$ C. $\{x|-1\leq x\leq 4\}$ D. $\{x|1\leq x\leq 4\}$

2. “ $a=1$ ”是“直线 $x-y+1=0$ 和直线 $ax+y+2=0$ 互相垂直”的

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

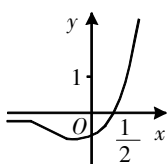
3. 设 m, n 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 则下列命题中正确的是

- A. 若 $m\parallel\alpha, n\perp\beta$ 且 $\alpha\perp\beta$, 则 $m\perp n$ B. 若 $m\perp\alpha, n\perp\beta$ 且 $m\perp n$, 则 $\alpha\perp\beta$
C. 若 $\alpha\perp\beta, m\parallel n$ 且 $n\perp\beta$, 则 $m\parallel\alpha$ D. 若 $m\subset\alpha, n\subset\beta$ 且 $m\parallel n$, 则 $\alpha\parallel\beta$

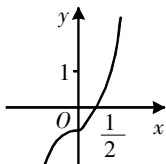
4. 若函数 $f(x)=3\sin(2x+\theta)$ ($0<\theta<\pi$) 是偶函数, 则 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的递增区间是

- A. $[0, \frac{\pi}{2}]$ B. $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ C. $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ D. $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$

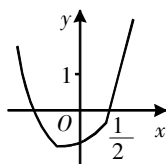
5. 函数 $y=(2x-1)e^x$ 的图像是



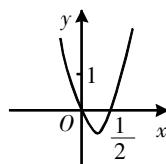
A.



B.



C.



D.

6. 设 F_1, F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0, b>0$) 的左、右焦点, P 为双曲线左支上任意一点, 若 $|PF_2|=$

$2\sqrt{2a\cdot|PF_1|}$, $\angle F_1PF_2=60^\circ$, 则双曲线的离心率等于

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

7. 已知 x, y 满足 $\begin{cases} x-y+6\geq 0 \\ x+y\geq 0 \\ x\leq 3 \end{cases}$, 若 $z=ax+y$ 的最大值为 $3a+9$, 最小值为 $3a-3$, 则实数 a 的取值范围

是

- A. $[0, 1]$ B. $[-1, 0]$
C. $[-1, 1]$ D. $(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$

8. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若数列 $\{S_n\}$ 有唯一的最大项 S_3 , $H_n = S_1 + 2S_2 + 2^2S_3 + \cdots + 2^{n-1}S_n$, 则

A. $S_5 \cdot S_6 < 0$

B. $H_5 \cdot H_6 < 0$

C. 数列 $\{a_n\}$, $\{S_n\}$ 都是单调递减数列

D. H_6 可能是数列 $\{H_n\}$ 最大项

9. 若函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ 有两个零点 x_1, x_2 , 且 $2 < x_1 < x_2 < 4$, 那么 $f(2), f(4)$

A. 只有一个小于 1

B. 都小于 1

C. 都大于 1

D. 至少有一个小于 1

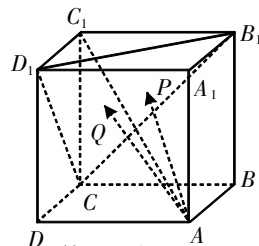
10. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 1, P 和 Q 是平面 D_1B_1C 内的两个动点, 且 $|\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}| = \frac{8\sqrt{3}}{3}$, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = \frac{13}{3}$, 则动点 P, Q 在平面 D_1B_1C 内运动所形成的区域的面积为

A. 9π

B. 8π

C. 4π

D. π



第 10 题图

二、填空题 (本大题共 7 小题, 多选题每小题 6 分, 单空题每小题 4 分, 共 36 分)

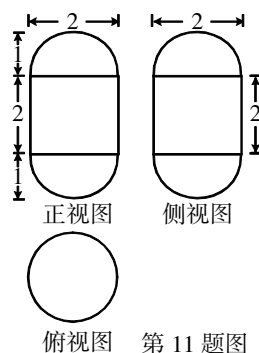
11. 已知空间几何体的三视图如图所示, 则该几何体的表面积是

_____ ; 几何体的体积是 _____ .

12. 函数 $f(x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{3}) - 1$ 的对称中心为 _____, 最小值为 _____ .

