高等数学学习指导

与技能训练

主　编　李志荣　马芙玲

北京理工大学出版社

高等数学学习指导与技能训练

主　编　李志荣　马芙玲

副主编　李秀琴　何桂荣

　　　　梁妙妍　白　静

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书是与教材《高等数学》配套的学习辅助资料. 各章内容由知识点归纳、习题、本章小结、检测题等组成. 本书一方面能帮助学生从总体上梳理和把握知识脉络,明确学习重点和教学基本要求,做到学习起来心中有数;另一方面,本书中各种类型的习题都来自生产、生活,体现了以应用为目的的指导思想,题量少而精. 学生通过这些习题的训练,能达到事半功倍的效果. 此外,每道题后都留有适当的空白,方便学生解题.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导与技能训练 / 李志荣,马芙玲主编. —北京:北京理工大学出版社,2018.7

ISBN 978-7-5682-5939-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①李… ②马… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 168254 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 /
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16
印　　张 / 8
字　　数 / 195 千字
版　　次 / 2018 年 7 月第 1 版 2018 年 7 月第 1 次印刷
定　　价 / 18.80 元

责任编辑 / 钟 博
文案编辑 / 钟 博
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 施胜娟

图书出现印装质量问题,请拨打售后服务热线,本社负责调换

前　言 PREFACE

本书是与李志荣主编的教材《高等数学》配套的学习指导与技能训练用书. 其目的是使学生通过对教材内容的反思和深化，理清知识脉络，掌握基础知识和常用的数学方法，提高分析问题和应用数学知识解决实际问题的能力.

本书按照教材的顺序，以节为单位进行编写. 每章内容包括知识点归纳、习题、本章小结、检测题等组成. 此外，本书还包括期末检测试题.

本书所选的习题突破了过去的纯数学的应试性训练模式，注重基础知识、基本方法，注重数学在生产、生活中的应用，为学生在专业课程学习和生产实践中应用数学做准备.

参加本书编写的有李志荣、白静、李秀琴、马芙玲、何桂荣、梁妙妍.

本书的出版得到了北京理工大学出版社的大力支持，在此表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，疏漏与错误在所难免，敬请读者批评指正.

编　者

2018 年 7 月 23 日

目 录 CONTENTS

第一部分 各章知识点归纳及技能训练

第二部分　习 题 答 案

第一部分　各章知识点归纳及技能训练

第 1 章　函数与极限

1.1　函　　数

知识点归纳

(1)理解函数的定义,函数的两要素:定义域、对应法则.

(2)熟练掌握基本初等函数的图像、性质.

(3)理解复合函数及反函数的意义.

(4)理解初等函数的概念.

习　题　1.1

一、选择题

1. 函数 $f(x)=\sin^3(4x-1)$,则复合过程是(　　).

A. $y=u^3, u=\sin v, v=4x-1$　　B. $y=\sin^3 u, u=4x-1$

C. $y=u^3, u=\sin(4x-1)$　　D. $y=\sin^3 u, u=\sin v, v=4x-1$

2. 设函数 $f(x)=x^2$,函数 $\varphi(x)=2^x$,则 $f(\varphi(x))=$(　　).

A. 2^{x^2}　　B. x^{2^x}　　C. x^{x^2}　　D. 2^{2x}

3. $f(x)=\sin x$,则 $f(-\cos\pi)$的值是(　　).

A. 1　　B. 0　　C. $\sin 1$　　D. $\sin(-1)$

二、填空题

1. 已知 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$,则 $f(x)=$____________.

2. 若 $f(x)=2+x, g(x)=x^3$,则 $f(g(x))=$__________,$g(f(x))=$____________.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases} a+x, & x<0, \\ 4+x^2, & x\geqslant 0, \end{cases}$ 且 $f(-2)=6$,则 $a=$__________.

班级＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿学号＿＿＿＿＿＿成绩＿＿＿＿＿＿日期＿＿＿＿＿＿

三、解答题

1. 求函数 $y=\sqrt{3+x}+\dfrac{1}{\lg(2+x)}$的定义域.

2. 求函数 $y=\arccos\sqrt{2x}$的定义域.

3. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=x^2(1-x^2)$.