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1 \\ -x^2 + ax, & x > 1 \end{cases}$, 又 $f(f(1)) = a$, 则 $a =$ _____ ; 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 _____ .

14. 过抛物线 $y^2 = 4x$ 焦点 F 且倾斜角为 60° 的直线 l 在第一象限交抛物线于 A , 直线 l 与抛物线的准线交于 B , 则 $|AB| =$ _____ ; $\frac{|AF|}{|BF|} =$ _____ .



第 11 题图

15. $\triangle ABC$ 中, $AB = 5$, $AC = 2\sqrt{5}$, BC 上的高 $AH = 4$, $\overrightarrow{AH} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 则 $\frac{x}{y} =$ _____ .

16. 袋中有大小、形状相同的红、黑球各一个, 每次摸取一个球记下颜色后放回, 现连续取球 8 次, 记取出红球的次数为 X , 则 X 的方差 $D(X) =$ _____ .

17. 已知实数 a, b 满足 $a^2 - ab + b^2 = 1$, 则 $|2a - b| \cdot (a + b)$ 的取值范围是 _____ .

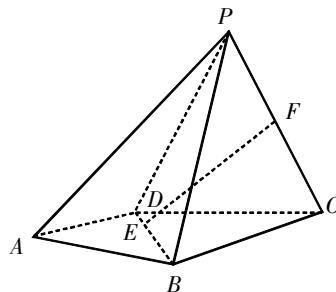
三、解答题 (本大题共 5 小题, 共 74 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

18. (本题满分 14 分) 已知函数 $f(x) = \cos x (\cos x + \sqrt{3} \sin x)$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 若 $f(x_0) = 1$, 且 $x_0 \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, 求 x_0 的值.

19. (本题满分 15 分) 已知四棱锥 $P-ABCD$, 平面 $PCD \perp$ 平面 $ABCD$, $\triangle PCD$ 和 $\triangle BCD$ 均为边长等于 4 的正三角形, $AD \perp DB$, $AD = 2\sqrt{3}$, E, F 分别是棱 BD, PC 上的点, 且 $DE = 1, PF = FC$.
- (I) 求证: $EF \parallel$ 平面 PAD ;
- (II) 求直线 AF 与平面 PCD 所成角的正切值.

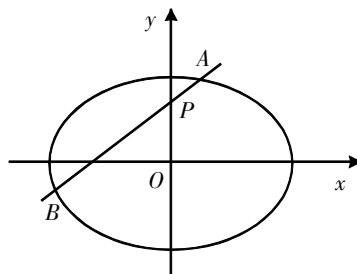


20. (本题满分 15 分) 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = x^2 + ax + b$.
- (I) 若 $a = -2$, 且函数 $y = |f(x)|$ 在区间 $[-1, 2]$ 上的最大值为 2, 求实数 b 的值;
- (II) 设 $\max\{m, n\} = \begin{cases} m, & m \geq n \\ n, & n \geq m \end{cases}$, $g(x) = a(x-1)$, 其中 $a \neq 0$, 若函数 $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ 在区间 $(-1, 2)$ 内有两个不同的零点, 求 $2a+b$ 的取值范围.

21. (本题满分 15 分)如图,椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且过点 $(\sqrt{2}, -1)$, 动直线 l 过点 $P(0, 1)$ 与椭圆相交于 A, B 两点.

(I) 求椭圆 E 的方程;

(II) 在平面直角坐标系 xOy 中, 在 y 轴上是否存在与点 P 不同的定点 Q , 使得 $\angle AQP = \angle BQP$ 恒成立? 若存在, 求出点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



22. (本题满分 15 分)已知数列 $\{a_n\}$, 对于任意正整数 n 都有 $a_{n+1} = a_n^2 + ca_n$, 其中 c 为实常数.

(I) 若 $c=2, a_1=1$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 若 $c=0$, 记 $T_n = (a_1 - a_2)a_3 + (a_2 - a_3)a_4 + \cdots + (a_n - a_{n+1})a_{n+2}$, 证明:

(1) 当 $0 < a_1 \leq \frac{1}{2}$ 时, $T_n < \frac{1}{32}$;

(2) 当 $\frac{1}{2} < a_1 < 1$ 时, $T_n < \frac{1}{3}$.