(2) $y=3x^2-x^3$.

(3) $y=x\sin^2 x$.

(4) $y=\dfrac{x^3}{\tan x}$.

4. 下列函数是由哪些简单函数复合而成的?

(1) $y=(3x+2)^8$.

(2) $y=\sqrt{4-x^2}$.

(3) $y=\cos x^2$.

(4) $y=\ln^2\sin x$.

班级__________姓名__________学号__________成绩__________日期__________

1.2 极　　限

知识点归纳

(1)掌握数列极限的概念.

(2)掌握函数极限的概念

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 描述的是当自变量 x 无限接近 x_0 时,相应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于常数 A 的一种变化趋势,与函数 $f(x)$ 在 x_0 点是否有定义无关.

(4)函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左、右极限都存在并且相等,即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A.$$

习　题　1.2

一、选择题

1. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=$(　　)($q\in\mathbf{R}$).

A. 0　　B. 1

C. 0 或者 1　　D. 极限是否存在由 q 的值确定

2. 数列 $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\frac{1}{64},\cdots$ 的前 n 项和的极限是(　　).

A. 1　　B. $\frac{3}{2}$

C. 2　　D. 不存在

3. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,则 $f(x)$ 在 x_0 处(　　).

A. 必有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

B. 没有定义

C. 必有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不一定等于 $f(x_0)$

D. 可以没有定义

4. 极限 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{|x-2|}{x-2}$ 是(　　).

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. 不存在

二、填空题

1. $\lim\limits_{x\to 1^-} \arcsin x=$__________, $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \arccos x=$__________, $\lim\limits_{x\to +\infty} \arctan x=$__________, $\lim\limits_{x\to -\infty} \arctan x=$__________.

2. 若 $f(x)=\begin{cases}-x, & x<0,\\ 0, & x=0\\ x^2, & x>0,\end{cases}$,则 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=$ ____________ , $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=$ ____________ , $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$ __________.

三、解答题

1. 讨论当 $x\to 0$ 时,函数 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 极限的存在性.

2. 讨论极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 的存在性,其中

$$f(x)=\begin{cases}x+3, -2\leqslant x<0,\\ \sin x, 0\leqslant x<4.\end{cases}$$

班级__________姓名__________学号__________成绩__________日期__________

1.3　极限的运算法则

知识点归纳

(1)掌握极限的四则运算法则.

(2)当 $x\to\infty$ 时,对于有理式的极限有下面的结论成立($a_0\neq 0, b_0\neq 0$):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ 0, & m>n,\\ \infty, & m<n.\end{cases}$$

习　题　1.3

解答题

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}$.

2. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+3}{x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x-6}{1-x^3}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-1}}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2-3x-1}{-x^3+3x+2}$

6. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$

班级__________姓名__________学号__________成绩__________日期__________

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{e^{x}-1}$

9. 若已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^{2}-2}{x+2}-ax-b\right)=0$,试求 a,b 的值.

班级__________姓名__________学号__________成绩__________日期__________

1.4 极限存在准则及两个重要极限

知识点归纳

(1)理解极限存在准则.

(2)熟练掌握两个重要极限及其应用:

① 极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

本极限的变形形式为:a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$;b. $\lim\limits_{f(x)\to 0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$.

② 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$.

本极限的变形形式为:$\lim\limits_{f(x)\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=\mathrm{e}$.

习 题 1.4

一、选择题

1. 下列等式成立的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^3}{x^3}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}=1$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\cos x)}{\cos x}=1$　　D. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{2(x-1)}=2$

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$的值是(　　).

A. e　　B. e^{-1}　　C. e^3　　D. e^{-3}

二、填空题

1. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{2t}=$__________,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)}{\tan x}=$__________,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2\sin x}=$__________,$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\ln x)}{2\ln x}=$__________.

2. $\lim\limits_{y\to 0}(1-y)^{\frac{1}{y}}=$__________,$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}=$__________,$\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{2}{y}}=$__________,$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}=$__________.

三、解答题

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$　　2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+3)}{\sin x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{3x}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\sin\dfrac{2}{x}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{x+1}$

班级__________姓名__________学号__________成绩__________日期__________

1.5 无穷小量与无穷大量

知识点归纳

(1)在无穷小与无穷大的概念中,注意无穷小与绝对值很小的量的区别、无穷大与绝对值很大的量的区别.

(2)无穷小与无穷大之间有倒数关系.

(3)在极限计算中,等价无穷小可以互相替代,以简化计算.

习 题 1.5

一、选择题

1. 当 $x\to 0$ 时,下列变量为无穷小量的是(　　).

A. $\sin x$　　B. $\tan(x+1)$　　C. $\ln x$　　D. $\frac{1}{e^x}$

2. 要使 $\frac{1}{2x+1}$ 为无穷大量,自变量 x 的变化趋势是(　　).

A. $x\to -\frac{1}{2}$　　B. $x\to\infty$　　C. $x\to 0$　　D. x 可任意变化

3. 当 $x\to 0$ 时,比 x 较高阶的无穷小量是(　　).

A. $\frac{x}{10^{10}}$　　B. $3x$　　C. $\sqrt{x}$　　D. x^2

4. 当 $x\to\infty$ 时,下列变量中为无穷小量的是(　　).

A. x^2-2x　　B. $\frac{x^2+1}{x+1}$　　C. $\frac{x+1}{x^2+1}$　　D. $x+3$

二、填空题

1. 函数 $y=1+3x$,当 $x\to$__________时是无穷小量,当 $x\to$__________时是无穷大量.

2. 函数 $y=\frac{1}{(x+3)(x+1)}$,当 $x\to$__________时和 $x\to$__________时是无穷大量.

3. 当 $x\to 0$ 时, $\sin(-x^2)\sim$__________, $\tan 2x\sim$__________, $\arctan 5x\sim$__________, $e^{-x}-1\sim$__________, $\ln(1+2x)\sim$__________.

4. 当 $x\to 1$ 时, $\frac{1}{1-x}$ 和 $\frac{2x}{1-x^2}$ 都是无穷__________量,而 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{1-x^2}\right)=$__________.

5. 当 $x\to+\infty$ 时, 3^x 和 5^x 都是无穷__________量,而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x}{5^x}=$__________.

班级__________姓名__________学号__________成绩__________日期__________

三、解答题

1. $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$

3. 利用无穷小的等价代换求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x^3+3x}$；

(2) 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x\cdot(e^x-1)}{\ln(1+x)\cdot\tan 6x}$.

班级__________姓名__________学号__________成绩__________日期__________

1.6 函数的连续性

知识点归纳

(1)掌握函数连续的定义：

① $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$；② $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

(2)从函数连续的定义可以看出，函数 $f(x)$在点 x_0 处连续，必须同时满足下列三个条件：

① 函数 $f(x)$在点 x_0 处有定义；

② $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在；

③ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，即当 $x\to x_0$ 时的极限值与函数在点 x_0 处的函数值相等.

如果函数不能同时满足上述三个条件，这时就说函数在点 x_0 处是间断的，点 x_0 称为间断点.

习　题　1.6

一、选择题

1. 函数 $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\leqslant 1,\\ -x, & 1<x<2,\end{cases}$则下列说法正确的是(　　).

A. 在 $x=1$ 处连续　　B. 函数 $f(x)$有最小值-2

C. 函数 $f(x)$有最大值 1　　D. 函数既无最大值，也无最小值

2. 下列函数中既无最大值，又无最小值的是(　　).

A. $|x|$　　B. $\sin x, x\in(0,\pi)$

C. $\cos x, x\in[0,2\pi]$　　D. e^x

3. 函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant 0,\\ x-b, & x\geqslant 0\end{cases}$在 $x=0$ 处连续，则 b 的值是(　　).

A. -1　　B. 1

C. 0　　D. 任意实数

二、填空题

1. 函数 $y=x^2+2x-1$，当 x 由 1 变到 2 时，函数的增量 $\Delta y=$__________.

2. 函数 $y=\dfrac{x}{3}-\dfrac{4}{5}$的连续区间是________.

3. 函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, x<0,\\ 3-x, x\geqslant 0\end{cases}$ 的间断点是______.

4. 函数 $y=\tan x$ 的间断点是______.